Unkarilaisia matematiikan tehtäviä koululaisille

Käännös: Mira Hämäläinen

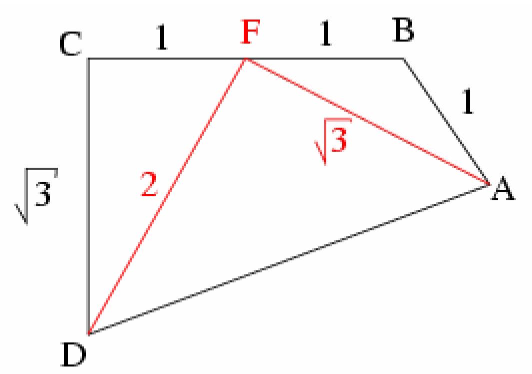
Geometrian tehtäviä peruskoulun yläluokille:

1. Nelikulmiossa *ABCD*,

$$AB = 1,\ BC = 2,\ CD = \sqrt{3},\ \angle ABC = 120°,\ \angle BCD = 90°.$$

Määrittele tarkka arvo sivun *AD* pituudelle.

Vihje: Tehtävän ratkaiseminen kannattaa aloittaa nelikulmion *ABCD* piirtämisellä,

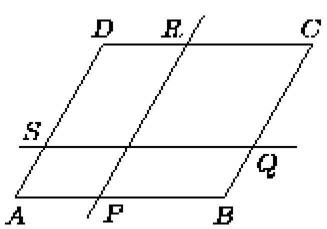


jonka jälkeen piirretään kuvaan piste *F* ja suorat *DF* ja *FA* (kuvassa merkitty punaisella). Tämän jälkeen tehtävä ratkeaa Pythagoraan lauseen ja kulmien laskemisen avulla.

2. Nelikulmion kulmat koordinaatistossa ovat *A*(0,0), *B*(16,0), *C*(8,8), *D*(0,8). Etsi yhtälö suoralle, joka on yhdensuuntainen suoran *AC* kanssa ja puolittaa nelikulmion alan.

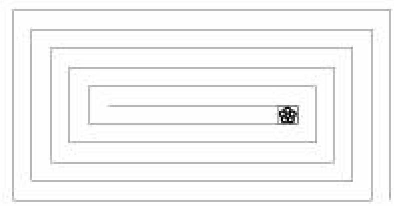
3. Hyönteinen kävelee neliön muotoisella paperiarkilla. Jokaisella askeleella se voi liikkua kaksi yksikköä oikealle, neljä yksikköä vasemmalle, kolme yksikköä ylös tai viisi yksikköä alas. Jokaisen askeleen jälkeen hyönteinen kääntyy tasan 90°. Mitkä ovat ne alueet, joissa hyönteinen voi näin edetessään käydä?

4. Suunnikkaan *ABCD* ala on 2 yksikköä. *AD*:n kanssa yhdensuuntainen suora leikaa suunnikkaan reunat pisteissä *P* ja *R*, ja *AB*:n kanssa yhdensuuntainen suora leikkaa suunnikkaan pisteissä *S* ja *Q*, kuten kuvasta näkyy. Mitkä ovat kolmioiden *AQR*, *BSR*, *DPQ* ja *CSP* alat?

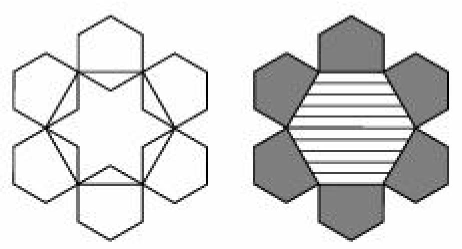


5. Hammastahnatuubi sisältää 75 ml hammastahnaa. Määrittele metreissä tahnan pituus, joka voidaan puristaa ulos tuubista, kun tiedetään, että tahnan ympyrän muotoisen poikkileikkauksen halkaisija on 6 mm.

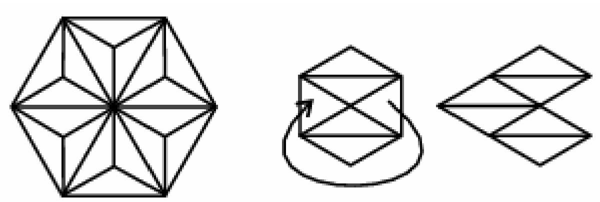
6. Loiren lähellä on suorakulmainen puisto, jonka mitat ovat mitat ovat 20x10 m. Suorakulmainen spiraali reitti, jonka leveys on 1 m, johtaa puiston keskustaan. Chateaun lordi kävelee spiraalin reitin joka aamu (pysyttelee aina keskellä reittiä ja tekee suorakulmaiset käännökset kulmissa), kastelee kukat, joita hän kasvattaa neliön muotoisessa kukkapenkissä, jonka sivu on 1 m ja sitten kävelee takaisin. Minkä pituisen matkan hän yhteensä kävelee?



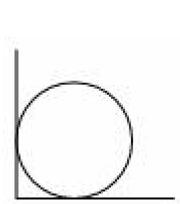
7. Eräs yritys suunnitteli oman logon. Suunnittelija piirsi seuraavan luonnoksen, joka sisälsi kahta erilaista säännöllistä kuusikulmiota. Sitten hän käytti luonnosta tehdäkseen lopullisen version. Mikä on harmaan ja viivoitetun alueen suhde (jälkimmäisessä kuvassa)?



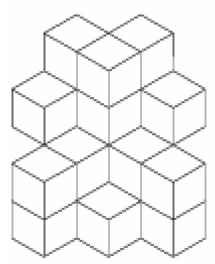
<u>Vihje</u>: Kannattaa jakaa logo samankokoisiin osiin alla olevan kuvan mukaisesti, jolloin eriväristen alueiden suhde on helpompi hahmottaa.



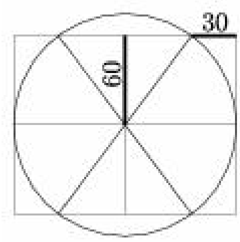
8. Ympyrän muotoinen pöytä on laitettu huoneen nurkkaan. Kuva näyttää pöydän ylhäältä päin. Pöydänpinnan halkaisija on 170 cm. Eräs piste pöydän reunalla on 10 cm etäisyydellä seinästä. Laske etäisyys toisesta seinästä.



9. Rakennelma, joka näkyy kuvassa, on tehty liimaamalla identtisiä kuutioita toisiinsa. Kaksi kuutiota voidaan liimata toisiinsa vain, jos niiden tahkot peittävät toisensa (ei riitä, jos vain särmät ovat kosketuksissa). Mikä on minimimäärä kuutioita, jotka on tarvittu kyseisen rakennelman tekoon?

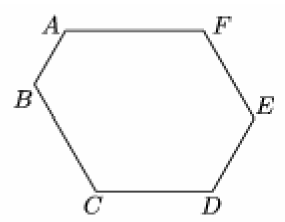


10. Kuvassa nähdään kaupungin puistoon suunnitellut kävelyreitit. Mikä on rakennettavien reittien yhteispituus, kun kuvaan merkityt kaksi janaa ovat pituudeltaan 60 m ja 30 m.

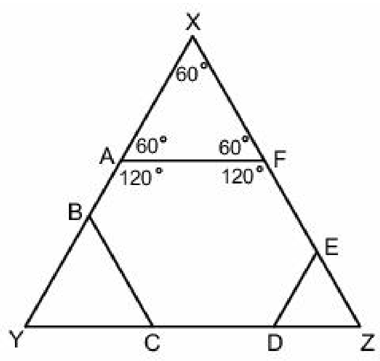


11. Kuvassa olevan kuusikulmion jokainen sisäkulma on 120°. Todista, että

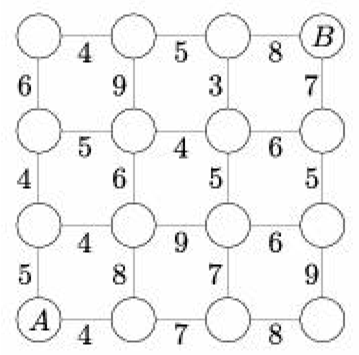
$$AB + FA = CD + DE.$$



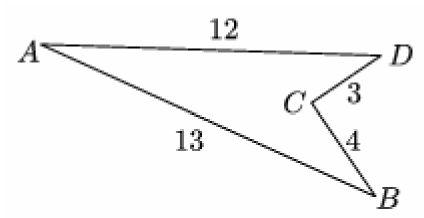
<u>Vihje</u>: Tehtävän ratkaisua helpottaa seuraava kuva.



12. Kuvassa näkyy kaupunginosan kartta. Ympyrät kuvastavat risteyksiä ja viivat katuja. Numerot jokaisen kadun vieressä kuvaavat minuuteissa matkaa, joka kuluu kadun kävelemiseen. Mikä on nopein mahdollinen aika, joka kuluu kävelemiseen paikasta *A* paikkaan *B*?



13. Konkaavin nelikulmion *ABCD* sivut ovat *AB* = 13 cm, *BC* = 4 cm, *CD* = 3 cm, *DA* = 12 cm ja sen sisäkulma kärjessä *C* on 270°. Laske nelikulmion ala.



14. Anna esimerkki suorakulmaisesta kolmiosta, joka voidaan jakaa viiteen yhtenevään kolmioon.

15. Nelikulmion kulmat koordinaatistossa ovat *A*(0,0), *B*(5,0), *C*(3,2), *D*(0,1). Näytä, että lävistäjät liittyvät yhteen 45° kulmassa.

16. Neliöpohjaisen tiilen yhden tahkon ala on 49 cm² ja toisen tahkon ala on 84 cm². Laske tiilen tilavuus.

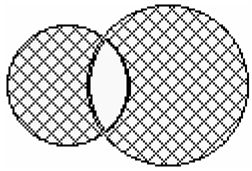
17. Pyöreän pöydän halkaisija on 1 m. Pöytä koostuu kahdesta puoliympyrän muotoisesta levystä. Pöytää voidaan laajentaa lisäämällä kahden levyn väliin suorakulmainen irto-osa, jonka mitat ovat 1 m × 0,5 m. Onko laajennetulla pöydällä kahta pistettä, joiden etäisyys on yli 150 cm?

18. Kuinka monta ikosaedrin tahkoista voidaan valita siten, että millään kahdella tahkolla ei ole yhteistä särmää?

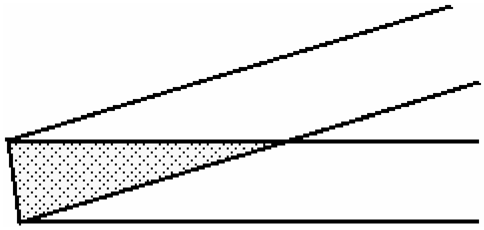
19. Onko olemassa sellaista kolmiota, joka voidaan jakaa kolmeen yhtenevään osaan kahdella suoralla viivalla?

20. Onko mahdollista järjestää luvut 1,2,3,…,11,12 säännöllisen oktaedrin särmiin siten, että kärjestä alkavien särmien lukujen summa on sama jokaiselle kärjelle?

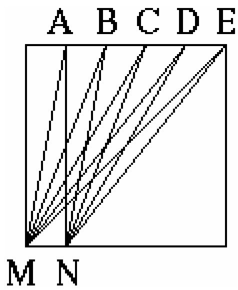
21. Kuvassa esiintyvien ympyröiden säteet ovat 3 cm ja 4 cm. Ympyröiden keskipisteet ovat 5 cm päässä toisistaan. Laske kahden varjostetun alan ero.



22. Paperisuikala, jonka leveys on 5 cm, taitetaan kuvan mukaisesti, ilman ryppyjä. Kuinka pieni varjostettu alue, jossa paperi on kaksinkerroin, voi olla?



23. Kuvassa on neliö. *PA* = *AB* = *BC* = *CD* = *DE*. Mikä on kulmien *MAN*, *MBN*, *MCN*, *MDN*, *MEN*, jotka näkyvät kuvassa, summa?



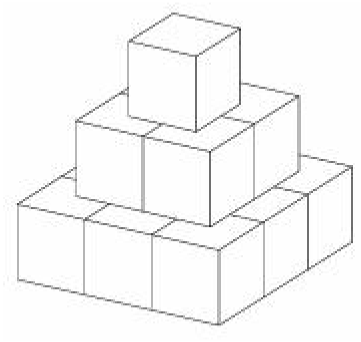
24. Neliön muotoisen ruokailupöydän jalkojen pituudet ovat 70 cm, 71 cm, 72.5 cm ja 72 cm, myötäpäivään lueteltuna. Keikkuuko tämä pöytä, eli onko sillä kaksi jalkaa, jotka eivät koskaan kosketa lattiaa yhtäaikaisesti?

Geometrian tehtäviä lukiolaisille:

25. Kolmiossa sivun *AB* pituus on 10 cm, sivun *AC* pituus on 5,1 cm ja $\angle CAB = 58°$. Määrittele kulman *BCA* suuruus asteen sadasosan tarkkuudella.

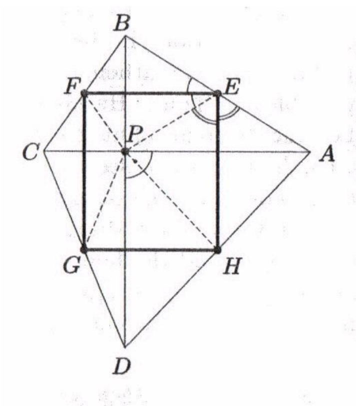
26. Suoran ympyrälieriön kokonaispinta-ala on 1000 m² ja korkeus on 1000 km. Laske lieriön tilavuus litroissa.

27. Kuvassa oleva "pyramidi" on rakennettu kolmeen kerrokseen 1 cm^3 kuutioista. Pyramidin pinnan ala on 42 cm^2. Käyttämällä samaa tekniikkaa rakennetaan isompi "pyramidi", jonka kokonaispinta-ala on 2352 cm^2. Kuinka monta kerrosta isompi "pyramidi" sisältää?



28. Säännöllisen kymmenkulmion kulmat on yhdistetty suorilla niin, että muodostuu kymmenen kolmiota. Kolmiot on väritetty punaisiksi ja sinisiksi vuorotellen. Todista, että sinisten kolmioiden yhteenlaskettu ala on sama kuin punaisten.

29. Nelikulmion muotoinen pala leikataan paperista, ja käännetään kaikki kulmat niin, että niiden kärjet kohtaavat samassa pisteessä. Minkälainen nelikulmio pitäisi leikata, jotta käännetyt osat peittävät loputkin paperista ilman rakoja ja päällekkäisiä taitoksia?



Ratkaisu: Olkoon $ABCD$ annettu nelikulmio, ja käännettyjen kulmien yhteinen piste P. Kun taitetaan kärki A, muodostuu jana, jonka päätepisteet ovat E ja H (kuvan mukaan) ja kärjen B taitoksen muodostaman janan päätepisteet ovat E ja F. Olkoon $\angle BEF = \alpha$, $\angle HEA = \beta$. Selvästi, $EB = EP$ ja $AE = EP$, t.s. $EB = EA$, täten E on janan AB keskipiste. Samoin F on janan BC keskipiste ja G janan CD ja H janan DA keskipiste. Kolmioiden EAH ja EPH yhdenmuotoisuudesta seuraa, että $\angle PEH = \beta$ ja kolmioiden BEF ja PEF yhdenmuotoisuudesta seuraa, että $\angle FEP = \alpha$. Koska $2\alpha + 2\beta = 180°$, niin $\angle FEH = 90°$, t.s. kulma E nelikulmiossa $EFGH$ on suorakulma. Vaikka kärki E ei ole eritelty todistuksessa, on selvää, että kaikki nelikulmion $EFGH$ kulmat ovat 90°. Koska E on janan AB keskipiste ja H on janan AD keskipiste, ja jana EH yhdistää nelikulmion kahden vastaikkaisen sivun keskipisteen, niin näin ollen se on yhdensuuntainen BD:n kanssa. Samoin $FG \| BD$, $FE \| AC$ ja $FE \perp EH$, mistä seuraa, että nelikulmion $ABCD$ lävistäjät AC ja BD ovat kohtisuorassa.

Näin ollen tarvittava ehto sille, että nelikulmion taitetut kulmat kohtaavat samassa pisteessä ja että taitokset peittävät koko paperin ilman rakoja ja päällekkäin taitoksia, on se, että nelikulmion lävistäjät ovat kohtisuorassa. Helposti nähdään, että tämä ehto on myös riittävä. Tosiasiassa, kun peilataan kolmio ABD janan EH suhteen, niin saadaan yhtenevät kolmiot AEH ja PEH, missä P on nelikulmion $ABCD$ lävistäjien leikkauspiste.

30. A_1, A_2,…, A_n ovat erillisiä tason pisteitä. Pisteiden määrittelemien janojen keskipisteeet ovat väriltään punaisia. Mikä on punaisten pisteiden pienin mahdollinen lukumäärä?

Ratkaisu 1: Parit, jotka muodostuvat annetuista pisteistä, määrittelevät äärellisen määrän suoria. Näin ollen on olemassa suora, joka ei ole yhdensuuntainen minkään muun suoran kanssa. Piirrä yhdensuuntainen suora janalle, joka kulkee jokaisen annetun pisteen kautta. Nämä suorat janat ovat kaikki erillisiä. Leikataan nämä yhdensuuntaiset suorat toisella suoralla l. Leikkauspisteiden joukon alkioiden määrä on sama kuin alkuperäisten pisteiden joukolla, koska yhdensuuntaiset suorat ovat bijektiivisiä kahden pisteen joukkojen kanssa. Väritä siniseksi janojen keskipisteet, jotka muodostuvat leikkauspisteistä. Sinisten pisteiden määrä ei ylitä punaisten pisteiden määrää, koska jos kaksi kahden alkuperäisen janan keskipistettä kohtaa, niin myös niiden yhdensuuntaiset projektiot kohtaavat. Merkitään n:llä annettujen pisteiden lukumäärää. Olkoon A ja B suoran l ensimmäinen ja viimeinen leikkauspiste ja olkoon F suoran AB keskipiste.

Sinisten pisteiden lukumäärä on korkeintaan $2(n-2)+1=2n-3$, koska jos mittakaavakertoimen suurennos ½ A:sta tai B:stä on asetettu $(n-2)$ leikkauspisteeksi A:n ja B:n välillä niin silloin arvojoukot, jotka ovat janojen AF ja BF sisäpuolella ovat kaikki sinisiä.

Piste F on myös sininen, joten myös punaisten pallojen lukumäärä on vähintään $2n-3$. Punaisten pisteiden lukumäärä voi olla tasan $2n-3$. Olkoon A_1, A_2,…, A_n numerojonon pisteet $1,2,\ldots,n$: silloin keskipisteet ovat murtolukuja, joiden nimittäjänä on 2 ja arvot välillä 1 ja n ja näin ollen niiden lukumäärä on $2n-3$.

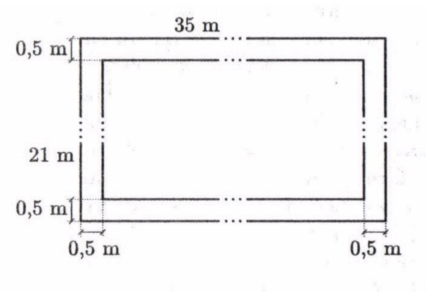
Ratkaisu 2: Edetään induktiolla. Jos $n=1$, niin ei ole yhtään leikkauspistettä. Näytämme, että jos $n \geq 2$, niin punaisten pisteiden pienin luku on $2n-3$.

Jos Ai on piste $(i-1)$ numerojonossa, niin silloin punaiset pisteet käsittävät numerot, jotka ovat samanarvoisia kuin puolet kokonaisluvuista, jotka ovat suurempia kuin 0, mutta vähemmän kuin $2n-2$: näistä $(2n-3)$ täyttää vaatimukset.

Jäljelle jää osoittaa, että aina on yhtä monta punaista pistettä, vaikka pisteet Ai on järjestetty. Todistus tehdään induktiolla n:n suhteen.

Jos $n=2$, niin on tasan $1=2\cdot2-3$ punaista pistettä. Oletetaan nyt, että n pistettä määrittelee aina vähintään $2n-3$ punaista pistettä ja käsittää pisteet $A_1,\ldots, A_{n+1}$. Olkoon B joukon $P=\{A_1,\ldots, A_n\}$ konveksin verhon C kärki ja olkoon e, joka koskettaa C:tä pisteessä B. Olkoon B_1 ja B_2 joukon $P \setminus \{B\}$ kaksi pistettä siten, että ne sijaitsevat niin lähellä kuin mahdollista suoraa e. Oletuksesta seuraa, että joukko $P \setminus \{B\}$ määrittää vähintään $2n-3$ punaista pistettä, joten merkitään punaisten pisteiden joukkoa F:llä. Janojen B_1B ja B_2B keskipisteet eivät kohtaa ja ne eivät varmasti kuulu F:ään, koska jokainen piste on lähempänä e:tä kuin janan B_1B_2 keskipistettä. Näin ollen nämä kaksi uusia punaisia pisteitä ja täten punaisten pisteiden määrittelemä joukko P on vähintään $(2n-3)+2=2(n+1)-3$. Täten todistus on suoritettu.

31. Metsässä, jossa Smurffit asuvat, on 1280 mäntyä, jokaisen männyn halkaisija on 1 m. Metsän mitat ovat 1001x945 metriä. Smurffit haluaisivat levittää metsään seitsemän tenniskenttää, joiden mitat olisivat 20x34 metriä. Onko tämä mahdollista ilman, että jouduttaisiin leikkaamaan yhtään mäntyä?



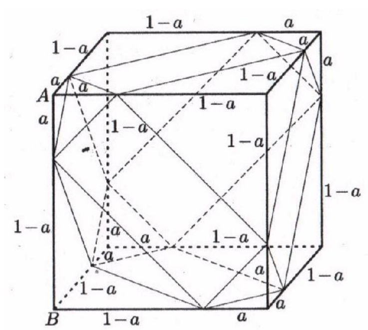
Ratkaisu: Ratkaisu perustuu lokeroperiaatteeseen, missä tenniskentän alue merkitään osiksi siten, että mikä tahansa puu voi täyttää näistä vain yhden. Jaetaan metsä suorakulmioiksi, joiden sivut ovat 35 m ja 25 m, ja joiden reunuksia kiertää puolen metrin levyinen kaistale. Mahdolliset tenniskentät sijoittuisivat näiden suorakulmioiden sisään.

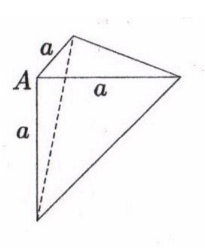
Kahden virekkäisen neliskulmaisen kentän kaistaleiden summa on 1 m, näin ollen, jos puunrunko ulottuu yhdelle tenniskentälle, se ei voi ulottua toiselle kentälle.

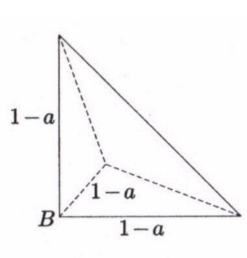
Jaetaan pidempi eli 1001 metrin pituinen sivu kahteen osaan, toinen pituudeltaan 21 m ja toinen 980 m ja piiretään yhdensuuntainen suora jaetun suoran pisteestä vastakkaiselle sivulle niin, että saadaan suorakulmiot 21 m x 945 m ja 980 m x 945 m. Ensin mainittu pystytään jakamaan tasan 27:ksi suorakulmioksi, joiden mitat ovat 21 m x 35 m ja jälkimmäisestä saadaa 45·28 = 1260 nelikulmiota, koska 980 = 28·35 ja 945 = 45·21. Nämä tekevät yhteensä 1287 tenniskenttää ja 1280:stä jokainen voi ulottua vain yhdelle kentälle. Näin ollen Smurffit saavat 7 tenniskenttäänsä.

32. Onko mahdollista merkitä piste kuution jokaiselle särmälle siten, että 12 pisteen muodostaman monikulmion tilavuus on puolet kuution tilavuudesta?

Ratkaisu: Olkoon kuution särmät pituudeltaan 1. Otetaan kuution jokaiselta särmältä jana, jonka pituus on a, niin että jokainen kärki on saman pituisten janojen päätepisteenä. Jos kärkiin muodostuneet pyramidit leikataan pois, saadaan konveksi monitahokas. Pyramideja on kahdenlaisia ja kumpiakin neljä kappaletta. Monitahokkaan tilavuus on puolet kuution tilavuudesta, jos pyramidien tilavuuksien summa on myös puolet kuution tilavuudesta.



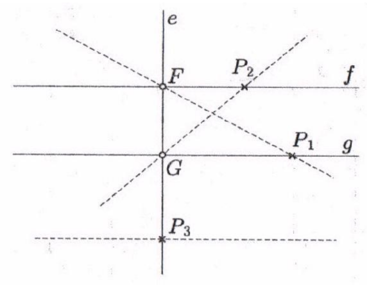




Kahdenlaisista pyramideista toisen tilavuus on $V_A = a^3/6$ ja toisen tilavuus on $V_B = (1 - a)^3/6$. Pyramidien summan tulee olla ½, joten $4 \cdot V_A + 4 \cdot V_B = ½$, josta saadaan $12a^2 - 12a + 1 = 0$.

$a_{1,2} = (3 \pm \sqrt{6})/6$, joten juuret ovat positiivisia lukuja ja pienempiä kuin 1 (niiden summa on 1). Valitaan $a = a_1$, saamme halutun monitahokkaan: on mahdollista merkitä 12 pistettä kuution särmille sovittujen sääntöjen mukaisesti.

33. Tason suora *l* on pistejoukon *H* tangenttisuora, jos tasan yksi joukon *H* piste on suoralla *l*. Anna tason pistejoukko, jonka jokaisella pisteellä on tasan yksi tangenttisuora ja vähintään yksi piste jokaisella tason suoralla.



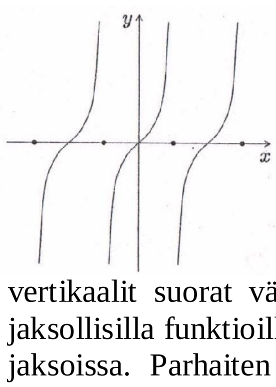
Ratkaisu 1: Tarkastellaan suoraa *e* ja suoria *l* ja *g*, jotka ovat kohtisuorassa suoran *e* kanssa. Suorat *l* ja *g* laikkaavat suoran *e* pisteissä *F* ja G.

Näytämme, että pistejoukko $H = e \cup f \cup g \setminus \{F,G\}$ täyttävät tehtävän ehdot.

Aluksi todistamme, että *H*:lla on tasan yksi tangenttisuora jokaista pistettä kohti. Jos *P* on *H*:n piste ja on suoralla *e*, niin silloin pisteen *P* kautta kulkevien suorien joukossa on vain yksi suora, joka on kohtisuorassa suoraa *e* kohtaan, tämä on sen tangentti. Jos *H*:n piste *P* on suoralla *f*, niin silloin ainoa tangentti, joka kulkee pisteen *P*:n kautta, on suora *PG*, ja vastaavasti, jos *H*:n piste *P* on suoralla *g*, niin silloin ainoa tangentti, joka kulkee pisteen *P* kautta, on suora *PF*.

Toisaalta joukossa *H* on piste jokaisella tason suoralla *h*. Jos *h* ei ole yhdensuuntainen suoran *e* kanssa, niin silloin se leikkaa suoran *e*. Jos tämä leikkauspiste on jompikumpi *G* tai *F*, niin silloin *h* on identtinen joko suoran *f* tai *g* kanssa tai sitten suora *h* leikkaa suoran *f* tai *g* eri pisteissä kuin *G* tai *F*. Lopulta, jos *h* on yhdensuuntainen suoran *e* kanssa, niin se on joko identtinen sen kanssa tai sitten se leikkaa molemmat suorat sekä *f*:n että *g*:n.

Näin ollen *H* toteuttaa tehtävän ehdot.

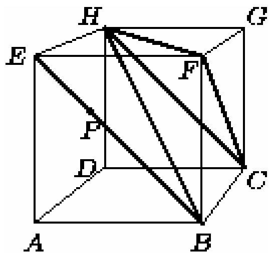


Ratkaisu 2: Etsitään ratkaisu funktion graafisesta kuvaajasta ja tutkitaan milloin käyrä täyttää vaatimukset.

Vertikaali suora (joka on yhdensuuntainen *y*-akselin kanssa) on tangentti jokaiselle käyrän pisteelle. Toisaalta käyrä leikkaa kaikki vertikaalit suorat, jos funktio on määritelty kaikilla reaaliluvuilla. Näin ollen on löydettävä funktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja jonka kuvaaja leikkaa ei-vertikaalit suorat vähintään kahdessa pisteessä. Jälkimmäinen ehto tulee täytettyä jaksollisilla funktioilla, joiden määrittelyjoukkona on reaaliluvut ja jotka ovat jatkuvia jaksoissa. Parhaiten tunnettu esimerkki on tangenttifunktio, jos se ulottuu koko reaalilukujen joukkoon sopivalla tavalla.

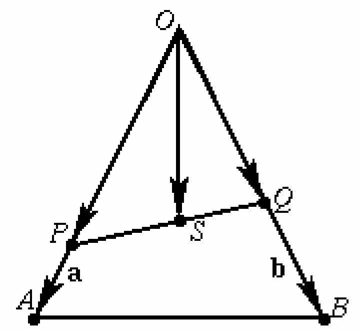
Näiden perusteella, jos tangenttifunktio on määritelty siten, että se saa arvon 0 sen epäjatkuvuuspisteissä, silloin funktion graafinen esitys on ratkaisu.

34. On annettu kuutio *ABCDEFGH* , jonka särmän pituus on yksi. Määrittele piste, joka jakaa janan *BE* kolmasosaan, lähempänä *E*:tä (katso kuva). Kuinka kaukana tämä piste on tasosta, joka kulkee pisteiden *C*, *F* ja *H* kautta (katso kuva)?



35. Määrittele sellaiset suorat, jotka kulkevat kolmion keskiön läpi ja puolittavat kolmion pinta-alan.

Vihje: Käytä vektoreita alla olevan kuvan mukaisesti.



36. Kolmisivuisen pyramidin viistot sivut ovat pituudeltaan 1, lisäksi ne muodostavat 60º, 90º ja 120º asteen kulmat. Laske pyramidin tilavuus.

37. *n* kappaletta kolikoita, joiden kaikkien säde on *r*, on sijoitettu pöydälle, jonka säde on *R*, siten että jokaisella kolikolla on sivu, joka kokonaan koskettaa pöydän pintaa. Toisaalta, yhtään kolikkoa ei enää mahdu pöydälle. Todista, että

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right) \leq \sqrt{n} \leq \frac{R}{r}.$$

38. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat *a* ja *b* sekä hypotenuusa *c*. Todista , että

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{ab(a+b+c)} \geq \sqrt{2}.$$

39. Mikä piste yhtälön $y(x^2 + y^2) - x(x^2 + y^2) - y + x = 0$ graafisessa esityksessä on lähinnä pistettä *P*, jonka koordinaatit ovat (3,4)?

40. Säännöllisen kuusikulmion, jonka sivut ovat yksikön pituisia, sisällä on mielivaltainen piste, joka heijastuu jokaisen kuusikulmion sivun keskipisteen kautta. Määritä näin syntyneen uuden kuusikulmion ala.

41. Etsi se suora, joka puolittaa ”Egyptin” kolmion (jonka sivut ovat 3,4 ja 5) alan sekä ympärysmitan.

42. Kolme yksikköympyrää kulkevat kaikki saman pisteen *P* kautta. Ympyröiden muut leikkauspisteet ovat *A*, *B* ja *C*. Määrittele kolmion *ABC* ympäri piirretyn ympyrän säde.

43. Rakennamme ison kiinteän kuution puisista kuutioista, joiden särmät ovat yksikön pituisia. Puisia kuutioita käytetään enemmän kuin kymmenen. Sitten maalaamme ison kuution pinnat. Onko mahdollista, että niiden yksikkökuutioiden, joiden jokin sivu on maalattu, lukumäärä on maalaamattomien yksikkökuutioiden lukumäärän tekijä?

44. Kolmiossa *ABC A* on tylppä kulma. Olkoon *D* mielivaltainen piste sivulla *AB* ja olkoon *E* mielivaltainen piste sivulla *AC*. Näytä, että *CD* + *BE* > *BD* + *DE* + *EC*.

45. Määrittele kuution, jonka särmät ovat yksikön pituisia, kahden vierekkäisen tahkon lävistäjän (eivät leikkaa toisiaan) etäisyys.

46. Konveksin monikulmion kolme sivua ovat pituudeltaan 1 cm, 4 cm ja 8 cm, ja sen lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan kohtaan. Kuinka pitkä on neljäs sivu?

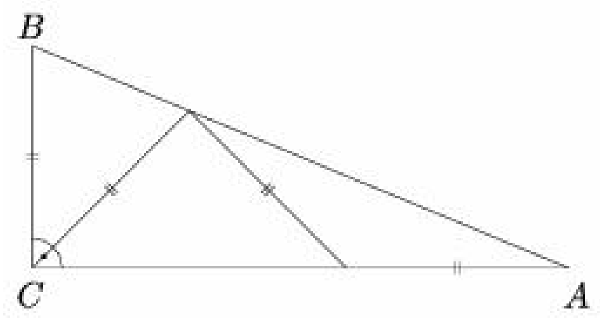
47. Karteesisessa tasossa on annettu pisteet *A*(2,1), *B*(3,4), *C*(2,11). Näytä, että jana *OB* puolittaa kulman *AOC*. *O* on origo.

48. Neliöpohjaisen säännöllisen pyramidin kannan särmät ja neliöpohjaisen säännöllisen pyramidin korkeus ovat kaikki 40 cm pituisia. Yhdistämme yhden kannan kärjistä kannan vastakkaiseen kärkeen viivalla, joka kulkee viistoja sivuja pitkin. Mikä on lyhyimmän reitin pituus?

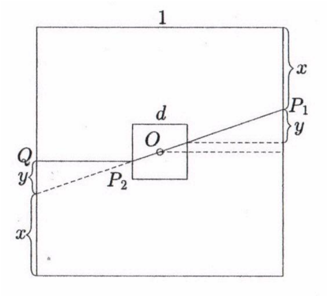
49. Onko olemassa kolmio, jonka mediaaneista muodostuva kolmio on samanlainen kuin alkuperäinen kolmio?

50. Nelikulmion *ABCD*, *AB* = *AC* = *DB*, lävistäjät ovat kohtisuorassa. Laske kulmien *ACB* ja *ADB* summa.

51. Määrittele suorakulmaisen kolmion terävät kulmat, kun tiedetään, että suorakulmainen kolmio voidaan jakaa kolmeen tasakylkiseen kolmioon, kuten kuvassa on esitetty.



52. Jerry, joka ui neliön muotoisessa altaassa, haluaa päästä karkuu Tomilta, joka ajaa häntä takaa. Tomi ei osaa uida ja juoksee hitaammin kuin Jerry, mutta juoksee neljä kertaa niin nopeasti kuin Jerry ui. Pääseekö Jerry aina karkuun?



Ratkaisu: Olkoon altaan sivu yksikön pituinen ja merkitään sen keskipistettä O:lla. Otetaan neliö, jonka keskipiste on myös O ja jonka sivun pituus on d, $1/5 < d < ¼$. Neliön sivut ovat yhdensuuntaisia altaan sivujen kanssa. Jerry pystyy uimaan pienemmän neliön ympäri nopeammin kuin Tomi pystyy juoksemaan altaan ympäri, koska Jerryn nopeus on neljännes Tomin nopeudesta, mutta kiinniotettava matka $4d$ on vähemmän kuin yksi neljännes uima-altaan ympärysmitasta. Jerryn uidessa pienemmän neliön ympäri hän pystyy saapumaan, Tomista katsottuna, pisteen O vastakkaiselle puolelle. Merkitään P_1:sellä Tomin sijaintia tällä hetkellä ja Jerryn sijaintia P_2:sella. Näytämme, että uimalla lähimpään altaan pisteeseen Q Jerry pääsee pakenemaan. Tällöin hänen tulisi uida välimatka $QP_2 = (1 - d)/2$. Merkitään x:llä etäisyyttä P_1:stä altaan lähimpää kulmaan. Nyt selvästi $x \leq ½$ ja $y:(½ - x) = (1 - d)/2:½$. Joten $y = ½ + xd - x - d/2$. Näin ollen Tomin lyhin reitti pisteeseen Q (riippuen sijainnista) on lyhyempi seuraavista $x + 1 + (1 - x - y) = 2 - x$ ja $(1 - x) + 1 + x + y = 2 + y$, t.s. $2 - y = 3/2 + d/2 + x(1 - d) \geq (3 + d)/2$. Koska $d > 1/5$, tämä on suurempi matka kuin Jerryn matka, joka on neljä kertaa $(1 - d)/2$, näin ollen Jerry pystyy pääsemään karkuun.

53. Suorakulmion yksi sivu on pituudeltaan 10 cm. Kuinka pitkä on sen toinen sivu, jos suorakulmio, jonka mitat ovat 10 cm x 1 cm, voidaan asettaa tämän lävistäjän paikalle?

54. P on piste kolmion ABC sisällä. Kolmion piiri on $2s$. Näytä, että $s < PA + PB + PC < 2s$.

55. Laske pinta-ala kolmiolle, joka muodostuu seuraavista suorista

$$x + y = 2005, \qquad \frac{x}{2005} + \frac{y}{2006} = 1, \qquad \frac{x}{2006} + \frac{y}{2005} = 1$$

56. Huoneen nurkassa on teline, jossa on kolme hyllyä, joiden mitat ovat 30 cm x 40 cm. Hyllyjen väliset etäisyydet ovat samat. Kolme hämähäkkiä istuvat pisteessä, jossa keskimmäinen hylly kohtaa molemmat seinät. Yksi näistä hämähäkeistä ryömii diagonaalisesti seinältä ylemmän hyllyn nurkkaan. Toinen hämähäkki ryömii diagonaalisesti toiselta seinältä alemman hyllyn nurkkaan. Kolmas hämähäkki jää paikoilleen sinne, missä olikin ja huomasi näkevänsä toverinsa 120° kulmassa. Määritä hyllyjen väliset (yhtä suuret) etäisyydet.

57. Suorakulmaisen särmiön särmien pituudet kulmasta A ovat 1, 2 ja 3. Kun näiden särmien toiset päätepisteet yhdistetään, niin saadaan kolmio. Määritä pisteen A etäisyys tasosta, jonka kolmio muodostaa.

58. Kattilaan, jonka halkaisija 36 cm, on asetettu kaksi hillopurkkia. Hillopurkkien säteet ovat 6 cm ja 12 cm. Mikä on kolmannen hillopurkin suurin mahdollinen säde, kun se asetetaan kattilaan näiden kahden purkin viereen?

59. Puolisuunnikkaan muotoisen tontin yhdensuuntaiset sivut ovat pituudeltaan 2100 metriä ja 1500 metriä. Kahden muun sivun pituudet ovat 613 metriä ja 37 metriä. Määritä tontin ala.

60. *P* on piste neliön *ABCD* sisällä siten, että $AP = 1$, $BP = 2$, $CP = 3$. Määritä etäisyys *DP*.

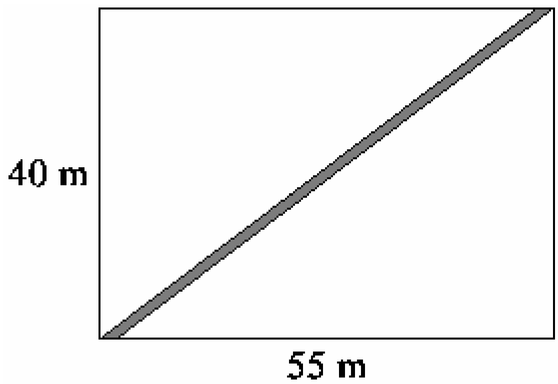
61. *D* jakaa tasasivuisen kolmion *ABC* kannan *AB* keskipisteessä. Olkoon *P* piste, joka jakaa suoran *CB* kohtisuorasti ja muodostaa suoran pisteen *D* kanssa ja olkoon *F* janan *DP* keskipiste. Määritä nelikulmion *AFPC* ala suorien *CF* ja *AP* pituuksilla.

62. Standardin pöytätennispallon läpimitta on 4 cm. Onko mahdollista pakata 100000 tälläista palloa laatikkoon, jonka mitat ovat 200 cm, 164 cm and 146 cm?

63. Kartion muotoinen astia, jonka huippupiste on alaspäin, on osittain täytetty vedellä siten, että veden pinta on 100 mm astian pohjan yläpuolella. Kun astia suljetaan ja käännetään ylösalaisin, veden syvyys on vain 20 mm. Määritä kartion korkeusjana.

64. Kolmiossa *ABC*, jonka ala on yksi, *D* ja *E* ovat pisteitä, jotka jakavat sivun *AB* kolmeen osaan. *F* on sivun *AC* keskipiste. Suorat *FE* ja *FD* leikkaavat suoran *CB* pisteissä *G* ja *H*. Määritä kolmion *FGH* ala.

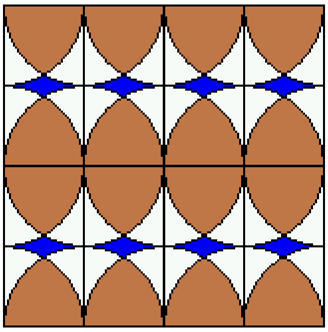
65. Suikale, joka on esitetty kuvassa, on 1 metrin levyinen. Laske sen ala.

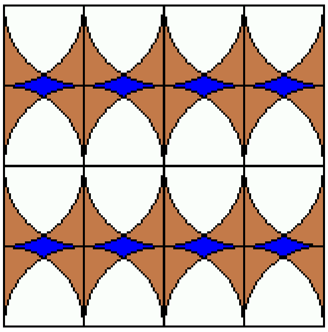


66. Ajattele konveksia kuusikulmiota, jonka sisällä on neljä erillistä pistettä siten, että mitkään kolme pistettä kuusikulmion kulmissa eivät ole edellämainittujen neljän kanssa samalla suoralla. Kuusikulmio on jaettu kolmioiksi siten, että niiden kärjet ovat kuusikulmion kulmat sekä nämä neljä annettua pistettä. (Kaikkia kymmentä pistettä on käytettävä.) Näytä, että muodostuvien kolmioiden lukumäärä on aina 12.

67. Konveksissa viisikulmiossa *ABCDE*, $\angle ABC = \angle CDE = 90°$, $BC = CD = AE = 1$, $AB + ED = 1$. Määrittele viisikulmion ala.

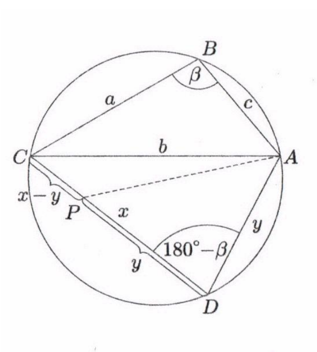
68. Keittiön lattia pitää uusia. Perheen kaksi lasta saavat päättää keraamisten kaakelien kuvioinnin. Toinen heistä pitää oikean puoleista esitystä parempana, kun taas toinen pitää enemmän vasemman puoleisesta esityksestä. Lopulta he päättävät valita sen vaihtoehdon, jossa on enemmän ruskeaa väriä. Kumman he valitsivat?





Geometrian tehtävät lukio-opetuksen jälkeen:

69. Ympyrän kehältä tiedetään kolme pistettä. Määritä neljäs piste siten, että nämä neljä pistettä määrittävät ympyröidyn nelikulmion.



Ratkaisu: Kolme annettua pistettä jakavat kehän kolmeen kaareen, joilla ei ole yhteisiä sisäpisteitä. Nämä kaarien sisäpisteet voidaan ottaa huomioon kuten ympyröidyn nelikulmion neljäskin piste. Näytämme, että on vain yksi sopiva piste jokaisessa kaaressa.

Valitse mikä tahansa kaari sattumanvaraisesti, olkoon tämän kaaren päätepisteet A ja C, ja kolmas annettu piste B. Neljäs piste D pitäisi löytyä valitulta kaarelta.

Merkitään $AD = y$ ja $CD = x$, $a + y = c + x$, eli $a - c = x - y$, koska konveksi nelikulmio voidaan ympyröidä, jos ja vain jos vastakkaisten sivujen summat ovat samat.

Jos $a > c$, niin $x > y$. (Kuvaaja näyttää tämän tapauksen.) Olkoon piste P janalla CD siten, että $PD = AD = y$, joten $PC = x - y = a - c$. Koska nelikulmio $ABCD$ on syklinen, $\angle PDA = 180° - \beta$, ja kolmio APD on tasakylkinen, niin $\angle PAD = \angle APD = \beta/2$.

Siis $\angle APC = 180° - \beta/2$. Näin ollen kulma, jonka muodostaa segmentti AC pisteelle P on $180° - \beta/2$, joten P sijaitsee segmentin AC kulman $180° - \beta/2$ kaarella. Samanaikaisesti $CP = a - c$, joten P on yhteinen piste yläpuolella olevalle kaarelle ja ympyrälle, jonka keskipiste on C ja säde $a - c$. Tämä leikkauspiste on on aina olemassa ja se on yksikäsitteisesti määritelty, koska säde (kuten $180° - \beta/2 > 180° - \beta$) on ympyröidyn ympyrän sisällä; ja $a - c$ on vähemmän kuin b kolmion ABC

epäyhtälön mukaan. Näin ollen piste P voidaan määritellä kuten myös piste D säteen CP ja alkuperäisen ympyrän leikkauksena.

Konstruktio on pitävä, sillä seurattuamme syklisen nelikulmion $ABCD$ edellisiä vaiheita, niin $c + CD = a + AD$. Näin ollen nelikulmio $ABCD$ on ympyröity, kuten haluttiin.

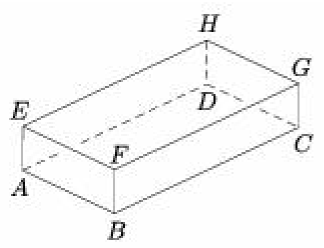
Jos $a = c$, niin silloin rikottu suora ABC yhdessä "sisäänpiirretyn" ympyrän kanssa on symmetrinen janan AC kohtisuoran puolittajan kanssa. Näin ollen tangenttisuorat, jotka on piirretty tälläiselle ympyrälle pisteestä C tai A, ovat toistensa peilikuvat, toisin sanoen suorat kohtaavat janan AC puolittajalla. Nelikulmio $ABCD$ on ympyröity, jos on olemassa ympyrä, joka koskettaa nelikulmion sivuja. Siitä seuraa, että piste D on janan AC kohtisuoralla puolittajalla ja tämän suoran ja ympyrän leikkaus tapahtuu pisteessä D. Tällä tavoin saamme leijan.

(Ei ole tarpeellista tarkistaa tilannetta $a < c$, koska jos nämä janat eivät ole yhteneviä, niin pidempää janaa voidaan merkitä a:lla.)

Kummassakaan tapauksessa emme käyttäneet kulmaa β. Molempien tapausten rakenne voidaan suorittaa millä tahansa mielivaltaisella kulmalla β, näin ollen alussa voidaan valita minkälainen kaari tahansa. On myös selvää, että on olemassa tasan yksi sopiva piste D jokaisella kaarella, joten on olemassa kolme ratkaisua jokaiselle annetulle pistekolmikolle.

70. Pisteet P, Q ja R sijaitsevat yhtälön $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidilla siten, että segmentit OP, OQ, ja OR ovat pareittain kohtisuorassa ja missä O tarkoittaa ellipsoidin keskipistettä. Todista, että tason PQR etäisyys O:sta on riippumaton pisteiden P, Q ja R sijainnista.

71. Kuvassa olevassa suorakulmaisessa särmiössä S on särmän EH keskipiste ja R särmän HG keskipiste ja Q särmän GF keskipiste. Todista, että kolmioilla ASR ja DRQ on yhtä suuret alat.



72. Kuusikulmiossa $ABCDEF$, $AB = BC$, $CD = DE$ ja $EF = FA$. Todista, että

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

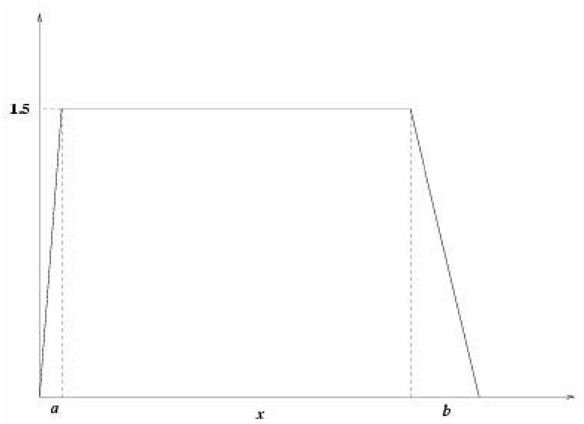
73. Olkoon P mikä tahansa kolmion ABC sisäpiste. Suorat AP ja BP leikkaavat kolmion vastaikkaiset sivut pisteissä D ja E. Todista, että $1/AP = 1/AD + 1/AC$, kun $AP = BP$ ja $BE = CE$.

Algebra:

Peruskoulun yläluokkatasoiset tehtävät:

74. Höyryveturi on menossa Zalakomarista Kanizsaan, joka on 21 kilometrin päässä. Matka kestää 16 minuuttia. Veturi kiihdyttää tasaisesti 90 kilometriin tunnissa ja sitten jatkaa tasaisella nopeudella ja sen jälkeen hidastaa tasaisesti loput matkasta. Kuinka kauan veturi ajaa tasaisella nopeudella?

Vihje: Alla oleva kuva voi helpottaa ratkaisua.



Lukiotasoiset tehtävät:

75. Positiiviset luvut a ja b toteuttavat yhtälön $34a = 43b$. Todista, että $a + b$ on suurempi kuin yksi, eikä ole alkuluku.

76. Ratkaise seuraava yhtälöryhmä reaalimuuttujalla t:

$x + y + z = t$
$x + (t + 1)y + z = 0$
$x + y - (t + 1)z = 2t$

77. Olkoon x ja y sellaiset kokonaisluvut, jotka toteuttavat yhtälön $4x + 5y = 7$. Etsi lausekkeen $5|x| - 3|y|$ pienin arvo.

Lukujonot ja sarjat:

Lukiotasoiset tehtävät:

78. Luvut 1,2,3,…,20 kirjoitetaan taululle. Pyyhitään mitkä tahansa kaksi lukua a ja b ja kirjoitetaan näiden paikalle lauseke $ab + a + b$. Toistetaan tämä menettely kaiken kaikkiaan 19 kertaa. Mikä luku jää lopuksi taululle?

79. Heinäsirkka, kulkusirkka ja kaskas istuvat pitkässä suorassa ojassa niin, että kulkusirkka on heinäsirkan vasemmalla puolella ja kaskas heinäsirkan oikealla puolella. Aika ajoin yksi heistä hyppää yhden naapurinsa ylitse ojassa. Onko mahdollista, että he istuvat alkuperäisessä järjestyksessä 1999 hypyn jälkeen?

80. Kokonaisluvut 1,…,1999 kirjoitetaan vierekkäin riviin. Määritä 1999:s numero rivissä.

81. Kellon minuutti-, tunti- ja sekuntiviisari ovat kaikki samalla akselilla. Ne peittävät toisensa kello kahdentoista kohdalla. Etsi seuraava kellonaika, jolloin kolme viisaria peittävät toisensa.

82. Etsi ne kolminumeroiset luvut, jotka ovat jaollisia 45:lla ja muodostavat aritmeettisen sarjan.

83. Etsi ne peräkkäiset kokonaisluvut, joiden summa on 100.

Lukion jälkeiseen opetukseen:

84. Todista, että millä tahansa kokonaisluvulla n on olemassa polynomi p, jonka aste on korkeintaan n ja jonka kertoimet ovat kaikki kokonaislukuja siten, että $p(x)$ on jaollinen $2n$:llä, kaikilla parillisilla kokonaisluvuilla x, ja $p(x) - 1$ on jaollinen $2n$:llä, kaikilla parittomilla kokonaisluvuilla x.

85. Positiivisten lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suurin yhteinen tekijä on 1. Kahdella näistä luvuista on sama pienin yhteinen moninkerta. Todista, että on olemassa kokonaisluku p siten, että jollakin kokonaisluvulla u on olemassa yksi luku p ja $p - u$, jotka voidaan esittää muodossa $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, käyttäen sopivia epänegatiivisia kokonaislukuja $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

86. n on positiivinen kokonaisluku siten, että $2n + 1$ ja $3n + 1$ ovat molemmat täydellisiä neliöitä. Todista, että n on jaollinen luvulla 40.

Joukko-oppi:

Lukiotasoiset tehtävät:

87. Joukossa *H* on *n* alkiota. Todista, että

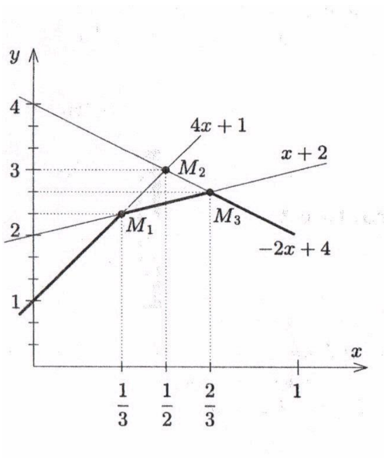
$$\sum_{A \subseteq H} \sum_{B \subseteq H} |A \cap B| = n \cdot 4^{n-1}.$$

Funktiot:

Lukiotasoiset tehtävät:

88. Kaikilla raaliluvuilla x, olkoon $f(x)$ funktioiden $4x + 1$, $x + 2$ ja $-2x + 4$ minimi. Mikä on funktion $f(x)$ suurin mahdollinen arvo?

Ratkaisu: Katsotaan kuvaajaa, jossa fuktiot on annettu karteesisessa tasossa.



Lasketaan suorien leikkauspisteiden koordinaatit:

$$y = 4x + 1$$
$$y = x + 2$$

Yhtälöparista saadaan leikkauspisteen koordinaatit, jotka ovat $M_1(1/3,7/3)$. Yhtälöparista

$$y = 4x + 1$$
$$y = -2x + 4$$

saadaan koordinaatit $M_2(½,3)$, ja suorien

$$y = x + 2$$
$$y = -2x + 4$$

leikkauspisteiden koordinaatit ovat $M_3(2/3,8/3)$. Suorien sijainti ja leikkauspisteet osoittavat, että leikkauspisteeseen M_1 saakka arvot saadaa funktiosta $4x + 1$, pisteiden M_1 ja M_3 välisen janan pisteet saadaan funktiosta $x + 2$ ja pisteen M_3 jälkeiset arvot saadaan funktiosta $-2x + 4$, joka on vähemmän kuin kahden edellisen.
Koska funktiot $4x + 1$ ja $x + 2$ ovat aidosti kasvavia ja funktio $-2x + 4$ on aidosti vähenevä, niin funktion $f(x)$ graafisen kuvaajan korkein piste on $M_3(2/3,8/3)$. Täten funktion suurin arvo on 8/3.

Lukion jälkeiseen opetukseen:

89. Etsi kaikki sellaiset jatkuvat funktiot $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, että

$$f(x + y + f(xy)) = xy + f(x + y)$$

kaikilla $x,y \in R$.

90. Määritä lukujen a, b ja c desimaalimuodot niin, että yhtälön $x^3+ax^2+bx+c = 0$ juuret ovat keskenään yhtäsuuret kuin yhtälön $x^3-3x+1 = 0$ juurien viidennet potenssit.

91. Neliön muotoinen pöytäliina on pyöreällä pöydällä siten, että niiden keskipisteet kohtaavat. Neliön ja ympyrän pinta-alat ovat samat. Minkä prosenttiosuuden pöytäliina peittää pöydästä?