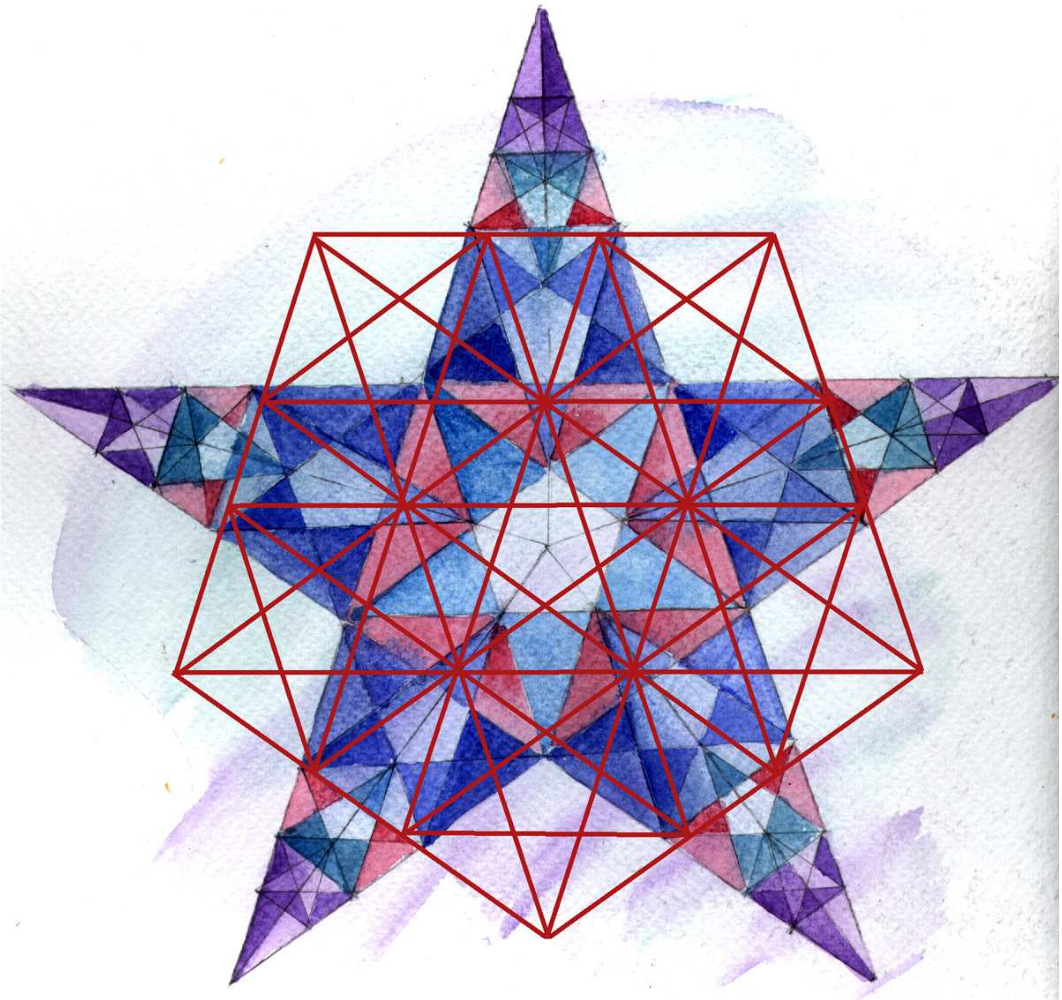
Solmu

Matematiikkalehti
3/2006

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 3/2006

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

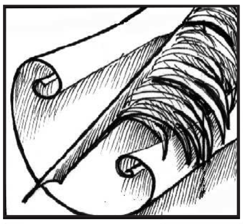
http://solmu.math.helsinki.fi/

Numeroon 1/2007 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään tammikuun 2007 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys



Ajatuksia matematiikasta, sen soveltamisesta ja opettamisesta

Lassi Päivärinta, professori, ja ***Marjatta Näätänen***, dosentti
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Aina silloin tällöin tulee esiin kysymys siitä, missä ja kenen toimesta matematiikan opettajien koulutus ammattiinsa tulisi järjestää. Yhtenäiseen peruskouluun siirtyminen on taas tuonut esiin vanhan ongelman siitä, onko opettajan parempi olla yleiskasvattaja vai opettamansa aineen asiantuntija.

Muutama vuosi sitten järjestettiin LUMA-projektiin kuuluva kolmen maan yliopisto-opetuksen arviointi. Hankkeeseen osallistuivat Suomi, Ruotsi ja Unkari, tarkoituksena oli arvioida opettajankoulutusta.

Unkari on perinteisesti tunnettu erinomaisena matematiikkamaana. Matematiikan opettajilla – ja heidän kouluttajillaan – on ollut vahva matematiikan pohja. Matematiikan didaktiikka on ollut oma arvostettu tieteenhaaransa, jolla on matematiikan erikoisesta luonteesta johtuvat erityispiirteensä. Kansainväliset vertailut ovat viime aikoina kuitenkin osoittaneet matematiikan osaamistason selvää laskua Unkarissa. Vielä vuonna 1991 IAEP-vertailussa Unkari ja Sveitsi olivat Euroopan parhaat maat, jotka eivät jääneet paljoa jälkeen Etelä-Koreasta ja Taiwanista. Viime vuosina on matematiikan oppitunteja Unkarissa vähennetty huomattavasti eikä matematiikan opettajiksi enää ole yhtä paljon halukkaita opiskelijoita. Pisa-tutkimuksessa kerätyn taustainformaation mukaan Unkari on maa, jossa yhteiskunnallisista, taloudellisista ja kulttuuritekijöistä johtuva hajonta eri koulujen välillä on suurimpia. Hajonta on kasvanut viime vuosina. Samanlainen koulutusjärjestelmän tason repeäminen on näkyvissä myös muissa ns. Itä-Euroopan maissa. Syynä ovat ensi sijassa resurssien leikkaukset.

Unkarilaisten perinteiselle matematiikan käyttö- ja soveltamistaidolla on arvostusta. Esimerkiksi Nokia, Ericsson ja General Electric ovat perustaneet tutkimuskeskuksia Unkariin. Suomessakin on satoja unkarilaisia Nokialla töissä. Unkarin koulutusjärjestelmä on myös onnistunut, jos yhtenä pyrkimyksenä on, että ainakin joku sen kasvateista saa korkeita tunnustuksia; Nobelin palkintoja on kahdeksan matemaattista pohjaa vaativissa luonnon- ja taloustieteissä.

Unkarin nykysuuntaus tarjoaa varottavan esimerkin Suomelle siitä, miten helppoa ja nopeaa on päästä eroon korkeasta tasosta.

Suomessa matematiikan aineenopettajankoulutuksesta vastaavat yliopistojen ainelaitokset, käytännössä matematiikan laitokset, kun taas Ruotsissa opettajankoulutuslaitokset. *Lassi Päivärinta* kirjoitti opetusministeri-

Pääkirjoitus

ölle toimittamassaan Lundin yliopistoa koskevassa arvioinnissa, että hän pitää Ruotsin käytäntöä ongelmallisena. Ruotsin mallissa opettajaksi opiskelevan yhteys matematiikan nykypäivän tilaan ja erityisesti sen uusiin merkittäviin sovelluksiin katkeaa kokonaan.

Matematiikan sovellusten merkitys

Matematiikan sovellusten kirjo on viimeisten parin vuosikymmenen aikana räjähdysmäisesti laajentunut. Vain uusimman tutkimuksen mukana pysyvät ainelaitokset voivat antaa opettajiksi valmistuville edes vihjauksen siitä, mihin kaikkiin ongelmiin matematiikkaa voidaan tänä päivänä soveltaa. Opettajat, joilla on tätä informaatiota, voivat välittää uutta tietoa oppilailleen ja samalla merkittävästi lisätä oppilaan motivaatiota opetella teoreettisia käsitteitä ja työkaluja. On selvää, että uusin kehitys erityisesti sovelletussa matematiikassa luo myös aivan uusia haasteita yliopisto-opetuksessa, pari esimerkkiä tästä Lassi Päivärinnan tutkimusalueelta:

Mikrokosmos ja makrokosmos

Ihmisen ikiaikaisiin toiveisiin on kuulunut nähdä kauas ja syvälle – nähdä esineiden ja asioiden sisälle. Mikroskoopin ja kaukoputken keksiminen avasi ihmiselle kaksi uutta maailmaa – mikrokosmoksen ja makrokosmoksen. Tietokonetomografia, magneettikuvaus ovat mullistaneet lääketieteellisen diagnostiikan. Toisin kuin mikroskooppi ja kaukoputki nämä uudet laitteet eivät perustu enää suoraan havaintoon vaan mittauksiin ja matemaattisiin teorioihin; niissä kaikissa on kysymys ns. käänteisistä eli inversio-ongelmista.

Inversio-ongelmat

Ongelmaa nimitetään suoraksi, jos siinä edetään luonnonlakien mukaisesti syistä seurauksiin ja tehdään ennusteita, kun lähtökohta tunnetaan. Inversio-ongelmissa edetään toiseen suuntaan: inversio-ongelmassa tehdään mittauksia, joiden avulla pyritään selvittämään, "näkemään", tuntemattomat kohteet. Tämä vaatii aivan uudenlaisen matematiikan kehittämistä.

Ensimmäinen esimerkki on edellä mainittu tietokonetomografia. Siinä kohdetta valaistaan useista suunnasta tulevilla röntgensäteillä ja mitataan kohteen läpi tulleiden säteiden voimakkuudet. Tästä tiedosta tulee määrätä kohteen rakenne. Ongelma johtaa matemaattiseen kysymykseen, jonka itävaltalainen *Johann Radon* (1887–1956) ratkaisi jo vuonna 1917. Tämä on yksi monista esimerkeistä siitä, miten hyödyttömältä näyttävä puhtaan matematiikan tutkimustyö johtaa myöhemmin välittömään käytännön hyötyyn.

Impedanssitomografia

Keuhkoveritulppa on esimerkiksi leikkausten yhteydessä esiintyvä yleinen ja usein vaarallinen jälkiseuraus. Valitettavasti nykyinen diagnostinen menetelmä on monimutkainen ja perustuu siihen, että potilas ensin hengittää radioaktiivista kaasua. Sen jälkeen vereen ruiskutetaan vielä radioaktiivista nestettä. Tällä menetelmällä saadaan kuva niistä osista keuhkoja, joissa veri kiertää ja toisaalta hengitysilma kiertää. Alueet, joissa ilma kulkee, muttei veri, viittaavat veritulppaan.

Toinen tapa määrittää kaasun ja veren virtaus keuhkoissa on pyrkiä ulkoisin mittauksin määräämään (ajasta riippuva) keuhkojen sähköinen johtavuusjakauma. Ilma, veri ja lihaskudos eroavat merkittävästi sähkönjohtavuudeltaan. Veressä on mm. hemoglobiinia, jossa on rautaa ja se on siten hyvin sähköä johtavaa. Menetelmän tällaisen tilanteen tutkimiseen tarjoaa sähköinen impedanssitomografia.

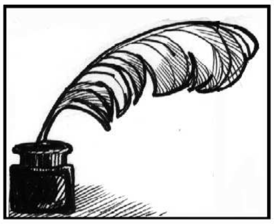
Matematiikan opetuksesta

Länsimaissa on matematiikan opetuksessa tällä hetkellä voimakkaana suuntauksena ongelmanratkaisu. Tämän suuntauksen soveltamisessa on mielestämme suurena vaarana, etteivät ongelmat liity toisiinsa eikä näin siis konstruoida matematiikan rakennetta. Vaarana voi olla, että hypitään aiheesta toiseen. Yksittäinen ongelma voi olla sinänsä mielenkiintoinen ja sopia hyvin vaikka kilpailutehtäväksi. Tällöin oppilaalla on kylliksi aikaa miettiä ongelmaa.

Keskeisen näkökohdan matematiikan opetuksessa muodostavat matematiikan sisäiset ja muihin oppiaineisiin liittyvät yhteydet. Näiden, sekä matematiikan sovellusten tunteminen on opettajalle erittäin tärkeää, jotta hän voi perustella matematiikan merkitystä ja herättää oppilaiden mielenkiintoa ainetta kohtaan.

Miten voimme taata, että Suomi pysyy mukana kehityksessä ja kenties jollain alalla jopa tieteen eturintamassa? Koulutuksen tason säilyttäminen on välttämätön edellytys, opettajankoulutus ja koulujen toimintaedellytysten turvaaminen ovat avainasemassa. Emme näe matematiikan opettajan koulutuspaikaksi muuta vaihtoehtoa kuin matematiikan kehityksen ja tutkimuksen tasalla pysyttelemään pyrkivät ainelaitokset.

Pääkirjoitus



Matematiikkaa soveltamassa

Solmun tämänkertaisen numeron useissa kirjoituksissa toistuva teema on matematiikan soveltaminen. Pääkirjoituksessa tuodaan esille matematiikan sovellusten tuntemisen tärkeys opettajan työssä. Ajanvietteeksi tarkoitettujen Survo-ristikoiden ratkaiseminen edellyttää kärsivällisyyden lisäksi selkeää matemaattista ajattelua, ja Survo-ristikoiden laadinnassa matemaattiset ohjelmistot ovat korvaamaton apuväline. Maailman korkeimman vuoren selvittäminen vaatii korkeampaa matematiikkaa ja vesistöjen tulvahuippujen ennustaminen matemaattisia malleja, kuten voitte lukea *Pekka Alestalon* ja *Ari Koistisen* kirjoituksista.

Koska modernia matematiikkaa ja sen menetelmiä ei voi edes tyydyttävästi omaksua lyhyessä ajassa, muut tieteenalat ja muuten ulkopuoliset tahot voivat nähdä matematiikan arvon usein vain sovellusten kautta. Matematiikalle ja sen opetukselle onkin erittäin tärkeää, että kuka tahansa voi saada kosketuksen matematiikkaan itselleen tuttujen asioiden kautta.

On kuitenkin huolehdittava myös siitä, ettei suurelle yleisölle pääse syntymään väärää mielikuvaa matematiikasta pelkkänä soveltamisena. Historia on osoittanut, että kauniille ja puhtaille teorioille löytyy usein yllättäviä ja ennalta arvaamattomia sovelluksia, sellaisiakin, joita teorioiden kehittäjät eivät ole voineet mitenkään kuvitella (kuten vaikkapa lukuteorian käyttö salausalgoritmeissa). *Timo Erkaman* kirjoitus ”Fermat'n jälkeen” on mainio esimerkki aiheesta, johon ei ensimmäiseksi tule liittäneeksi vaatimuksia arkielämään soveltamisesta.

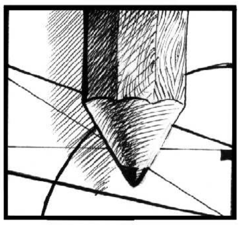
* * *

Viime viikkoina on sanomalehtien mielipideosastoilla ollut useita kirjoituksia lahjakkaiden opetuksen järjestämisestä. Omakohtaisen kokemuksen kautta hyvin perustellun kannanoton aiheesta esitti Espoon Olarin koulun ja lukion matematiikka- ja luonnontiedelinjan johtaja ja apulaisrehtori *Maija Flinkman* kirjoituksessaan ”Nopeimmin oppiville heidän lahjakkuuttaan tukevia ryhmiä” (HS 20.9.2006, http://solmu.math.helsinki.fi/2005/erik/MaijaF.html). Keskustelua ovat jatkaneet mm. professori *Kari Uusikylä* Helsingin yliopistosta (”Emme tarvitse omia kouluja lahjakkaita varten”, HS 26.9.2006) ja dosentti *George Malaty* Joensuun yliopistosta (”Matemaattisesti lahjakas lapsi kaipaa myös erityiskasvatusta”, HS 8.10.2006, http://solmu.math.helsinki.fi/2005/erik/GeorgeM.html).

European Council for High Ability (ECHA) järjesti vastikään Lahdessa kansainvälisen lahjakkuuskonferenssin, jonka puheenjohtaja professori *Kirsi Tirri* Helsingin yliopistosta mainitsee lahjakkuuden kiinnostavan, siitä kertoo konferenssin synnyttämä suuri artikkelimäärä. Konferenssin aiheisiin voi perehtyä verkkosivulla http://www.palmenia.helsinki.fi/congress/echa/ tai Opettaja-lehden 40/2006 (6.10.2006) artikkelista ”Lahjakkuutta on voitava tukea”.

Mika Koskenoja

Toimitussihteerin palsta



Maailman korkein vuori

Pekka Alestalo
Teknillinen korkeakoulu

Maailman korkein vuori on Mount Everest Nepalissa – kaikkihan sen tietävät. Korkeus 8 848 m ja sillä selvä. Olkoon niin – mutta millä perusteella?

Vuorten ja muun maanpinnan korkeutta mitataan yleisesti hyväksytyn periaatteen mukaisesti merenpinnan tasosta laskien. Määritelmän mukaan merenpinta on siis korkeudella 0 m. Mutta missä tämä kuuluisa merenpinnan taso oikein sijaitsee, ja mitä merkitystä sillä on vuorten korkeuteen? Kysymys ei ole aivan yksinkertainen, ja monille voi tulla yllätyksenä esimerkiksi se, ettei Mount Everestin huippu olekaan se Maan pinnan piste, joka on kauimpana Maan keskipisteestä!

Merenpinta

Missä siis sijaitsee merenpinnan taso? Hankala kysymys: merivirrat ja tuuli työntävät vettä epätasaisesti eri puolille Maapallon meriä, ne synnyttävät valtavia aaltoja, ja tilannetta sekoittaa vielä lisää joissakin paikoissa yli kymmenmetrinen vuoroveden vaihtelu. Lisäksi huomattava osa Maasta on merenpinnan yläpuolella, eikä merta ole kaikkialla edes näkyvissä.

Ongelman ydin ei kuitenkaan ole yllä mainituissa ilmiöissä, joiden vaikutus muutenkin on korkeintaan parikymmentä metriä. Merenpinnan korkeutta voidaan mitata eri puolilla maailmaa säännöllisin väliajoin, ja niistä keskiarvoja laskemalla satunnaisten (tuuli ja aallot) ja säännöllisten (merivirrat ja vuorovesi) ilmiöiden vaikutus voidaan melko hyvin poistaa. Näiden toimenpiteiden jälkeen paljastuu kuitenkin ongelman todellinen luonne: merenpinnan 0-tasoksi eri puolilla maailmaa saatuja pisteitä ei voi sijoittaa pallon pinnalle, mikä estää mm. jatkamasta merenpinnan tasoa yksinkertaisella tavalla mantereiden kohdalle. Vaikka merenpintaa yritettäisiin siitä huolimatta kuvata pallolla mahdollisimman hyvin (jossakin mielessä), niin osoittautuu, että tulos poikkeaa havainnoista jossakin päin meriä yli 10 km. Kun korkeimmatkin vuoret ovat alle 10 km ”korkeita”, ei näin suurta virhettä voida tietenkään hyväksyä.

Ellipsoidi

Tilanteen pelastaa pallon pintaa hieman monimutkaisempi kolmiulotteinen olio: ellipsoidi. Ellipsoidin kaksiulotteinen vastine on ellipsi, joka saadaan ympyrästä venyttämällä sitä tasaisesti kahteen toisiaan vastaan kohtisuoraan suuntaan. Jos siis lähdetään liikkeelle yksikköympyrästä

$$x^2 + y^2 = 1,$$

ja muuttujaa x venytetään kertoimella $a > 0$ ja vastaavasti muuttujaa y kertoimella $b > 0$, niin uusien muuttujien $X = ax$, $Y = by$ avulla lausuttuna ympyrän yhtälöstä saadaan ellipsin yhtälö

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Samaa periaatetta voidaan soveltaa yksikköpallon pintaan

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

joka siis esittää niiden pisteiden (x, y, z) joukkoa, joiden etäisyys origosta on täsmälleen 1. Venytysten $X = ax,\ Y = by,\ Z = cz$ jälkeen tuloksena on yhtälö

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

ja vastaava venytetty pallo on nimeltään ellipsoidi. Kertoimia a, b, c kutsutaan (ellipsiä mukaillen) puoliakseleiden pituuksiksi. Erikoistapauksessa $a = b$ kyseessä on pyörähdysellipsoidi, joka syntyy tavallisen xz-tason ellipsin (puoliakselien pituudet a ja c) pyörähtäessä z-akselin ympäri.

Osoittautuu, että nimenomaan pyörähdysellipsoidi kuvaa jossain mielessä parhaiten merenpinnan muotoa. Fysikaalinen syy liittyy tietysti Maan pyörimisliikkeeseen, mutta sen tutkiminen ei kuulu tämän kirjoituksen piiriin. Alkuperäinen tehtävämme–merenpinnan tason määrääminen–palautuu siihen, että on annettava mahdollisimman hyvin mittauksia vastaavat lukuarvot puoliakseleiden pituuksille a ja c sekä kiinnitettävä koordinaatisto. Merenpinnan taso on silloin, määritelmän mukaan, tämän ellipsoidin pinnalla, ja sitä kutsutaan *vertailuellipsoidiksi.* Tämäkään seikka ei ole aivan yksinkertainen; eri aikoina ja eri puolilla maailmaa on ollut käytössä monenlaisia valintoja näiden parametrien suhteen. Viime aikoina tilanne on kuitenkin standardisoitunut niin, että puoliakselin a pituudeksi on valittu $a = 6378{,}1370$ km ja toinen puoliakseli c määräytyy ellipsoidin litistyneisyydelle $f = 1 - c/a$ määrätystä arvosta $f = 1/297{,}257223563$. Tällöin siis

$$c = (1 - f)a \approx 6356{,}7523 \text{ km}.$$

Suomessakin siirryttiin äskettäin tämän standardin piiriin, mikä paransi mm. GPS-paikannuslaitteiden toimintatarkkuutta (tai ainakin helpotti tarkemman tuloksen määrittämistä).

Huomaamme joka tapauksessa, että puoliakseleiden pituudet erovat toisistaan yli 20 kilometrillä, joten napa-alueilla merenpinta on tämän verran lähempänä keskipistettä kuin päiväntasaajalla.

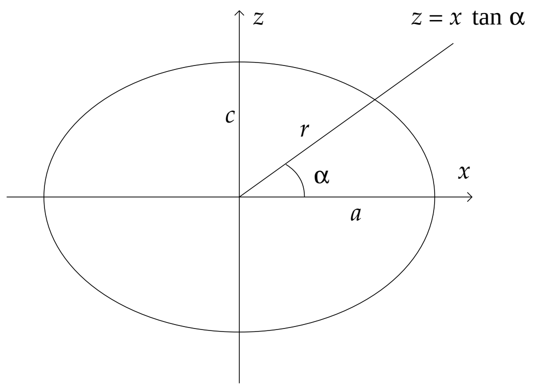
Korkeampaa matematiikkaa

Palataan maantieteeseen ja siihen, miten yllä oleva liittyy vuorten korkeuksiin. Haluamme erityisesti selvittää, mikä paikka Maapallolla on kauimpana keskipisteestä, ja onko se samalla myös korkeimmalla merenpinnasta. Vuorten korkeudet (merenpinnan tasosta!) löytyvät kartastoista, mutta etäisyydet keskipisteestä jodumme laskemaan itse.

Pyörähdyssymmetrian vuoksi tilanne palautuu kaksiulotteiseksi, ja laskemme aluksi, kuinka kaukana ellipsin piste on origosta, kun puoliakseleiden pituudet ovat a ja c, ja pisteen paikkavektori muodostaa x-akselin kanssa kulman α. Maapallon tapauksessa kulma α tarkoittaa päiväntasaajalta mitattua leveysastetta.

Tutkittava ellipsin piste (x, z) toteuttaa siis yhtälöparin

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = x \tan\alpha. \end{cases}$$



Jos rajoitumme symmetrian vuoksi tapaukseen $x \geq 0,\ z \geq 0$, niin yhtälölle saadaan yksikäsitteinen ratkaisu sijoittamalla z toisesta yhtälöstä ensimmäiseen. Tulokseksi saadaan

$$\begin{cases} x = x(\alpha) = \frac{ac}{\sqrt{c^2 + a^2\tan^2\alpha}} \\ z = z(\alpha) = \frac{ac\tan\alpha}{\sqrt{c^2 + a^2\tan^2\alpha}}. \end{cases}$$

Kyseisen pisteen etäisyys origosta on siis toiseen korotettuna

$$r(\alpha)^2 = x(\alpha)^2 + z(\alpha)^2 = \frac{a^2c^2(1 + \tan^2\alpha)}{c^2 + a^2\tan^2\alpha}.$$

Käyttämällä kaavaa $1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$ saadaan lopulta symmetriseltä näyttävä muoto

$$r(\alpha) = \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha}}.$$

Ja sitten vain laskemaan: Mount Everestille $\alpha = 27°59'$ N, joten sen huipun etäisyys keskipisteestä on suunnilleen (vrt. tehtävä 3 alla)

$$r(27{,}983°) + 8{,}848 \text{ km} \approx 6382{,}3 \text{ km}.$$

Tämän jälkeen herää kysymys, voisiko jonkin "matalamman", mutta lähempänä päiväntasaajaa sijaitsevan vuorenhuipun etäisyys olla yllä laskettua suurempi? Vastaus selviää vain kokeilemalla, ja esimerkiksi Equadorista löytyy Chimborazo-niminen vuori, jonka korkeus on 6 310 m ja leveysaste vain $1°27'$ S. Huipun etäisyys keskipisteestä on siis

$$r(1{,}450°) + 6{,}310 \text{ km} \approx 6384{,}4 \text{ km}.$$

Mutta tämähän on yli 2 km suurempi kuin Mount Everestin huipulle!

Lisätutkimukset eivät muuta enää tilannetta: maksimi saavutetaan Chimborazon kohdalla, ja tässä mielessä sekin on siis ansainnut maailman korkeimman vuoren nimen. Itse asiassa Himalajan alue oli vielä kaksisataa vuotta sitten niin huonosti tunnettu, että v. 1802 Chimborazon valloitusta yrittäneen tutkimusmatkailija *Alexander von Humboldtin* aikoihin sitä pidettiin maailman korkeimpana vuorena. Chimborazon huipun valloitti ensimmäisenä (eurooppalaisena) *Edward Whymper* v. 1880.

Chimborazo (*Heikki Apiola* 2006)

Tehtäviä

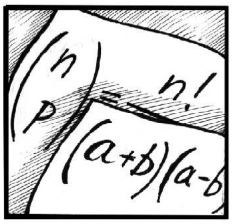
1. Kuinka paljon Haltin (1 328 m, 69°18′ N) etumatka kutistuu esim. Taivaskeroon (807 m, 68°04′ N) verrattuna, jos tarkastellaan huippujen etäisyyttä Maan keskipisteestä?

2. Vertaa Kilimanjaron (5 895 m, 3°04′ S) huipun etäisyyttä Chimborazon ja Mount Everestin arvoihin.

3. Kuinka paljon merenpinnan taso lähestyy Maan keskipistettä, kun siirrytään yksi aste pohjoiseen a) päiväntasaajalta; b) Helsingistä (n. 60° N)?

4. (Vaikeampi?) Vuorten korkeus mitataan kohtisuoraan vertailuellipsoidin pinnasta, mutta Maan keskipisteestä vertailuellipsoidille tuleva jana ei ole kohtisuorassa ellipsoidia vastaan muualla kuin navoilla ja päiväntasaajalla. Tämän vuoksi yllä lasketut etäisyyksien summat olisi pitänyt käsitellä tarkemmin kolmioiden avulla. Osoita esim. Mount Everestin tapauksessa, etteivät tulokset poikkea olennaisesti toisistaan.

5. (Pohdiskelua) Kun vuorikiipeilijöiden tavoitteena on kiivetä mahdollisimman korkeille (merenpinnasta mitattuna) vuorille, niin eikö liikkeelle pitäisi myös lähteä kävellen meren rannalta? Onko Base Camp -kiipeily moraalisesti arveluttavaa?



Fermat'n jälkeen

Timo Erkama
Professori
Fysiikan ja matematiikan laitos, Joensuun yliopisto
`Timo.Erkama@joensuu.fi`

Tieteen popularisointi on joskus vaikeaa, ja matematiikassa se on erityisen vaikeaa. Modernin matematiikan kieli on nimittäin siinä määrin mutkikasta, että alan ammattilaistenkaan ei ole aina helppoa ymmärtää toistensa tutkimustuloksia.

Silloin tällöin pääsevät tiedotusvälineet kuitenkin selostamaan yleisölle sellaista uutta matematiikkaa, jossa ainakin kysymyksenasettelun käsittämiseen riittävät pelkät peruskoulutiedot. Esimerkiksi viime vuosikymmenellä herätti laajaa huomiota ns. Fermat'n suuren lauseen todistus, jonka mukaan yhtälöllä

$$a^n + b^n = c^n \tag{1}$$

voi olla positiivisia kokonaislukuratkaisuja vain jos $n \leq 2$. Tapaus $n = 2$ liittyy Pythagoraan lauseeseen, jonka yhteydessä moni koululainen on tullut tarkastelleeksi suorakulmaista kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat kokonaisluvut 3, 4 ja 5; tällöinhän yhtälö (1) toteutuu muodossa $3^2 + 4^2 = 5^2$. Sen sijaan kysymys positiivisten kokonaislukuratkaisujen olemassaolosta arvoilla $n \geq 3$ oli askarruttanut matemaatikkoja yli 300 vuotta, kunnes mm. algebrallisessa geometriassa saavutettujen edistysaskelten ansiosta tämä jo 1600-luvulla esitetty ongelma lopulta ratkesi.

Ongelman esittäjä ranskalainen Pierre de Fermat (1601–1665) oli matemaatikkona oikeastaan harrastelija, koska hän ansaitsi toimeentulonsa laki- ja virkamiehenä. Hänen jälkeensä sadat harrastelijat ovat turhaan yrittäneet keksiä ongelmalle sellaista "ihmeellistä" ratkaisua, jonka jo Fermat kirjoitti löytäneensä mutta jota ei ole säilynyt jälkipolville. Into tällaisen alkeellisen ratkaisun hakemiseen saattaa tosin olla hiipumassa, koska itse ongelmaa pidetään nykyään jo ratkaistuna. Sen vuoksi haluaisin tässä esitellä hypoteesin, joka on edelleen todistamatta mutta joka monessa suhteessa muistuttaa Fermat'n ongelmaa tarjoamalla haasteen myös amatööreille.

Olkoon $P(x) = x^2 + r$ toisen asteen polynomi, missä vakiotermi r on jokin reaaliluku. Merkitään yhdistettyä kuvausta $P \circ P$ symbolilla $P^{(2)}$, kuvausta $P \circ P \circ P$ symbolilla $P^{(3)}$ jne; siis $P^{(2)}(x) = (x^2 + r)^2 + r$ on neljännen asteen, $P^{(3)}(x) = ((x^2 + r)^2 + r)^2 + r$ kahdeksannen asteen polynomi jne.

Lukusuoran piste x on polynomin P *jaksollinen piste*, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $P^{(n)}(x) = x$. Pienintä tällaista kokonaislukua n kutsutaan x:n *jaksoksi*, jolloin lukujen x, $P(x)$, $P^{(2)}(x), \dots,$ $P^{(n-1)}(x)$ joukko on P:n n-*sykli*.

Esimerkiksi luku 0 on polynomin $P(x) = x^2 - 1$ jaksollinen piste, sillä $P(0) = -1$ ja $P(-1) = 0$. Siis luvut 0 ja -1 muodostavat polynomin P 2-syklin. Vastaavasti luvut $\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{4}$ ja $-\frac{7}{4}$ muodostavat polynomin

$P(x) = x^2 - \frac{29}{16}$ 3-syklin, sillä $P(\frac{5}{4}) = -\frac{1}{4}$, $P(-\frac{1}{4}) = -\frac{7}{4}$ ja $P(-\frac{7}{4}) = \frac{5}{4}$.

Näissä kahdessa esimerkissä syklin kaikki pisteet olivat rationaalilukuja, siis muotoa $\frac{p}{q}$ missä p ja q ovat kokonaislukuja. Tällaista sykliä kutsutaan *rationaaliseksi* sykliksi. Avoin ongelmamme kuuluu nyt seuraavasti.

Hypoteesi 1. Polynomilla $P(x) = x^2 + r$ ei ole rationaalisia n-syklejä, jos $n \geq 4$.

Tämä hypoteesi on toistaiseksi todistettu vain arvoilla $n = 4$ ja $n = 5$. Todistukset julkaistiin viime vuosikymmenen lopulla, ja varsinkin arvolla $n = 5$ käytetyt menetelmät olivat syvällisiä.

Miten sitten matematiikan harrastelija voisi lähestyä tämänkaltaista ongelmaa? Esimerkin tarjoaa seuraava lause, joka puolestaan on erikoistapaus eräästä lukiolaisten matematiikkaolympialaisten tehtävästä. Lukijamme voi kokeilla matemaattisia kynsiään etsimällä lauseelle omaa todistustaan ennen kuin lukee kirjoitusta eteenpäin.

Lause 1. Polynomilla $P(x) = x^2 + r$ voi olla kokonaisluvuista koostuva n-sykli vain, jos $n \leq 2$.

Todistus. Olkoon $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ polynomin P n-sykli siten, että $P(x_0) = x_1$, $P(x_1) = x_2$, …, $P(x_{n-1}) = x_0$ ovat kokonaislukuja. Voidaan olettaa, että $n \geq 2$, jolloin $x_1 - x_0 \neq 0$. Silloin

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= x_1^2 + r - (x_0^2 + r) = (x_1 + x_0)(x_1 - x_0) \neq 0, \\ x_3 - x_2 &= x_2^2 + r - (x_1^2 + r) = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) \neq 0 \end{aligned}$$

jne. Huomataan siis, että $x_2 - x_1 = m_1(x_1 - x_0)$, missä $m_1 = x_1 + x_0$ on kokonaisluku, $x_3 - x_2 = m_2(x_2 - x_1)$, missä $m_2 = x_2 + x_1$ on kokonaisluku jne. Kertomalla nämä yhtälöt puolittain saadaan

$$\begin{aligned} &(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_0 - x_{n-1})(x_1 - x_0) \\ &= m_1 m_2 \cdots m_n (x_1 - x_0)(x_2 - x_1) \cdots (x_0 - x_{n-1}), \end{aligned}$$

ja supistusten jälkeen $m_1 m_2 \cdots m_n = 1$. Koska $m_1, \ldots, m_n$ ovat kokonaislukuja, tämä on mahdollista vain jos $m_i = \pm 1$ kaikille i. Lisäksi jollakin i:n arvolla tulee olla $m_i = -1$, sillä muuten luvut $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0$ muodostaisivat *aritmeettisen jonon*, jossa peräkkäisten lukujen erotus on vakio. Tällaisen kasvavan tai vähenevän jonon ensimmäinen ja viimeinen luku eivät tietenkään voi olla samoja. Siis jollakin i:n arvolla $m_i = -1$, josta seuraa $x_{i+1} - x_i = -(x_i - x_{i-1})$ ja edelleen $x_{i+1} = x_{i-1}$. Kysymyksessä on siis 2-sykli. □

Vaativamman haasteen amatöörille tarjoaa seuraava aiemmin julkaisematon lause, jonka todistus on liian pitkä tässä esitettäväksi.

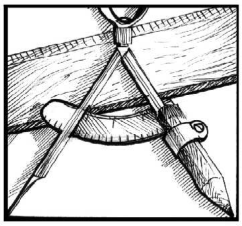
Lause 2. Olkoon $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ polynomin $P(x) = x^2 + r$ rationaalinen n-sykli. Silloin on olemassa kokonaisluvut $p_0, \ldots, p_{n-1}$ ja q siten, että millään kahdella näistä kokonaisluvuista ei ole yhteisiä alkutekijöitä ja $x_i = p_i/q$ kaikille $i = 0, \ldots, n-1$.

Mitä yhteistä sitten on hypoteesilla 1 ja Fermat'n probleemalla? *Algebrallisella käyrällä* tarkoitetaan sellaista tason pistejoukkoa, jonka muodostavat jonkin kahden muuttujan polynomin $Q(x, y)$ nollakohdat. Esimerkiksi yksikköympyrä on algebrallinen käyrä, sillä se koostuu polynomin $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ nollakohdista. Samoin koulusta tutut ellipsi, paraabeli ja hyperbeli ovat tällaisia algebrallisia käyriä; polynomia $Q(x, y) = x^2 - y$ vastaa paraabeli $y = x^2$ jne. Algebrallisen käyrän pistettä (x, y) sanotaan *rationaaliseksi* pisteeksi, jos sen koordinaatit ovat rationaalilukuja.

Fermat'n ongelmassa on oikeastaan kysymys polynomin $Q(x, y) = x^n + y^n - 1$ määräämän algebrallisen käyrän rationaalisten pisteiden etsimisestä: jokainen yhtälön (1) positiivisista kokonaisluvuista koostuva ratkaisu määrittelee nimittäin tällaisen rationaalisen pisteen $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$. Tapauksessa $n = 2$ rationaalisia pisteitä löytyy ääretön määrä, ja ne sijaitsevat kaikki yksikköympyrän kehällä. Myös arvoilla $n \geq 3$ löytyy rationaalisia pisteitä x- ja y-akseleilta, mutta niistä ei saada yhtälölle (1) positiivista kokonaislukuratkaisua.

Hypoteesissa 1 puolestaan etsitään rationaalisia pisteitä polynomin $Q(x, r) = P^{(n)}(x) - x$ määräämälle algebralliselle käyrälle, missä muuttujan y paikalla on nyt polynomin P vakiotermi r. Tehtävä näyttää aluksi hankalammalta kuin Fermat'n probleema, sillä suurilla n:n arvoilla polynomin $P^{(n)}(x)$ lauseke on monimutkainen. Ongelman tarkempi analyysi paljastaa kuitenkin rakenteita, joiden systemaattinen tutkiminen on vasta alussa ja saattaa johtaa edistysaskeliin muillakin matematiikan tai sovelletun matematiikan osa-alueilla.

Tulevaisuus näyttää, tarvitaanko hypoteesin 1 ratkaisemiseen vielä 300 vuotta ja osallistuuko siihen kenties joku tämän lehden lukijoista.



Hypetystä

Matti Lehtinen
Dosentti
Maanpuolustuskorkeakoulu

Funktiolaskimissa, esimerkiksi omistamassani korruptiolahjassa, lähes kymmenen vuotta vanhassa ja uutena vain noin 50 markan arvoisessa Shrap EL-531:ssä, on näppäin, joka on merkitty hyp. Kun sitä painaa ennen trigonometristen funktioiden sin, cos tai tan näppäilyä, saa näytölle lukuja, jotka selvästikään eivät ole trigonometristen funktioiden arvoja. Esimerkiksi näppäily "hyp", "sin", "π" tuottaa näytölle luvun 11,55, joka ei ainakaan ole $\sin(\pi)$.

Määritelmät

"Hyp-funktiot" ovat *hyperbolisia funktioita*. Niiden nimet ovat trigonometristen funktioiden kaltaisia, eteen vain laitetaan sana *hyperbolinen*. Funktiot eivät ole mitenkään eksoottisia. Itse asiassa nimitykset ovat turhia, sillä hyperbolisten funktioiden sijasta voidaan aina käyttää eksponenttifunktiota $x \mapsto e^x$ eli $\exp(x)$. Hyperbolisen sinin, kosinin ja tangentin eli funktiot sinh, cosh ja tanh määrittelevät kaavat

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right),$$
$$\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

– Jos hienostella halutaan, funktioden nimet voidaan lukea latinaksi: *sinus hyperbolicus*, *cosinus hyperbolicus*, mutta *tangens hyperbolica*. Latinassa adjektiivin muodon määrää pääsanan suku, ja *tangens* sattuu olemaan feminiini.

Käänteisfunktiot

Määrittelykaavoista voidaan heti tehdä muutama havainto. $\sinh x$ on pariton ja $\cosh x$ parillinen funktio: $\sinh(-x) = -\sinh x$ ja $\cosh(-x) = \cosh x$. Koska

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right)^2 + 2\right),$$

$\cosh x \geq 1$ kaikilla x. Jos $0 \leq x < y$, niin $2(\sinh y - \sinh x) = (e^y - e^x) + (e^{-x} - e^{-y})$. Koska eksponenttifunktio on kasvava, niin sinh on kasvava funktio positiivisten lukujen joukossa ja parittomuutensa takia koko reaalilukujen joukossa.

Jos edelleen oletetaan $0 \leq x < y$, voidaan laskea

$$\begin{aligned} 2(\cosh y - \cosh x) &= e^y - e^x + e^{-y} - e^{-x} \\ &= (1 - e^{-(x+y)})(e^y - e^x) > 0, \end{aligned}$$

koska $e^{-(x+y)} < 1$, kun $x + y > 0$. Funktio cosh on siis kasvava positiivisten lukujen joukossa. tanh-funktion määrittelykaavasta nähdään heti, että funktio on kasvava ja että $-1 < \tanh x < 1$ kaikilla x. Näistä havainnoista seuraa, että funktioilla sinh ja tanh on käänteisfunktiot ja että ei-negatiivisten lukujen joukkoon rajoitetulla cosh-funktiolla on käänteisfunktio.

Käänteisfunktioiden lausekkeet saadaan ratkaisemalla yhtälöt

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Yhtälöistä ensimmäinen sievenee muotoon

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Yhtälö on tuntemattoman e^x toisen asteen yhtälö. Ratkaisukaavan mukaan on siis

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Koska $e^x > 0$, vain +-merkki tulee kyseeseen. Yhtälön $y = \sinh x$ ratkaisu on siis

$$x = \ln\left(y + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Yhtälö

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad y \geq 1$$

on vastaavasti sama kuin

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava antaa nyt

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$

Olemme kiinnostuneita ratkaisuista, joissa $x \geq 0$ eli $e^x \geq 1$. Koska $(y + \sqrt{y^2-1})(y - \sqrt{y^2-1}) = y^2 - (y^2-1) = 1$, vain +-merkillä varustettu juuri voi olla ≥ 1 (jos $x > 0$). Valitsemme siis sen ja toteamme, että yhtälön $y = \cosh x$, $y \geq 1$, positiivinen ratkaisu on

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

Viimein saamme samoin toisen asteen yhtälöä ratkaisemalla, että yhtälön $y = \tanh x$, $-1 < y < 1$, ratkaisu on

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan *areafunktioiksi*. Niiden vakiintuneet merkinnät ovat $\operatorname{arsinh} y$, $\operatorname{arcosh} y$ ja $\operatorname{artanh} y$. Näissä "ar" ei ole "arkus", kuten trigonometristen funktioiden arcsin, arccos ja arctan nimissä, vaan "area". Tosin tietämättömyyteen perustuvia merkintöjä "arcsinh" jne. näkee. Niin on kirjoitettu Sharp-laskimenikin kanteen. Funktioiden nimet voi lukea *areasini*, *areakosini*, *areatangentti*, tai sitten puhua latinaa: *area sinus hyperbolicus* jne.

Kysymyksiä ja vastauksia

Teemme nyt kolme yksinkertaista kysymystä. Miksi tarkastelemillamme eksponentti- ja logaritmifunktioista rakentuvilla funktioilla on trigonometristen funktioiden nimien kaltaiset nimet, miksi niitä kutsutaan hyperbolisiksi ja miksi niiden käänteisfunktioiden nimissä esiintyy sana area eli ala?

Ensimmäiseen kysymykseen voi vastata katsomalla analogisia kaavoja. Tiedämme, että $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ja $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Mitä on $\sinh(x+y)$? Se on

$$\frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}).$$

Mitä on $\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$? Se on

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\Big((e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^y - e^{-y})(e^x + e^{-x})\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}\\ &\qquad + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\Big).\end{aligned}$$

Siis $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$. Vastaavasti $\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{1}{4}\Big((e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^{x+y} + e^{-(x+y)}\Big) = \cosh(x+y)$. Tarkkaan katsoen huomaamme, että sinh-funktion ja sin-funktion yhteenlaskukaavat ovat aivan samanlaiset, mutta cosh-funktion yhteenlaskukaavassa on pieni ero cos-funktion vastaavaan. Tämä on tyypillistä. Hyperbolisten funktioiden kesken vallitsevat relaatiot ovat yleensä merkkieroja vaille samoja kuin vastaavat trigonometristen funktioiden väliset relaatiot.

Kysymyksiemme kannalta keskeinen "melkein trigonometrinen" relaatio on Pythagoraan lauseen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ vastine. Koska

$$\cosh^2 t = \frac{1}{4}\Big(e^{2t} + e^{-2t} + 2\Big) \text{ ja } \sinh^2 t = \frac{1}{4}\Big(e^{2t} + e^{-2t} - 2\Big),$$

"hyperbolinen Pythagoraan kaava" on

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Kun sovellamme hyperbolisen kosinin yhteenlaskukaavaa, saamme

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Kun tähän liitetään hyperbolinen Pythagoraan lause, saadaan $\cosh(2x) = 1 + 2\sinh^2 x$ ja jatkon kannalta tarpeellinen kaava

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}\Big(\cosh(2x) - 1\Big).$$

Vielä yksinkertaisempi hyperbolisen sinin yhteenlaskukaavan sovellus antaa $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$.

Trigonometrinen Pythagoraan lause on yhteydessä trigonometristen funktioiden määrittelyyn yksikköympyrän avulla: jos $x = \cos t$ ja $y = \sin t$, niin $x^2 + y^2 = 1$. Näinhän voidaan määritellä $\sin t$ ja $\cos t$ sen yksikköympyrän pisteen koordinaatteina, joka syntyy, kun origosta lähtevä ja x-akselin suhteen kulman t muodostava puolisäde leikkaa yksikköympyrän. Yksikköympyrä on erikoistapaus muotoa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olevasta ellipsikäyrästä. Mutta tunnetusti

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on hyperbelikäyrän yhtälö. Kun tässä valitaan $a = b = 1$, saadaan *tasasivuinen hyperbeli*, jonka yhtälö on siis

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Mutta kun merkitään $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, huomataan hyperbolisesta Pythagoraan kaavasta, että $(\cosh t, \sinh t)$ on samalla tavoin tasasivuisen hyperbelin piste kuin $(\cos t, \sin t)$ on yksikköympyrän piste!

Miksi area?

Selitys hyperbolisen funktion nimelle on vielä puolinainen. Sinin ja kosinin tapauksessa parametrin t merkitys on ilmeinen: se on edellä mainittu kulma tai kaari x-akselista pisteeseen (x, y). Arcus-sanahan tarkoittaa kaarta. $t = \arccos x = \arcsin y$ on se kaari, jota vastaavan keskuskulman kosini on x ja sini on y. Mutta mikä on t tasasivuisen hyperbelin ja funktioiden sinh ja cosh tapauksessa? Tämän selvittääksemme joudumme hiukan integroimaan. Ja integroidaksemme tarvitsemme hiukan tietoa hyperbolisten funktioiden derivaatoista.

Hyperbolisen sinin ja kosinin derivaatat ovat äärimmäisen helposti laskettavissa suoraan funktioiden määritelmistä. Saamme

$$D \sinh t = \cosh t, \quad D \cosh t = \sinh t.$$

Tarkastelemme tasasivuisen hyperbelin pistettä (x, y), missä $x > 1$ ja $y > 0$. Origosta pisteisiin (x, y) ja $(x, -y)$ piirretyt janat ja pisteiden (x, y), $(x, -y)$ välinen hyperbelin kaari rajoittavat kolmikärkisen alueen. Laskemme sen pinta-alan. Koska $y = \sqrt{x^2 - 1}$, ala saadaan, kun sen kolmion alasta, jonka kärjet ovat $(0, 0)$, (x, y) ja $(x, -y)$ poistetaan osa, jota rajaavat hyperbelin kaari ja pisteiden (x, y) ja $(x, -y)$ kautta kulkeva x-akselia vastaan kohtisuora suora. Kolmion ala on $x\sqrt{x^2 - 1}$. Poistettava ala on

$$2 \int_1^x \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

Laskemme viimeisessä kaavassa olevan integraalin. Sen laskemiseksi kannattaa tehdä muuttujanvaihto $x = \cosh u$. Nyt $x'(u) = \sinh u$ ja $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2 u - 1} = \sinh u$. Kun $x = 1$, niin $u = 0$ ja kun $x = x$, niin $u = \operatorname{arcosh} x$. Integraali saa siis sijoituksen jälkeen muodon

$$\int_0^{\operatorname{arcosh} x} \sinh^2 u\, du.$$

Edellä johdetun $\sinh^2 x$:n lausekkeen avulla integraalimme muuttuu muotoon

$$\frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcosh} x} (\cosh(2u) - 1)\, du$$

ja tavallisella tempulla edelleen muotoon

$$-\frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x + \frac{1}{4} \int_0^{2 \operatorname{arcosh} x} \cosh v\, dv.$$

Saamme integraalin arvoksi lopulta

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x + \frac{1}{4} \Big/_0^{2 \operatorname{arcosh} x} \sinh v \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x + \frac{1}{4} \sinh(2 \operatorname{arcosh} x). \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} &\sinh(2 \operatorname{arcosh} x) = 2 \sinh(\operatorname{arcosh} x) \cosh(\operatorname{arcosh} x) \\ &= 2x \sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh} x) - 1} = 2x\sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Integraalin arvo on siis $\frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x$. Integraali on puolet siitä alasta, jonka aioimme vähentää kolmiosta, jonka ala on $x\sqrt{x^2 - 1}$. Tämä merkitsee, että kolmikärkisen janojen ja hyperbelin kaaren rajoittaman alueen ala on tasan $\operatorname{arcosh} x$. Jos merkitsemme alaa t:llä, saamme kärkipisteen (x, y) koordinaateiksi $(\cosh t, \sinh t)$. Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktio mittaa todella alaa, ja ala on esityksen $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ parametrin t geometrinen merkitys.

Ympyrä sulkeutuu, kun muistamme ympyränsektorin alan kaavan. Kun sektorin keskuskulma on ϕ (radiaania), niin sektorin ala on $\frac{1}{2}\phi r^2$, missä r on ympyrän säde. Mutta tämähän merkitsee, että yksikköympyrän pisteiden $(\cos t, \sin t)$ ja $(\cos t, -\sin t)$ määrittämän sektorin ala on t; alaa voidaan yhtä hyvin pitää parametrina kuin kiertokulmaakin. Pitäisikö merkinnät $\arcsin y$ ja $\arccos x$ muuttaakin merkinnöiksi $\operatorname{arcos} x$ ja $\operatorname{arsin} y$?

Hyperbolisten funktioiden, eksponenttifunktion ja tavallisten trigonometristen funktioiden yhteys ei ole yllättävä, kun sitä lähestyy potenssisarjojen, kompleksilukujen ja differentiaaliyhtälöiden suunnista. Mutta se on toinen juttu.

Mallinnusta ja tulvien ennustamista

Ari Koistinen
Tutkija, Suomen ympäristökeskus
Matematiikan tuntiopettaja, Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Mitä on mallinnus?

Mallinnusta on jo vuosikymmenien ajan käytetty erilaisten luonnossa, tekniikassa, talouselämässä ja yhteiskunnassa esiintyvien asioiden ja ilmiöiden tutkimiseen. Tietokoneiden suorituskyvyn kasvun myötä mallinnuksen sovellusmahdollisuudet ovat lisääntyneet valtavasti.

Mitä tämä mallinnus on? Hyvin laajasti ymmärrettynä asian kuvaaminen millä tahansa toisella asialla – siis toisen asian käyttäminen *mallina* – on mallinnusta. Esimerkiksi kartta on karttaa vastaavan alueen malli. Myös historian kokeeseen valmistautuvan lukiolaisen muodostama käsitys toisen maailmansodan tapahtumista on malli. Nämä molemmat mallit, kuten mallit useimmiten, ovat epätäydellisiä kuvauksia: kartassa ei voi olla kaikkia maaston todellisia yksityiskohtia ja lukiolaisen päähänsä rakentamasta mallista todennäköisesti puuttuu ainakin muutama maailmansodan tapahtumien sivujuonne.

Jos ilmiön tai muun asian kuvaamiseen käytetään matemaattisia yhtälöitä, on kysymys *matemaattisesta mallinnuksesta.* Yksinkertaisimmillaan matemaattinen malli on yksi ainoa yhtälö: esimerkiksi yhtälö $h = km$ kertoo, kuinka kokonaishinta h riippuu kilohinnasta k ja massasta m. Jos malli ohjelmoidaan tietokoneelle, saadaan *tietokonemalli.*

Edellä sanoja malli ja mallinnus käytettiin hyvin väljästi. Jokapäiväisessä tieteen, tutkimuksen ja tuotekehityksen kielenkäytössä mallinnuksella tarkoitetaan useimmiten ilmiön jäljittelemistä matemaattisella kuvauksella, joka on hieman monimutkaisempi kuin yksi ainoa yhtälö, ja usein kuvaukseen kuuluu peruslaskutoimitusten lisäksi monimutkaisempaa matematiikkaa. Kuvaus tai ainakin osia siitä on myös useimmiten ohjelmoitu tietokoneelle niin, että ilmiön kulkua eri tilanteissa voidaan tarkastella tietokoneen avulla. Tietokone kuuluu mallinnukseen usein niin olennaisena osana, että itse matemaattinen malli ja mallin kuvauksen sisältämä tietokoneohjelma mielletään samaksi asiaksi.

Mallin kehittäminen, esimerkkinä vesistömalli

Yritysten, tutkimuslaitosten ja korkeakoulujen tutkimus- ja tuotekehitystoiminnassa käytetään paljon valmiita eri tarkoituksiin tehtyjä mallinnusohjelmistoja. Valmiita työkaluja on tarjolla virtausmallinnukseen, rakenteiden ja koneen osien mallinnukseen, logistiikan simulointiin (esim. tehtaan tuotteiden ja raaka-aineiden kuljetus ja varastointi), elektronisten järjestelmien mallinnukseen – ja oikeastaan lähes jokaiselle insinööritieteen osa-alueelle. Tällaisen mallin etuna on usein helppokäyttöisyys: kuvitellaan esimerkiksi elektronista piiriä kuvaava malli, johon syötetään tiedot toisiinsa kytketyistä komponenteista, minkä jälkeen malli kertoo, kuinka piiri todellisuudessa toimisi, näyttäen esimerkiksi piirin eri osissa kulkevat virrat sekä komponenttien jännitteet ja varaukset eri ajanhetkillä.

Toisaalta valmiit työkalut ovat usein pitkälle erikoistuneita ja samalla rajoittuneita: jotakin mallinnettavaan ilmiöön vaikuttavaa seikkaa ei ehkä olekaan mahdollista ottaa huomioon mallinnusohjelmassa. Esimerkiksi elektronisten piirien mallinnustyökalussa ei välttämättä voida huomioida ympäristön lämpötilan äkillisiä muutoksia ja niiden vaikutusta piirin komponentteihin. Tällöin koko ohjelmaa olisi muutettava, mutta lähdekoodi tuskin on vapaasti muokattavissa. Ohjelmistojen tarkkoja toimintaperiaatteitakaan ei välttämättä liikesalaisuuden säilyttämiseksi paljasteta, mikä saattaa häiritä mallia käyttävää asiantuntijaa.

Edellä mainittujen syiden lisäksi myös valmiiden mallinnusohjelmistojen korkeat hinnat saattavat vaikuttaa siihen, että ilmiön mallintamiseksi päätetäänkin tehdä kokonaan uusi malli: laaditaan matemaattinen kuvaus ja sen pohjalta tietokonemalli jollain ohjelmointikielellä. Seuraavassa tarkastellaan pintapuolisesti joitakin tällaisen mallin kehittämisen vaiheita, käyttäen esimerkkinä vesistöjen virtaamien ja vedenkorkeuksien ennustamiseksi laadittua mallia.

Suomen ympäristökeskuksessa (SYKE) on noin kahdenkymmenen vuoden ajan kehitetty ja käytetty vesistömallijärjestelmää, jolla simuloidaan ja ennustetaan vedenkorkeuksia ja virtaamia. Satojen ennustepisteiden laskentatulokset ovat päivittäin nähtävillä internetissä. Järjestelmän ytimenä olevan mallin syötteenä on sää (lämpötila, sadanta ja haihdunta), joka perustuu havaintoihin, sääennusteeseen tai tilastolliseen dataan. Malliin on ohjelmoitu karkea kuvaus veden kiertokulusta ilmakehässä, pinta- ja pohjavesissä sekä maaperässä. Pintavesien kuvaus on näistä yksityiskohtaisin ja mallin päätarkoituksena onkin simuloida järvien ja jokien vedenkorkeuksia ja virtaamia sekä eri vesistöaluilta valuvia vesimääriä.

Vesistömallin toimintaperiaate on perusidealtaan yksinkertainen. Tilat, joissa vesi luonnossa esiintyy, on kuvattu varastoina, joita ovat mm. järvialtaat, maaperän vesivarastot (maan pintakerros ja pohjavesi) ja talvella lumipeite. Jokaista varastoa vastaa mallin jokaisella osa-alueella muuttuja, jonka arvo muuttuu laskennan edetessä. Mallin laskenta alkaa tietystä päivästä, jolloin kullekin muuttujalle annetaan alkuarvo. Alkuarvojen määrittämisessä käytetään hyödyksi myös mahdolliset havainnot. Tämän jälkeen edetään yleensä vuorokauden mittaisissa laskenta-askelissa ja siirretään vettä ohjelmakoodissa olevien hydrologian lainalaisuuksiin perustuvien yhtälöiden avulla varastosta (eli muuttujasta) toiseen.

Laskennan tulokset esitetään vedenkorkeutta, virtaamaa ja muita tärkeitä suureita ajan funktiona kuvaavina käyrinä. Myös mahdolliset havainnot näkyvät kuvissa. Ennuste esitetään todennäköisyysjakaumana, jonka hajonta syntyy pääasiassa sään epävarmuuden perusteella.

Vesistömallijärjestelmää käytetään mm. tulvien ennustamiseen, vesistöjen säännöstelyn suunnitteluun sekä vaikeasti suoraan mitattavissa olevien hydrologisten suureiden kuten valunnan (alueelta valuva vesimäärä millimetreinä vuorokaudessa) ja maankosteuden vaihtelun laskemiseen.

Ennen tietokonemallin laatimista on oltava siis ainakin jonkinlainen käsitys lainalaisuuksista, joita ilmiö noudattaa. Jos nämä lainalaisuudet tunnetaan hyvin tarkasti, niin riittää ohjelmoida niitä kuvaavat matemaattiset yhtälöt tietokoneelle sekä laatia käyttöliittymä mallin ohjaamista ja laskentatulosten esittämistä varten. Tämän jälkeen malli on valmis testattavaksi ja kun ohjelmointi- ja muut virheet – joita luultavasti on melkoinen joukko – on saatu korjattua ja malli todettu toimivaksi, se voidaan ottaa käyttöön.

Usein tieto mallinnettavaan ilmiöön liittyvistä lainalaisuuksista on kuitenkin enemmän tai vähemmän puutteellisia: vaikuttavia tekijöitä on niin paljon, että tarkan matemaattisen kuvauksen laatiminen on mahdotonta. Puutteellinen tieto näistä lainalaisuuksista voidaan monissa tilanteissa korvata käyttämällä tuntemattomia parametreja, joille pyritään etsimään sopivat arvot.

Malleja on tapana jaotella moniin kategorioihin, kuten dynaamisiin ja staattisiin malleihin (dynaamisessa mallissa tapahtuu muutoksia ajan suhteen, staattisessa ei) sekä stokastisiin ja deterministisiin malleihin (stokastinen malli sisältää satunnaisuutta, mutta determinististen mallin tulokset määräytyvät täysin syötetietojen perusteella). Eräs jaottelu perustuu siihen, kuinka tarkasti ilmiöt on mallissa kuvattu. *Fysikaalisessa mallissa* kuvaus perustuu tiukasti fysiikan lakeihin ja mahdollisten tuntemattomien parametrien arvot on voitu rajata suhteellisen pienelle alueelle: esimerkiksi mallinnettaessa nesteen virtausta paperikoneen sisällä tunnetaan ehkä ilmiötä kuvaavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt ja paperikoneen rakenteiden geometriasta johtuvat reunaehdot, mutta ei välttämättä aivan tarkasti nesteen koostumusta ja sen fysikaalisia ominaisuuksia.

Tilastollisessa mallissa ei pyritä fysikaaliseen kuvaukseen, vaan tilastollista dataa analysoimalla yritetään selvittää, kuinka paljon jokin tarkasteltava asia riippuu eri tekijöistä – vai riippuuko lainkaan. Esimeriksi talouden suhdanteiden kehittymistä voidaan pyrkiä ennustamaan tilastollisilla menetelmillä työllisyyden, vaihtotaseen, inflaation, yritysten investointien sekä kuluttajien taloudellisen luottamuksen perusteella, ilman, että tarvitsee kuvata tarkasti prosessia, jonka kautta esimerkiksi kuluttajien luottamusindeksi vaikuttaa suhdanteisiin (toki on eduksi, jos mallintajalla on tästäkin asiasta jonkinlainen aavistus).

Konseptuaalinen malli tarkoittaa eräänlaista fysikaalisen ja tilastollisen mallin välimuotoa. Siinä prosessit on pyritty kuvaamaan todellisuutta vastaavalla tavalla, mutta kuvaus on karkea, ennemmin käsitteellinen kuin fysikaalinen. Tuntemattomilla parametreilla, joita voi olla paljon, on melko suuri sallittu arvoalue.

SYKEn vesistömalli on konseptuaalinen malli. Esimerkiksi vesistöalueelta toiselle valuva vesimäärä riippuu veden määrästä alueella sekä kyseisen alueen viivettä kuvaavista parametrista. Ei ole pyrittykään rakentamaan tarkkaa fysikaalista kuvausta veden virtaamisesta, sillä se edellyttäisi yksityiskohtaisia tietoja pinnanmuodoista, maaperän koostumuksesta ja kasvillisuudesta.

Veden virtauksen pois luonnontilaisista järvialtaista määrää havaintoihin perustuva purkauskäyrä (tai purkaustaulukko – järvestä purkautuva vesimäärä kuutiometreinä sekunnissa eri vedenkorkeuksille), ja jos virtaamamittauksia ei ole tai niitä on liian vähän kattavan purkaustaulukon muodostamiseksi, perustuu purkauskäyräkin parametreihin. Yleensä käytetään muotoa

$$q(w) = \begin{cases} a \cdot (w - w_0)^b, & \text{kun } w > w_0, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

olevaa funktiota, missä w on järven vedenkorkeus (metreinä merenpinnan tasosta luettuna) ja q on virtaama kuutiometreinä sekunnissa. Luvut a, b ja w_0 ovat parametreja, joiden arvot on pyritty määrittämään niin, että laskenta toimii havaintoihin nähden mahdollisimman hyvin. Parametrille w_0 on myös yksinkertainen fysikaalinen tulkinta: se on raja, jonka alapuolisilla vedenkorkeuksilla virtaama on nolla.

Säännösteltyjen järvien lähtövirtaama määritetään mallissa säännöstelyyn liittyvien määräysten ja tiedossa olevien juoksutussuunnitelmien perusteella. Lumipeitteen kertyminen riippuu sadannasta, lämpötilasta ja muutamasta parametrista. Parametrit vaikuttavat myös siihen, kuinka nopeasti vesi valuu maan pintakerroksesta pohjaveteen ja kuinka nopeasti pohjavesivaraston vesi siirtyy eteenpäin vesistöalueelta toiselle ja järviin.

Mallin kalibrointi

Mallin parametrien arvojen tulisi siis olla sellaiset, että mallin laskentatulokset ovat mahdollisimman lähellä havaintoja. Optimaalisten parametrien arvojen etsimistä kutsutaan mallin *kalibroinniksi.* Hyvin yksinkertaisissa tapauksissa kalibrointi voidaan tehdä käsin: annetaan parametreille arvot ja testataan ne ajamalla malli. Tämän jälkeen päätellään laskentatuloksia ja havaintoja vertaamalla, mihin suuntaan parametreja tulee muuttaa. Tätä jatketaan, kunnes saadaan riittävän hyviä tuloksia – tai kunnes tulokset eivät enää merkittävästi parane.

Usein malli on niin monimutkainen, että kalibrointi on parempi antaa tietokoneen tehtäväksi. Kalibrointi on monesti laskennallisesti raskas tehtävä. Mallinnuksessa, kuten monilla muillakin tietotekniikan käyttöalueilla, laskentaresurssit ovat tietotekniikan huimasta kehityksestä huolimatta aina niukat: tietokoneiden nopeuden ja muistikapasiteetin kasvaessa keksitään yhä monimutkaisempia mallinnettavia asioita tai kasvatetaan vanhojen mallien laskentatarkkuutta (esimerkiksi aika- tai paikkaresoluutiota). Nykyisin eräs laskennallisesti vaativimpia tietokoneiden työsarkoja lienee sääilmiöiden mallintaminen.

Mahdollisimman hyvään tulokseen pääsemiseksi sekä prosessoriajan (ja työajan) säästämiseksi mallin parametrien kalibrointiin tulisi käyttää tehtävään hyvin sopivaa menetelmää. Näitä *optimointimenetelmiä* matemaatikot ovat kehittäneet lukemattomia. Optimointi tarkoittaa funktion maksimi- tai minimikohdan etsimistä – etsitään siis sellaiset muuttujien arvot, että funktion arvo on mahdollisimman suuri tai mahdollisimman pieni. Mallin kalibroinnissa muuttujia ovat parametrit ja funktiona on mallin virhe, joka pyritään minimoimaan. Yksinkertainen ja yleisesti käytetty tapa muodostaa virhefunktio on *pienimmän neliösumman* periaate: lasketaan summa jokaisen havaintoarvon ja sitä vastaavan lasketun arvon erotuksen neliöistä, täsmällisesti ilmaistuna virhefunktio on

$$f(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{n} (z_k(\overline{x}) - y_k)^2,$$

missä $\overline{x}$ on mallin parametreista koostuva vektori, josta funktion arvo riippuu, luvut $z_1(\overline{x}), z_2(\overline{x}), \ldots, z_n(\overline{x})$ ovat mallin laskemia (ja parametreista riippuvia) arvoja ja luvut $y_1, y_2, \ldots, y_n$ näitä vastaavat havaitut arvot. Lasketut ja havaitut arvot voivat olla esimerkiksi virtaamia vesistön eri kohdissa kuutiometreinä tietyn aikajakson, vaikkapa vuorokauden aikana. Jos funktion f arvo saadaan pieneksi, ovat lasketut ja havaitut arvot lähellä toisiaan.

Optimointimenetelmän on oltava sellainen, että virhefunktion minimi löydetään suhteellisen nopeasti ja riittävän suurella varmuudella. Tyypillinen optimoinnin ongelmatilanne on juuttuminen ns. paikalliseen minimiin: löydetään kohta, jossa funktion arvo on lähistöllä olevissa pisteissä saavutettuihin arvoihin nähden pieni. Mikäli kyseessä on yhden tai kahden muuttujan funktio (eli $\overline{x}$ on reaalimuuttuja tai kaksiulotteinen vektori), voidaan asia ilmaista havainnollisesti sanomalla, että funktion kuvaajassa on tässä kohdassa "kuoppa". Kauempana voi kuitenkin olla syvempiä kuoppia ja hyvän optimointimenetelmän tulisi melko erehtymättömästi löytää se syvin ja mielellään kohtuullisella prosessoriajalla.

Optimointiongelman ratkaisemistakin vaikeampaa on usein itse ongelman asettaminen, tarkemmin sanottuna virhefunktion muodostaminen. Jos pyritään laskemaan arvoja useille eri suureille, voi käydä niin, että parametrien arvojen muuttaminen saattaa parantaa yhtä, mutta huonontaa toista laskennan osa-aluetta. Muodostettaessa virhefunktiota näille osatekijöille tulee valita tarkoituksenmukaiset painokertoimet. Esimerkiksi mallinnettaessa vesistöjä pitäisi lumen vesiarvon talven aikana vastata alueella tehtyjä lumimittauksia, mutta lisäksi kevään virtaamasumman tulisi olla lähellä havaittua virtaamasummaa, eikä olisi pahitteeksi, jos kevätvirtaaman huipun suuruus ja ajankohta osattaisiin ennustaa kohtuullisella tarkkuudella oikein.

Kun parametrit on optimoitu, ei vielä voida ottaa mallia operatiiviseen käyttöön tai laittaa sitä myyntiin. Edessä on mallin testaus, jonka jälkeen mallin rakennetta täytyy mahdollisesti – tai todennäköisesti – vielä muuttaa ja optimoida parametrit uudelleen. Tämä ei välttämättä pääty edes mallin varsinaiseen käyttöönottoon. SYKEn vesistömallin kehitystyö jatkuu edelleen, sillä vedenkorkeuksia ja virtaamia ei vielä pystytä ennustamaan riittävän tarkasti pitkällä eikä aina lyhyelläkään aikavälillä. Lähemmäksi tätä tavoitetta päästään myös sääennustemallien kehittyessä: sääilmiöt kun vaikuttavat vesistöjen käyttäytymiseen melko voimakkaasti.

Kuinka mallintajaksi tullaan?

Teknisen tai luonnontieteellisen – ja mahdollisesti myös taloustieteellisen, lääketieteellisen tai yhteiskuntatieteellisen – koulutuksen valinnut joutuu (tai pitäisi ehkä sanoa ”pääsee”) yhä suuremmalla todennäköisyydellä tekemisiin mallinnuksen kanssa, joko mallien kehittäjänä tai niiden käyttäjänä. Edellytykset suunnitella ja kehittää malleja ovat hyvät, jos mallinnettavien ilmiöiden tuntemisen lisäksi tuntee matematiikkaa ja osaa ohjelmoida – eivätkä nämä taidot ole pahitteeksi myöskään valmiita mallinnusohjelmistoja käytettäessä, sillä monet niistä edellyttävät käyttäjältään hyviä matemaattisia ja tietoteknisiä valmiuksia. Tarvitaan ”malliajattelua”, kykyä hahmottaa ilmiöitä niin, että ymmärtää syy- ja seuraussuhteet ja osaa pukea ne täsmälliseen ja tarvittaessa matemaattiseen muotoon.

Mallintajaksi voi päätyä opiskelemalla ensisijaisesti jotakin sovellusaluetta, jolla mallinnusta voi hyödyntää, ja hankkia sen ohella hyvät tiedot matematiikasta ja tietojenkäsittelystä. Toinen vaihtoehto on opiskella pääaineena matematiikkaa ja perehtyä lisäksi sovellusalueisiin, kuten tekniikan eri osa-alueisiin, fysiikkaan, kansantaloustieteeseen tai geofysiikkaan – tai melkein mihin hyvänsä, sillä on mahdotonta sanoa, mihin kaikkeen matemaattista mallinnusta tulevaisuudessa sovelletaan.

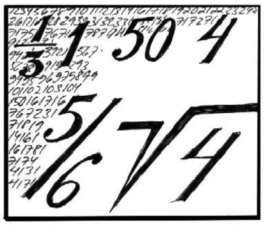
Lopuksi pari aiheeseen liittyvää linkkiä:

Matemaattisen mallinnuksen verkostohanke (täältä löytyvästä linkkikokoelmasta voi aloittaa lisätietojen etsimisen mallinnuksesta):

http://alpha.cc.tut.fi/mallinnus/

SYKEn vesistöennusteet:

http://www.ymparisto.fi/vesistoennusteet



Matematiikkaviikonlopun tehtävät

Alex Hellsten ja ***Meeri Kesälä***
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Maunulan matematiikkalukiolla järjestettiin 16.–17.9.2005 matematiikkaviikonloppu. Osallistujia oli kolmisenkymmentä lukion toisluokkalaista seitsemästä pääkaupunkiseudun koulusta. Viikonlopun olivat järjestäneet Maunulan koulun opettajat ja *Marjatta Näätänen* Helsingin yliopistosta. Opetushallitus tuki toimintaa taloudellisesti. Professori *Tom Körner* Cambridgen yliopistosta kertoi algoritmeista 16.9. Seuraavana päivänä osallistujat saivat ratkoa luentoihin liityviä tehtäviä, jotka tässä esitetään. Esitelmässä käytiin läpi mm. perinteinen Hanoin tornit -tehtävä (vrt. teht. 5), Eukleideen algoritmi (kahden luvun suurimman yhteisen tekijän laskemiseen, vrt. teht. 3), eri algoritmeja suurimman luvun löytämiseen kuten kuplajärjestäminen ja turnajaismenettely (vrt. teht. 4) sekä algoritmi rautatieverkon maksimaalisen kapasiteetin etsimiseen (vrt. teht. 6).

Tehtävät laati Tom Körner.

Tehtävä 1. Pelissä ”viimeisenä sataan” pelaaja A valitsee kokonaisluvun n_1 lukujen 1 ja 9 välillä [formaalisti $1 \leq n_1 \leq 9$], jonka jälkeen pelaaja B lisää tähän kokonaisluvun 1 ja 9 välillä tuottaen luvun n_2 [formaalisti $1 \leq n_2 - n_1 \leq 9$]. Seuraavaksi pelaaja A lisää kokonaisluvun 1 ja 9 välillä saadakseen luvun n_3 [formaalisti $1 \leq n_3 - n_2 \leq 9$] ja niin edelleen. Ensimmäinen pelaajista, joka nimeää luvun, joka on suurempi tai yhtäkuin 100 häviää. Kokeile peliä. Miksi peli on tylsä?

Tehtävä 2. Conwayn esittämässä ”Sylverin kolikkojen arvot” -pelissä kaksi pelaajaa vuoron perään valitsevat aidosti positiivisia kokonaislukuja jotka edustavat kolikkojen arvoja. Sääntönä on ettei yksikään kolikko vastaa arvoltaan summaa joka voidaan koota aikaisemmin nimetyistä kolikoista. Siten jos luvut 6 ja 8 ovat nimettyjä, niin seuraavaksi voi nimetä vain parittoman luvun tai jonkun luvuista 2, 4 ja 10.

Tarkista että pelaajat voivat nimetä luvut 12, 65, 5, ja 3 annetussa järjestyksessä, mutta että tämän jälkeen on vain neljä lukua joista valita.

Pelaaja joka nimeää luvun 1 häviää.

Kokeile peliä. Aluksi se voi tuntua hieman oudolta, mutta tulee kiintoisammaksi kun siihen tottuu.

Ei edes ole selvää että pelin on joskus päätyttävä. Mieti tätä jonkun aikaa ennenkuin menet seuraaviin kysymyksiin.

Tehtävä 3. Palautamme mieleen, että Eukleideen algoritmi tuottaa sellaisia kahdesta aidosti positiivisesta kokonaisluvusta muodostuvia pareja (n_{j-1}, n_j), että $n_{j-1} > n_j$ ja on olemassa sellaiset kokonaisluvut a_j, että

$$n_{j-1} = a_j n_j + n_{j+1}.$$

(i) Näytä, että jos on olemassa sellaiset kokonaisluvut b_j ja c_j, että

$$1 = b_j n_j + c_j n_{j+1},$$

niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut b_{j-1} ja c_{j-1}, että

$$1 = b_{j-1}n_{j-1} + c_{j-1}n_j.$$

(ii) Päättele että jos r ja s ovat aidosti positiivisia kokonaislukuja joilla ei ole yhteistä tekijää, niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut b ja c, että

$$1 = br + cs.$$

(iii) Käyttäen Eukleideen algoritmia pariin 37 ja 43 ja käyttäen kohtien (i) ja (ii) ideoita, etsi sellaiset b ja c, että $37b + 43c = 1$.

(iv) Näytä, että jos r ja s ovat aidosti positiivisa kokonaislukuja joilla on suurin yhteinen tekijä d, niin on olemassa sellaiset koknaisluvut b ja c, että

$$d = br + cs.$$

(v) Käyttäen Eukleideen algoritmia pariin 282 ja 70 ja sen jälkeen soveltaen yllä esitettyjä ideoita, etsi sellaiset b ja c, että $282b + 70c = 2$.

Tehtävä 4. Osoita, että $2n$ erisuuresta numerosta voidaan löytää suurin ja pienin käyttämällä $3n - 2$ vertailua.

Tehtävä 5. Peli ”Hanoin renkaat” koostuu metallitangosta n kappaleesta toisiinsa ketjuksi kytkettyjä renkaita. Renkaita ripustetaan metallitankoon, ja kustakin renkaasta sanotaan sen olevan ”kiinni” jos se on tangolla ja ”irti” jos se ei ole. (Pelitilanne voidaan ilmoittaa funktiona $\{1, 2, ..., n\} \to \{\text{kiinni}, \text{irti}\}$, missä numerolla 1 merkitään ketjun ensimmäistä rengasta, numerolla 2 seuraavaa ja niin edelleen. Yhteensä erilaisia pelitilanteita on 2^n.) Sääntöjen mukaan ensimmäisen renkaan saa koska tahansa kiinnittää tai irrottaa tangolta, mutta ykköstä suuremmilla k, renkaan numero k saa kiinnittää tai irroittaa vain jos rengas numero $k-1$ on ”kiinni” ja kaikki tätä pienemmäällä numerolla varustetut renkaat ovat ”irti”.

(a) Osoita että missä tahansa pelitilanteessa, poikkeuksena 2 tilannetta (löydettävä!), on pelaajalla tasan kaksi vaihtoehtoista siirtoa. Päättele tästä, että yhdestä pelitilanteesta toiseen kulkeva polku (eli siirtojen sarja) on yksikäsitteinen, jos toistoa ei hyväksytä. (Voidaan olettaa että tällainen polku on aina olemassa.)

(b) Merkitään $f(n)$:llä pienintä siirtojen määrää, jolla päästää n:n renkaan pelissä tilanteesta ”kaikki kiinni” tilanteeseen ”kaikki irti”. Lasketaan arvo $f(n)$ käyttäen arvoja $f(n-1)$ ja $f(n-2)$, tarkastellen siirtoja ennen ja jälkeen n:en renkaan ottamista tangolta. Osoitettava että $f(n)$ on aina luvun $2^{n+1}/3$ kokonaislukuosa.

Tehtävä 6. Valitaan 10 kaupunkia Suomesta, joista yksi on Helsinki. Mitataan kaikkien kaupunkien väliset etäisyydet pitkin sellaisia teitä, jotka eivät kulje minkään muun kaupungin läpi.

Etsitään kustakin kaupungista lyhin tie Helsinkiin. Mitä huomataan? Osaatko kirjoittaa säännön kahden kaupungin välisen lyhimmän reitin löytämiseen?

Vihje tehtävään 1. Peli on tylsä, sillä ensimmäinen pelaaja voi aina voittaa.

Vihje tehtävään 2. Pelin päättymistä voidaan miettiä seuraavasti: Kahden nimetyn kolikon (k_1 ja k_2) suurin yhteinen tekijä ($\text{syt}(k_1, k_2)$) on välttämättä pienempi kuin kumpikin luvuista. Seuraavassa tehtävässä osoitetaan, että kaikki $\text{syt}(k_1, k_2)$:llä jaolliset luvut saadaan laskemalla yhteen lukuja k_1 ja k_2. Luku k_3 ei siis voi olla jaollinen luvulla $\text{syt}(k_1, k_2)$. Saadaan, että joko $\text{syt}(k_1, k_3)$¡$\text{syt}(k_1, k_2)$ tai $\text{syt}(k_2, k_3)$¡$\text{syt}(k_1, k_2)$. Jokaisella kierroksella saadaan jollekin parille aidosti pienempi syt, ja jossain vaiheessa päästään lukuun 1.

Vihje tehtävään 3. Tiedetään, että Eukleideen algoritmi päättyy, ja tuottaa viimeisenä (nollasta poikkeavana) lukuna alkuperäisten lukujen (n_0, n_1) suurimman yhteisen tekijän.

Kohdassa (i) saadaan b_{j-i} ja c_{j-1} sijoittamalla yhtälöön

$$1 = b_j n_j + c_j n_{j+1}$$

luvun n_{j+1} paikalle lauseke, joka saadaan ensimmäisestä yhtälöstä.

Vihje tehtävään 4. Luvut voidaan n:llä vertailulla ensin jakaa kahteen osaan, ”voittajiin” ja ”häviäjiin”.

Vihje tehtävään 5. Kokeile ensin peliä. Voit ”simuloida” peliä esimerkiksi seuraavasti: n:n renkaan ketjua voi kuvata ruutupaperilla n:n ruudun pituisena rivinä, johon kunkin ruudun kohdalle kirjoitetaan, onko se kiinni vai irti (esim ”k” ja ”i”). Piirrä alemmalle riville uusi ketju, jossa olet vaihtanut yhden renkaan asentoa ja niin edelleen. Yritä siirtää kolmen renkaan ketju tilanteesta ”kiinni, kiinni, kiinni” tilanteeseen ”irti, irti, irti”. Entä neljän renkaan ketju?

Kohta (a) voidaan osoittaa induktiolla ketjun pituuden suhteen. Induktioaskeleessa voidaan tarkastella erikseen tapauksia, joissa viimeisen eli $n+1$:nen renkaan tilaa tarvitsee muuttaa tai ei tarvitse. Induktiooletuksesta tiedetään, että ensimmäiset n rengasta voi siirtää asennosta toiseen vain yhdellä tavalla.

Kohdassa (b) tulee huomata, että n:renkaan siirtämisen asennosta ”kaikki irti” asentoon ”kaikki kiinni” sujuu yhtä monella siirrolla kuin asennosta ”kaikki kiinni” asentoon ”kaikki irti”. (Samat siirrot suoritetaan päinvastaisessa järjestyksessä.)

Viimeinen väite voidaan todistaa induktiolla, ja esimerkiksi tarkastella erikseen tapaukset, joissa laskun $2^n/3$

jakojäännös on 1 tai 2. Huomataan, että 2^n ei ole koskaan jaollinen kolmella (jakojäännös ei koskaan ole nolla), ja laskuilla $2^n/3$ ja $2^{n-1}/3$ on aina eri jakojäännös. Jos laskun $2^n/3$ jakojäännös on esimerkiksi 2, niin luvun $2^n/3$ kokonaisosa on $2^n/3 - 2/3$.

Vihje tehtävään 6. Sen sijaan että lähdettäisiin suoraan selvittämään lyhintä reittiä kahden annetun kaupungin välillä, kiinnitetään toinen niistä, esimerkin vuoksi Helsinki, ja selvitetään mikä muista kaupengeista on lähinnä Helsinkiä. Seuraavaksi etsitään Helsinkiä toiseksi lähin kaupunki ja vastaava reitti. Sitten kolmanneksi lähin ja niin edespäin. Tästä syntyy algoritmi kun huomataan mitä voidaan sanoa viimeiseksi löydetystä reitistä suhteessa aikaisemmin löydettyihin reitteihin. Jossakin vaiheessa toinen alunperin annetuista kaupungista tulee vastaan ja saadaan tietoon lyhin reitti kahden annetun kaupungin välillä.

Viitteet

T. W. Körner. The Pleasures of Counting. Cambridge University Press, 1996.

Pelejä ja tehtäviä

Koonnut ***Marjatta Näätänen***

Juhani Huhtamäen matematiikkapeli

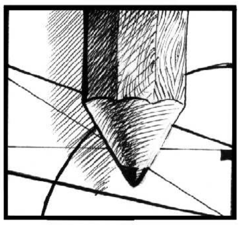
Opettaja 38/2006 kertoo ähtäriläisen opettajan *Juhani Huhtamäen* matematiikkapelistä. Siinä oppilaat kilpailevat pareittain ja yrittävät saada viidestä annetusta numerokortista muodostettua kaksi yhtä suurta lauseketta keksimällä korttien väliin sopivat laskutoimitukset mahdollisimman nopeasti, esimerkiksi $2 \cdot 4 + 2 = 9 + 1$. Vastustaja vaihtuu monta kertaa tunnin aikana, joten luokan mestarikin saadaan selville. Matematiikkapeli tuo vaihtelua tunneille ja harjaannuttaa päässälaskua, jota jokainen tarvitsee. MAOL on ottanut pelin levityksen vastuulleen. MAOL:n 70-vuotisjuhlassa Huhtamäki vastaanotti kannustuspalkinnon teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiöltä matemaattisten aineiden opetuksen kehittämisestä. Huhtamäki on tehnyt oppilaiden ja opettajien kanssa yhdessä Laske ihte -tehtäväkirjoja, joissa kaikki esimerkit ovat Ähtäristä. Laskeminen on kiinnostavampaa, kun esimerkit ovat kotiseudulta ja tutuista henkilöistä.

Murtolukujen ja ikebanan harjoitus

Tee moribana kukka-asetelma. Se koostuu kolmesta kukasta, shinistä, soesta ja taista. Shin on pisin, 1,5 kertaa niin pitkä kuin käytettävän maljakon leveys. Soen pituus on 3/4 shinin pituudesta, tain 1/3 tai 2/3 shinin pituudesta. Kukkien varret taivutetaan halutun mallin mukaisiksi.

Lisää pelejä ja tehtäviä

Lisää peli- ja tehtävälinkkejä on Solmun sivulla "Tehtävät, kerhot ja pelit", http://solmu.math.helsinki.fi/teht.html. Solmussa on ilmestynyt mm. lisää unkarilaisia matematiikan tehtäviä yläaste- ja lukioikäisille koululaisille, http://solmu.math.helsinki.fi/2006/UnkarinTehtavia.pdf.



Survo-ristikot

Seppo Mustonen
Emeritusprofessori
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Tehtävänä on täyttää $m \times n$-taulukko luvuilla $1, 2, \ldots, mn$ siten siten, että jokainen näistä luvuista esiintyy vain kerran ja että rivi- ja sarakesummat täsmäävät reunoilla annettuihin lukuihin. Lisäksi taulukkoon on saatettu sijoittaa joitakin lukuja jo valmiiksi, jottei ratkaiseminen olisi liian hankalaa eikä mahdollisia ratkaisuja olisi yhtä enempää.

Dokumentista

(1) `http://www.survo.fi/papers/ristikot.pdf`

ja sen englanninkielisestä versiosta

`http://www.survo.fi/papers/puzzles.pdf`

käy ilmi tarkemmin, mitä Survo-ristikot ovat ja niissä mm. esimerkein osoitetaan, miten ristikkoja ratkaistaan.

Esim. Survo-ristikko (3×4)

	6			30
8				18
		3		30
27	16	10	25	

ratkeaa vaiheittain yksikäsitteisesti muotoon (kts. (1) sivut 1–3)

12	6	2	10	30
8	1	5	4	18
7	9	3	11	30
27	16	10	25	

Eräitä luonnehdintoja Survo-ristikoiden ominaisuuksista:

1) Survo-ristikkojen ”pelisäännöt” ovat jopa yksinkertaisemmat kuin Sudokujen.

2) Itse ristikko on aina neliömäinen tai suorakaiteen muotoinen ja yleensä huomattavasti Sudokuristikkoa suppeampi puhumattakaan Kakuroristikoista, joita Survo-ristikot ehkä hieman enemmän muistuttavat.

3) Sudoku on sikäli sangen rajoitettu peli, että sen voi aina ratkaista hyvin rajoitetulla määrällä loogisia päätelmiä, jotka on johdettavissa alkuperäisistä säännöistä. Esim. verkosta löytyy valmiita ratkaisupalveluja, jotka kuvaavat yksityiskohtaisesti vaihe vaiheelta, miten ratkaisu etenee. Survo-ristikoille löytyy tuskin mitään vastaavaa sääntökokoelmaa, vaan ratkaisutavat vaihtelevat suuresti mm. ristikon

vaikeusasteesta riippuen ja se lisää tehtävien kiinnostavuutta.

4) Helpoimmillaan esim. 2×3-tapauksessa

		3	9
	6		12
9	7	5	

ne sopivat esim. koululaisille yhteen- ja vähennyslaskun harjoitustehtäviksi. Sitä vastoin esim. 3×4-ristikko (10. tehtävä sivulla 24)

				24
				15
				39
21	10	18	29	

on jo varsin hankala, koska siinä ei ole annettu yhtäkään luvuista $1, 2, 3, \ldots, 12$ valmiiksi taulukkoon sijoitettuna (ja sille on silti vain yksi ainoa ratkaisu). Tämänkin tehtävän voi muuntaa asteittain kevyemmäksi antamalla (kuten Sudokuissa joudutaan aina tekemään) joitain lukuja valmiina esim. muodossa

7		5		24
	1		8	15
		11		39
21	10	18	29	

jolloin siitä tulee melkein yhtä helppo kuin ensin mainitsemastani.

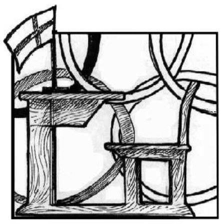
5) Huhtikuusta lähtien olen tarjonnut Survo-ristikoita ratkaistavaksi Survon omassa keskusteluryhmässä (www.survo.fi ⇒ Keskustelu) ja kaikki asiaan jollain tavoin reagoineet ovat kokeneet ne erittäin innostaviksi ja vaikeimmat tehtävät todella haastaviksi. Eräät ovat jopa sitä mieltä, että heidän motivaationsa ratkaista Sudokuja ja Kakuroja on tämän jälkeen mennyt ja haluavat juuri näitä lisää.

6) Survo-ristikoita tähän asti ratkaisseet henkilöt eivät ole pelkästään ATK-ammattilaisia tai matemaatikoita vaan monilla on "humanistisempi" koulutustausta. Esim. poikani *Olli Mustonen* on ollut eräs ensimmäisiä "koekaniineitani" ja ratkaisi mm. todella vaikean tehtävän konserttimatkallaan Budapestissa. Tuo tehtävä ja hänen kuvaamansa ratkaisutapa on tekstissäni sivuilla 8–10.

7) Olen yrittänyt etsiä verkosta kaikilla keksimilläni keinoilla, löytyisikö mistään samantapaisia ristikkotehtäviä. Mitään vastaavaa ei ole löytynyt.

8) Survo-ristikot antavat haasteita mm. kombinatoriikan tutkijoille. Esim. (viitaten lukuun lukuun 6 sivuilla 11–15) jo aidosti erilaisten avoimien 5×5-ristikkojen (ja joilla on siis yksikäsitteinen ratkaisu) lukumäärän laskeminen saattaa olla melkoinen haaste.

9) Tarkoituksena on päästää vapaaseen jakeluun syyskuun alussa nykyisestä Survosta (SURVO MM) hiukan supistettu versio (Survo Editor), jossa mm. kaikki matemaattiset ja laskennalliset ominaisuudet ovat mukana ja josta on apua (mm. Survon COMB-ohjelmaa käyttäen) vaativien Survo-ristikoiden käsittelyssä. Sen saa imuroitua ja asennettua suoraan verkosta.



Vaikeita tehtäviä Sloveniassa – Kansainväliset matematiikka-olympialaiset 2006

Matti Lehtinen

Sadoista eri maissa pidettävistä koululaisten matematiikkakilpailusta muodostuu pyramidimainen rakenne, jonka kärjessä ovat Kansainväliset matematiikkaolympialaiset. Heinäkuussa 2006 pidettiin Slovenian Ljublajanassa jo 47. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset. Tapahtuma oli suuri: joukkueita oli saapunut 90 maasta, ja kilpailijoita oli 498. Joukkueet ovat enintään kuusijäsenisiä. Jotkin maat lähettävät vain parin kilpailijan joukkueen. Matematiikkaolympialaisissa ovat edustettuina kaikki maanosat, Afrikka kuitenkin heikoimmin. Tänä vuonna oli kilpailuun oli kuitenkin tullut mukaan suuri Länsi-Afrikan maa, Nigeria. Matematiikkaolympialaiset ovat – syystä jota ei tarkkaan voi ymmärtää – kovasti poikien kilpailu. Laskin avajaisissa, jossa kaikki joukkueet kävivät vuoron perään näyttäytymässä, vain 39 tyttöä.

Olympialaisten kuudeksi tehtäväksi joukkueenjohtajista koostunut tuomaristo äänesti sarjan, jossa on kaksi (numerot 1 ja 6) geometrian alaan kuuluvaa, ensimmäinen helpohko geometrinen epäyhtälö, jälkimmäinen kombinatorisia aineksia sisältävä, yksi (numero 2) kombinatorinen, yksi (numero 3) vaativa epäyhtälötehtävä, yksi (numero 4) helpohko kokonaislukuyhtälö ja yksi (5) algebran ja lukuteorian aineksia sisältävä. Tehtävien vaikeusporrastus oli selvä. Kummankin kilpailupäivän ensimmäinen tehtävä oli helppo. Tehtävä 1 oli seuraava:

Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Kolmion sisäpiste P toteuttaa ehdon

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Osoita, että $AP \geq AI$ ja että yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $P = I$.

Kaikkiaan 358 kilpailijaa ratkaisi tehtävän täysin pistein, ja 32 joukkueen kaikki kilpailijat saivat tehtävästä kaikki mahdolliset pisteet. Ratkaisu perustui olennaisesti sen havaitsemiseen, että B, I, C ja P ovat samalla ympyrällä. Lisäksi oli selvitettävä tämän ympyrän keskipisteen sijainti: se on suoralla AI.

Toisen kilpailupäivän ensimmäisen tehtävän, tehtävän 4 muotoilu oli lyhyt:

Määritä kaikki kokonaislukuparit (x, y), jotka toteuttavat yhtälön

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Tämän ratkaisemisesta annettiin täydet 7 pistettä 248 kilpailijalle, mutta vain 9 joukkuetta sai kaikkiaan virheettömän suorituksen. Ratkaisun perusidea on kirjoittaa $y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$ ja ryhtyä tarkastelemaan kakkosen potensseja peräkkäisissä parittomissa luvuissa $y-1$ ja $y+1$.

Kilpailupäivien toiset tehtävät olivat jo olennaisesti vaikeampia: tehtävän 2 ratkaisi täysin 78 kilpailijaa, 48 tehtävän 5, 28 tehtävän 3 ja 8 tehtävän 6. Tehtävä 2 oli geometris-kombinatorinen:

Kutsumme säännöllisen 2006-kulmion P lävistäjää *hyväksi janaksi*, jos sen päätepisteet jakavat P:n piirin kahteen osaan, joista kumpikin koostuu parittomasta määrästä P:n sivuja. Myös P:n sivuja pidetään *hyvinä janoina*. Monikulmio P jaetaan kolmioiksi 2003:lla lävistäjällä, jotka eivät leikkaa toisiaan P:n sisällä. Määritä sellaisten jaossa syntyvien tasakylkisten kolmioiden, joiden sivuista kaksi on hyviä janoja, suurin mahdollinen lukumäärä.

Että tällaisia kolmioita voi olla 1003, on melko helppo huomata. Se, että määrä ei voi olla tätä suurempi, perustuu aika monipolviseen induktiopäättelyyn.

Tehtävä 5 oli algebraa:

Kokonaislukukertoimisen polynomin P aste on n, $n > 1$. Olkoon k mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan polynomia

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots)),$$

missä P esiintyy k kertaa. Todista, että on olemassa enintään n kokonaislukua t, joille pätee $Q(t) = t$.

Ratkaisun perusidea on havainto, jonka mukaan tehtävän luvut t toteuttavat ehdon $P(P(t)) = t$.

Varsinaiset vaikeat tehtävät olivat 3:

Määritä pienin reaaliluku M, jolle epäyhtälö

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \le M(a^2+b^2+c^2)^2$$

toteutuu kaikilla reaaliluvuilla a, b ja c.

ja 6:

Liitetään jokaiseen kuperan monikulmion P sivuun b suurimman sellaisen kolmion ala, joka on kokonaan P:n sisällä ja jonka yksi sivu on b. Osoita, että kaikkiin P:n sivuihin liitettyjen alojen summa on ainakin kaksi kertaa P:n ala.

Kolmannen tehtävän ratkaisu alkaa avautua, kun vasen puoli mielletään a:n kolmannen asteen polynomiksi, jonka tekijöihin jako tuottaa symmetrisen epäyhtälön. Kysytty M on hiukan yllättäen $\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$, eikä ääriarvotilanne tule silloin, kun a, b ja c ovat yhtä suuria. Tehtävän 6 monimutkainen ratkaisu edellytti jonkin verran lukuteoreettistenkin keinojen käyttöä.

Tehtävien vaikeusjakauma tuotti ymmärrettävästi varsin paljon kokonaissuorituksia, joiden pistemäärä oli lähellä 14:ää. Tuomaristo joutui lievästi rikkomaan itse asettamansa säännön, jonka mukaan mitaleita jaettaisiin enintään puolelle kilpailijoista. Mitalisuorituksen alarajaksi tuli 15 pistettä. Hopeamitali irtosi jo 19:llä pisteellä ja kultamitali 28:lla. (Periaate on, että mitalisteista kuudennes palkittaisiin kultamitalilla ja kolmannes hopeamitalilla.) Kaikki kuusi tehtävää ratkaisi oikein kolme kilpailijaa, yksi Kiinasta, yksi Moldovasta ja yksi Venäjältä.

Maiden välisen epävirallisen kilpailun paras oli totutuun tapaan Kiina. Korean kolmas sija oli jossain määrin yllättävä; se on osoitus Korean merkittävästä matematiikkapanostuksesta. Euroopan maista Italian hyvä menestys oli odotusten vastainen.

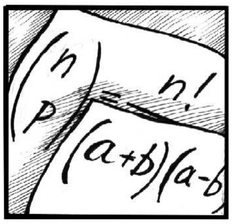
Suomea edusti kokenut joukkue. *Matti Lehtisen* ja *Anne-Maria Ernvall-Hytösen* johtaman kuusikon jäsenistä *Eemeli Blåsten* (Helsingin matematiikkalukio), *Sebastian Dumitrescu* (Tampereen lyseo), *Janne Kokkala* (Päivölän Opisto), *Ville Pettersson* (Someron lukio) ja *Esa Vesalainen* (Helsingin matematiikkalukio) olivat kaikki ainakin toisissa olympialaisissaan ja *Jukka Sireni* (Lahden yhteiskoulu) on hänkin pitkään osallistunut matematiikan olympiavalmennustilaisuuksiin. Joukkueen menetys oli ennakko-odotusten mukainen. Vesalainen, Dumitrescu, Pettersson ja Sireni saivat pronssimitalin ja Blåsten ja Kokkala kunniamaininnan. Yhtä runsas mitalisaalis on edellisen kerran saatu vuonna 1997 Argentiinassa pidetyissä olympialaisissa. Joukkueen pisteet oikeuttivat maiden paremmuusjärjestyksessä sijalle 39. Suomi oli paras Pohjoismaa.

Saavutettu menestys perustuu pitkäjänteiseen työhön. Joukkueen jäsenet ovat osallistuneet aktiivisesti Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaoston ja Päivölän opiston järjestämiin viikonloppuvalmennuksiin kahden vuoden aikana. Varsinainen viikon mittainen valmennus- ja valintaleiri pidettiin Päivölän opistossa toukokuussa. Joukkueen valmennukseen ovat osallistuneet *Kerkko Luosto*, *Antti Honkela*, *Jouni Seppänen* ja *Lauri Hallila* sekä jo mainitut joukkueenjohtajat. Päivölän opiston yhdyshenkilö matematiikan valmennustoiminnassa on ollut matematiikkalinjan johtaja *Merikki Lappi*.

Slovenialaiset järjestelyt olivat moitteettomat. Kilpailun arvostusta osoittaa, että kilpailun kunniatoimikunnan puheenjohtaja oli Slovenian presidentti *Janez Drnovšek* ja että Slovenian parlamentin puhemies *France Cukjati* isännöi henkilökohtaisesti tuomaristolle järjestettyä vastaanottoa. Päättäjäisten pääpuhuja oli Euroopan Unionin tiede- ja tutkimuskomissaari *Janez Potočnik*.

Matematiikkaolympialaisten tehtävät ja tulokset sekä paljon muuta materiaalia löytyy kilpailujen kotisivuilta `http://imo2006.dmfa.si/`.

Ensi heinäkuun lopussa järjestetään 48. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset. Kilpailunäyttämö on tuolloin Hanoi, Vietnam.



Ratkaisu edellisen kerran tehtävään

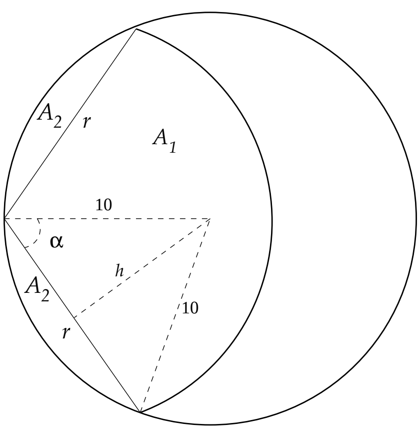
Pekka Alestalo

Esitin edellisessä numerossa kaksi tehtävää; tässä ratkaisu ensimmäiseen tehtävään. Jääköön toinen ratkaisu vielä seuraavaan numeroon.

Tilanne 1: Painoaan tarkkaileva lammas haluaa rajoittaa syömistään ja kiinnittää sen vuoksi itsensä köydellä (miten ihmeessä?) ympyrän muotoisen aitauksensa tolppaan.

Ongelma 1: Jos aitauksen säde on 10 m, niin mikä olisi sopiva köyden pituus, jotta lammas pystyisi syömään täsmälleen puolet aitauksen ruohosta? Vastaukseksi riittää likiarvo.

Ratkaisu 1: Lasketaan vuohen käytössä olevan (kuviossa kahden ympyrän kaaren rajoittaman) alueen pinta-ala muodossa $A = A_1 + 2A_2$; merkinnät selviävät kuviosta.



Pinta-ala A_1 saadaan sektorin alan lausekkeesta

$$A_1 = \frac{2\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \alpha r^2,$$

missä 2α on sektorin keskuskulma ja r kysytty köyden pituus, eli samalla kyseessä olevaa sektoria vastaavan ympyrän säde.

Pinta-ala A_2 saadaan katkoviivoitetun kolmion avulla vähentämällä 10-säteisen aitauksen r-pituisen jänteen rajoittaman kolmion ala koko sektorin alasta. Kolmion korkeudelle h on voimassa $\sin\alpha = h/10$, joten $h = 10\sin\alpha$. Saman kuvion mukaisesti $\cos\alpha = (r/2)/10$, joten $r = 20\cos\alpha$. Pinta-ala saadaan siis muodossa

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} \cdot \pi \cdot 10^2 - \frac{1}{2} \cdot rh \\ &= 50\pi - 100\alpha - 100\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

Toisaalta pinta-alan A täytyy olla puolet koko aitauksen alasta $\pi \cdot 10^2$, joten kokoamalla tulokset yhteen, käyttämällä kaavaa $\sin\alpha\cos\alpha = (1/2)\sin(2\alpha)$ ja sieventämällä saadaan yhtälö

$$400\alpha\cos^2\alpha - 100\sin(2\alpha) - 200\alpha + 50\pi = 0.$$

Yhtälöllä pitäisi olla ratkaisu välillä $0 < \alpha < \pi/2$. Ei liene toivoakaan tarkasta ratkaisusta, joten nollakohta on laskettava numeerisesti esim. puolitusmenetelmällä eli haarukointia käyttämällä.

Tulokseksi saadaan $\alpha \approx 0{,}953$, joten kysytty köyden pituus on $r = 20\cos\alpha \approx 11{,}6$ metriä. Pienenä tarkistuksena voidaan vielä todeta, että tulos on suurempi kuin 10 m, kuten selvästi täytyykin olla.