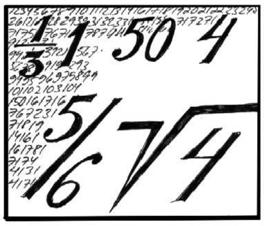

Matematiikkaviikonlopun tehtävät

Alex Hellsten ja ***Meeri Kesälä***
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Maunulan matematiikkalukiolla järjestettiin 16.–17.9.2005 matematiikkaviikonloppu. Osallistujia oli kolmisenkymmentä lukion toisluokkalaista seitsemästä pääkaupunkiseudun koulusta. Viikonlopun olivat järjestäneet Maunulan koulun opettajat ja *Marjatta Näätänen* Helsingin yliopistosta. Opetushallitus tuki toimintaa taloudellisesti. Professori *Tom Körner* Cambridgen yliopistosta kertoi algoritmeista 16.9. Seuraavana päivänä osallistujat saivat ratkoa luentoihin liittyviä tehtäviä, jotka tässä esitetään. Esitelmässä käytiin läpi mm. perinteinen Hanoin tornit -tehtävä (vrt. teht. 5), Eukleideen algoritmi (kahden luvun suurimman yhteisen tekijän laskemiseen, vrt. teht. 3), eri algoritmeja suurimman luvun löytämiseen kuten kuplajärjestäminen ja turnajaismenettely (vrt. teht. 4) sekä algoritmi rautatieverkon maksimaalisen kapasiteetin etsimiseen (vrt. teht. 6).

Tehtävät laati Tom Körner.

Tehtävä 1. Pelissä ”viimeisenä sataan” pelaaja A valitsee kokonaisluvun n_1 lukujen 1 ja 9 välillä [formaalisti $1 \leq n_1 \leq 9$], jonka jälkeen pelaaja B lisää tähän kokonaisluvun 1 ja 9 välillä tuottaen luvun n_2 [formaalisti $1 \leq n_2 - n_1 \leq 9$]. Seuraavaksi pelaaja A lisää kokonaisluvun 1 ja 9 välillä saadakseen luvun n_3 [formaalisti $1 \leq n_3 - n_2 \leq 9$] ja niin edelleen. Ensimmäinen pelaajista, joka nimeää luvun, joka on suurempi tai yhtäkuin 100 häviää. Kokeile peliä. Miksi peli on tylsä?

Tehtävä 2. Conwayn esittämässä ”Sylverin kolikkojen arvot” -pelissä kaksi pelaajaa vuoron perään valitsevat aidosti positiivisia kokonaislukuja jotka edustavat kolikkojen arvoja. Sääntönä on ettei yksikään kolikko vastaa arvoltaan summaa joka voidaan koota aikaisemmin nimetyistä kolikoista. Siten jos luvut 6 ja 8 ovat nimettyjä, niin seuraavaksi voi nimetä vain parittoman luvun tai jonkun luvuista 2, 4 ja 10.

Tarkista että pelaajat voivat nimetä luvut 12, 65, 5, ja 3 annetussa järjestyksessä, mutta että tämän jälkeen on vain neljä lukua joista valita.

Pelaaja joka nimeää luvun 1 häviää.

Kokeile peliä. Aluksi se voi tuntua hieman oudolta, mutta tulee kiintoisammaksi kun siihen tottuu.

Ei edes ole selvää että pelin on joskus päätyttävä. Mieti tätä jonkun aikaa ennenkuin menet seuraaviin kysymyksiin.

Tehtävä 3. Palautamme mieleen, että Eukleideen algoritmi tuottaa sellaisia kahdesta aidosti positiivisesta kokonaisluvusta muodostuvia pareja (n_{j-1}, n_j), että $n_{j-1} > n_j$ ja on olemassa sellaiset kokonaisluvut a_j, että

$$n_{j-1} = a_j n_j + n_{j+1}.$$

(i) Näytä, että jos on olemassa sellaiset kokonaisluvut b_j ja c_j, että

$$1 = b_j n_j + c_j n_{j+1},$$

niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut b_{j-1} ja c_{j-1}, että

$$1 = b_{j-1}n_{j-1} + c_{j-1}n_j.$$

(ii) Päättele että jos r ja s ovat aidosti positiivisia kokonaislukuja joilla ei ole yhteistä tekijää, niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut b ja c, että

$$1 = br + cs.$$

(iii) Käyttäen Eukleideen algoritmia pariin 37 ja 43 ja käyttäen kohtien (i) ja (ii) ideoita, etsi sellaiset b ja c, että $37b + 43c = 1$.

(iv) Näytä, että jos r ja s ovat aidosti positiivisa kokonaislukuja joilla on suurin yhteinen tekijä d, niin on olemassa sellaiset koknaisluvut b ja c, että

$$d = br + cs.$$

(v) Käyttäen Eukleideen algoritmia pariin 282 ja 70 ja sen jälkeen soveltaen yllä esitettyjä ideoita, etsi sellaiset b ja c, että $282b + 70c = 2$.

Tehtävä 4. Osoita, että $2n$ erisuuresta numerosta voidaan löytää suurin ja pienin käyttämällä $3n - 2$ vertailua.

Tehtävä 5. Peli "Hanoin renkaat" koostuu metallitangosta n kappaleesta toisiinsa ketjuksi kytkettyjä renkaita. Renkaita ripustetaan metallitankoon, ja kustakin renkaasta sanotaan sen olevan "kiinni" jos se on tangolla ja "irti" jos se ei ole. (Pelitilanne voidaan ilmoittaa funktiona $\{1, 2, ..., n\} \to \{\text{kiinni}, \text{irti}\}$, missä numerolla 1 merkitään ketjun ensimmäistä rengasta, numerolla 2 seuraavaa ja niin edelleen. Yhteensä erilaisia pelitilanteita on 2^n.) Sääntöjen mukaan ensimmäisen renkaan saa koska tahansa kiinnittää tai irrottaa tangolta, mutta ykköstä suuremmilla k, renkaan numero k saa kiinnittää tai irroittaa vain jos rengas numero $k - 1$ on "kiinni" ja kaikki tätä pienemmäällä numerolla varustetut renkaat ovat "irti".

(a) Osoita että missä tahansa pelitilanteessa, poikkeuksena 2 tilannetta (löydettävä!), on pelaajalla tasan kaksi vaihtoehtoista siirtoa. Päättele tästä, että yhdestä pelitilanteesta toiseen kulkeva polku (eli siirtojen sarja) on yksikäsitteinen, jos toistoa ei hyväksytä. (Voidaan olettaa että tällainen polku on aina olemassa.)

(b) Merkitään $f(n)$:llä pienintä siirtojen määrää, jolla päästää n:n renkaan pelissä tilanteesta "kaikki kiinni" tilanteeseen "kaikki irti". Lasketaan arvo $f(n)$ käyttäen arvoja $f(n-1)$ ja $f(n-2)$, tarkastellen siirtoja ennen ja jälkeen n:en renkaan ottamista tangolta. Osoitettava että $f(n)$ on aina luvun $2^{n+1}/3$ kokonaislukuosa.

Tehtävä 6. Valitaan 10 kaupunkia Suomesta, joista yksi on Helsinki. Mitataan kaikkien kaupunkien väliset etäisyydet pitkin sellaisia teitä, jotka eivät kulje minkään muun kaupungin läpi.

Etsitään kustakin kaupungista lyhin tie Helsinkiin. Mitä huomataan? Osaatko kirjoittaa säännön kahden kaupungin välisen lyhimmän reitin löytämiseen?

Vihje tehtävään 1. Peli on tylsä, sillä ensimmäinen pelaaja voi aina voittaa.

Vihje tehtävään 2. Pelin päättymistä voidaan miettiä seuraavasti: Kahden nimetyn kolikon (k_1 ja k_2) suurin yhteinen tekijä ($\text{syt}(k_1, k_2)$) on välttämättä pienempi kuin kumpikin luvuista. Seuraavassa tehtävässä osoitetaan, että kaikki $\text{syt}(k_1, k_2)$:llä jaolliset luvut saadaan laskemalla yhteen lukuja k_1 ja k_2. Luku k_3 ei siis voi olla jaollinen luvulla $\text{syt}(k_1, k_2)$. Saadaan, että joko syt(k_1, k_3)¡syt(k_1, k_2) tai syt(k_2, k_3)¡syt(k_1, k_2). Jokaisella kierroksella saadaan jollekin parille aidosti pienempi syt, ja jossain vaiheessa päästään lukuun 1.

Vihje tehtävään 3. Tiedetään, että Eukleideen algoritmi päättyy, ja tuottaa viimeisenä (nollasta poikkeavana) lukuna alkuperäisten lukujen (n_0, n_1) suurimman yhteisen tekijän.

Kohdassa (i) saadaan b_{j-i} ja c_{j-1} sijoittamalla yhtälöön

$$1 = b_j n_j + c_j n_{j+1}$$

luvun n_{j+1} paikalle lauseke, joka saadaan ensimmäisestä yhtälöstä.

Vihje tehtävään 4. Luvut voidaan n:llä vertailulla ensin jakaa kahteen osaan, "voittajiin" ja "häviäjiin".

Vihje tehtävään 5. Kokeile ensin peliä. Voit "simuloida" peliä esimerkiksi seuraavasti: n:n renkaan ketjua voi kuvata ruutupaperilla n:n ruudun pituisena rivinä, johon kunkin ruudun kohdalle kirjoitetaan, onko se kiinni vai irti (esim "k" ja "i"). Piirrä alemmalle riville uusi ketju, jossa olet vaihtanut yhden renkaan asentoa ja niin edelleen. Yritä siirtää kolmen renkaan ketju tilanteesta "kiinni, kiinni, kiinni" tilanteeseen "irti, irti, irti". Entä neljän renkaan ketju?

Kohta (a) voidaan osoittaa induktiolla ketjun pituuden suhteen. Induktioaskeleessa voidaan tarkastella erikseen tapauksia, joissa viimeisen eli $n + 1$:nen renkaan tilaa tarvitsee muuttaa tai ei tarvitse. Induktiooletuksesta tiedetään, että ensimmäiset n rengasta voi siirtää asennosta toiseen vain yhdellä tavalla.

Kohdassa (b) tulee huomata, että n:renkaan siirtämisen asennosta "kaikki irti" asentoon "kaikki kiinni" sujuu yhtä monella siirrolla kuin asennosta "kaikki kiinni" asentoon "kaikki irti". (Samat siirrot suoritetaan päinvastaisessa järjestyksessä.)

Viimeinen väite voidaan todistaa induktiolla, ja esimerkiksi tarkastella erikseen tapaukset, joissa laskun $2^n/3$

jakojäännös on 1 tai 2. Huomataan, että 2^n ei ole koskaan jaollinen kolmella (jakojäännös ei koskaan ole nolla), ja laskuilla $2^n/3$ ja $2^{n-1}/3$ on aina eri jakojäännös. Jos laskun $2^n/3$ jakojäännös on esimerkiksi 2, niin luvun $2^n/3$ kokonaisosa on $2^n/3 - 2/3$.

Vihje tehtävään 6. Sen sijaan että lähdettäisiin suoraan selvittämään lyhintä reittiä kahden annetun kaupungin välillä, kiinnitetään toinen niistä, esimerkin vuoksi Helsinki, ja selvitetään mikä muista kaupengeista on lähinnä Helsinkiä. Seuraavaksi etsitään Helsinkiä toiseksi lähin kaupunki ja vastaava reitti. Sitten kolmanneksi lähin ja niin edespäin. Tästä syntyy algoritmi kun huomataan mitä voidaan sanoa viimeiseksi löydetystä reitistä suhteessa aikaisemmin löydettyihin reitteihin. Jossakin vaiheessa toinen alunperin annetuista kaupungista tulee vastaan ja saadaan tietoon lyhin reitti kahden annetun kaupungin välillä.

Viitteet

T. W. Körner. The Pleasures of Counting. Cambridge University Press, 1996.