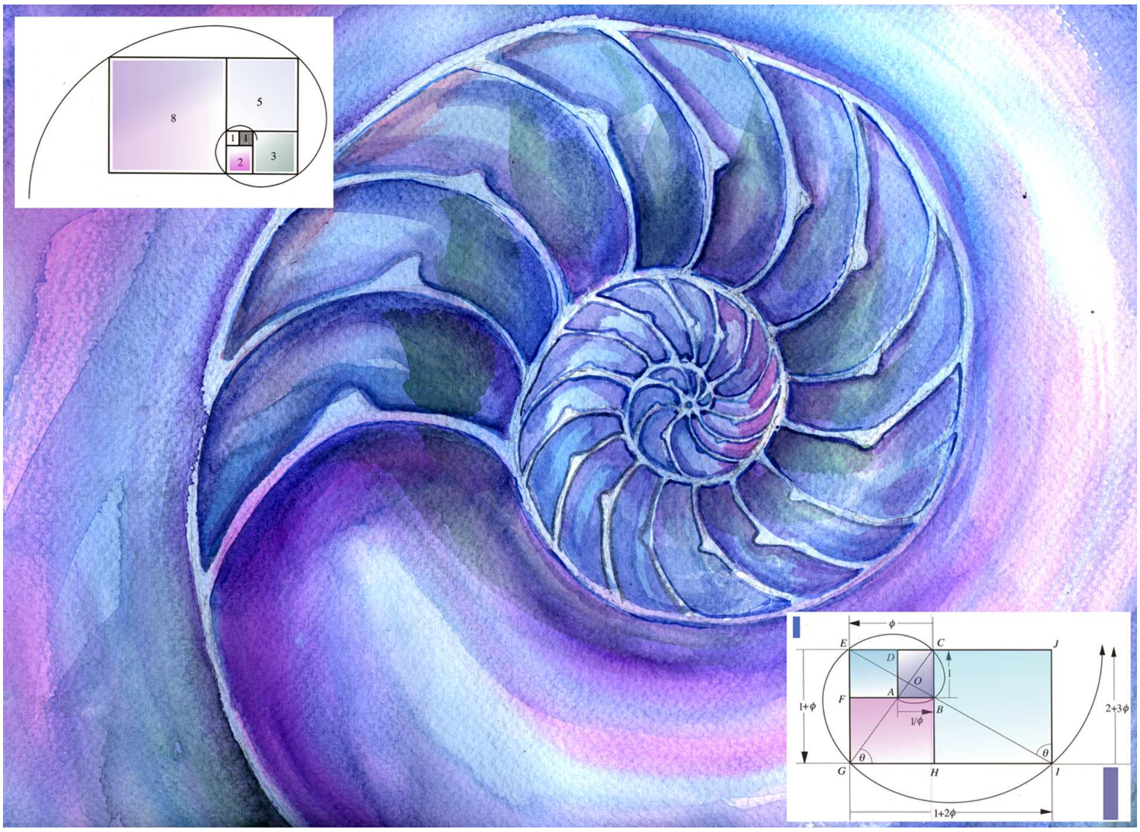
Solmu

Matematiikkalehti
2/2006

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 2/2006

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

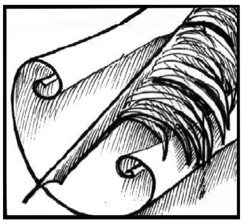
http://solmu.math.helsinki.fi/

Numeroon 3/2006 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään syyskuun 2006 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys



Oppikirjojakin voisi arvioida – ja erään muinaismuiston pelastaa

Monenlaisia asioita arvioidaan ja vertaillaan julkisesti. *Tekniikan Maailma* testaa autoja ja autokorjaamoja, *Tietokone* tulostimia ja digikameroita, *Kuluttaja* pölynimureita, päivä- ja aikakauslehdet taidenäyttelyjä, konsertteja ja kirjoja. On kuitenkin tärkeitä kirjoja, joista ei juuri missään mitään kirjoiteta. Koulukirjat.

Yleissivistävän koulun tarpeisiin julkaistaan jatkuvasti suurin painoksin eri aineiden oppikirjoja. Kirjojen kustantajat tekevät niitä tunnetuiksi mm. opettajille tarkoitetuissa esittelytilaisuuksissa, joissa viestiä viedään perille usein myös hyvien tarjoilujen kera. Ja opettajien yksityiset keskustelut tuntuvat aika usein liikkuvan oppimateriaalien ympärillä. Viidakkorumpu vie tietoa. Mutta onko kukaan nähnyt esimerkiksi matematiikankirjan arvostelua lehdessä? Tämän kirjoittaja on, 1940-luvun Matemaattisten aineiden aikakauskirjoissa. Mutta nykyajan matematiikan ”ammattilehdistä”, Dimensiosta ja Arkhimedeksesta kirjaesittelyjä hakee turhaan, samoin Opettajien ammattijärjestön värikkäästä viikkolehdestä Opettajasta. Ei oppikirjoja Helsingin Sanomatkaan arvostele. Oppikirjoja ei enää arvostele myöskään Opetushallitus, jonka hyväksymismerkintä oli taannoin kirjan välttämätön laatutae.

Miksi on näin? Ilkeämielinen tarkkailija saattaa ajatella kustantajien mainontaa. Voisivatko mahdollisesti kriittiset kommentit loukata ja ehkä pysäyttää mainosrahan kulun? Tuskin sentään. Kustantajat ovat ylipäänsä tottuneet tuotteittensa kriittiseen tarkasteluun ja pitävät varmaan lehtikirjoittelua omaakin markkinointia tukevana. Yhden kirjoitushaluttomuuden syyn aistii, kun katselee oppikirjojen kansia. Kirjoilla on tekijöitä helposti puoli tusinaa tai enemmän, joten mahdollinen arvostelija saattaa joutua punnitsemaan tuttavan tai ainakin tuttavantuttavan työhön puuttumista. Sellainen saattaa tuntua epämieluisalta. Ja kun oppikirja on eräänlainen opetuksen auktoriteetti oppilaisiin päin, saattaisi kriittinen kommentti synnyttää epämiellyttävää keskustelua luokassa tai aina kriittisemmiksi tulevien oppilaiden vanhempien parissa. Tai ehkä oppikirjoja ei kukaan pidä sillä tavoin kiinnostavina, että ajattelisi jonkun muun lukevan niiden esittelyjä.

Solmu aikoo nyt joka tapauksessa avata keskustelua oppikirjoista julkaisemalla ensimmäisen oppikirjaesittelynsä. Kohteeksi on valittu lukion pitkän matematiikan kirjasarjat, joilla voi arvella olevan merkitystä aika suurelle osalle mahdollisia lukijoitamme. Arvostelija ei ole kaikkitietävä tuomari, vaan hän esittää henkilökohtaisia mielipiteitään, joihin voi yhtyä tai olla yhtymättä. Omia mielipiteitään voi tuoda esiin vaikkapa Solmun keskustelupalstan kautta. Toivomme myös, että päänavauksemme saisi muutkin tahot, ennen muuta oppikirjojen avulla työtään tekevät, siis opettajat ja oppilaat, kirjoittamaan. Avoimen keskustelun luulisi lopulta koituvan kaikkien oppikirjan parissa toimivien, niin tekijöiden kuin käyttäjienkin eduksi. Solmun palstat ovat avoinna!

Pääkirjoitus

* * *

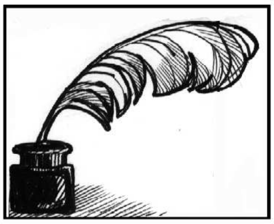
Varttuneempien kansalaisten tavatessa nousee aina silloin tällöin muisteluksen kohteeksi laskutikku. Siihen suhtaudutaan nostalgisen huvittuneesti: ajatella, kun ei ollut laskimia, niin kaikilla oli laskutikku ja sillä oikeasti laskettiin kaikenlaista.

Kävin talvella Helsingin messukeskuksessa Educa-messuilla, opetusalan kaupallisessa suurtapahtumassa. Monet näyttelyosastot pullistelivat erilaisia värikkäitä, kekseliäitä ja kalliitakin matematiikan opetuksen konkreettisia apuvälineitä. Ajatelkaapa, jos joku sattuisi nyt keksimään laskutikun. Yksinkertaisen laitteen, josta suoraan ja havainnollisesti voi lukea niin neliöt, kuutiot, neliöjuuret, kuutiojuuret, käänteisluvut ja trigonometristen funktioiden arvot ja jolla sananmukaisesti käden käänteessä voi kertoa ja jakaa mielivaltaisen monta kertaa tai ratkaista ei vain yksittäistä vaan kaikki verrantoyhtälöt ja siis esimerkiksi kaikki sinilauseella ratkeavat kolmiot, ja jonka käyttö kehittää suuruusluokan ymmärtämistä ja interpolaation tajua ja antaa konkretian logaritmikäsitteelle. Näin monipuolisen laitteen keksijästä tulisi varmaan rikas, sillä kaikki koulut haluaisivat varustaa oppilaansa niillä. No, laskutikku keksitiin 1600-luvulla ja se kuoli 1960-luvun lopussa, kun taskulaskin teki sen tarpeettomaksi. Mutta laskutikun hylkäämisessä meni lapsi pesuveden mukana.

Jos vanhempienne tai isovanhempienne kaapin kätköistä vielä löytyy laskutikku, niin pelastakaa se heti omaan käyttöönne. Tutkikaa, miten se toimii, leikkikää sillä ja ottakaa se hyötykäyttöön. Tehtävissä, joihin laskutikku soveltuu, se on melkein aina nopeampi kuin sähköiset korvikkeensa, ja usein paljon hauskempi ja opettavampi!

Matti Lehtinen

Pääkirjoitus



Luovat yhteisöt

Jokainen verkkojulkaisemisen tai verkko-oppimateriaalien kanssa tekemisissä ollut on todennäköisesti jossain vaiheessa törmännyt käsitteeseen Creative Commons eli CC. Se on voittoa tuottamaton organisaatio, jonka tarkoituksena on edistää erilaisten materiaalien verkossa tapahtuvaa julkaisemista ja käyttöönottoa. Creative Commons julkaisee lisenssejä, joiden avulla jokainen verkkomateriaalin tuottaja voi helposti määrittää materiaalinsa käyttöön liittyvät oikeudet ja rajoitukset ilman tarvetta lakimiehen apuun. Oikeuksien määrittäminen on välttämätöntä, jotta materiaalia voisi käyttää, monistaa ja muokata laillisesti. Tekijänoikeuslaki antaa tekijälle yksinoikeuden esimerkiksi materiaalissa olevien kirjoitusvirheiden korjaamiseen, ja siksi tarve muokkaamiseen syntyy materiaalia ylläpidettäessä. Toinen oppimateriaalin osalta tyypillinen tilanne syntyy, jos materiaalia joudutaan siirtämään teknisesti vanhentuneesta formaatista tai mediasta (esimerkiksi VHS-kasetilta) uudenaikaisempaan. Oikeuksien hankkiminen jälkikäteen saattaa olla hyvin hankalaa, koska kaikkia tekijöitä ei ehkä pysytä tavoittamaan. Paljon käyttökelpoista materiaalia menetetään, koska tällaisiin asioihin ei ole kiinnitetty tarpeeksi huomiota materiaalia tuotettaessa.

Creative Commons -lisenssit, joita on tällä hetkellä 11 erilaista, ovat muodostumassa standardiksi verkossa tapahtuvassa ei-kaupallisessa julkaisemisessa. Kantavana filosofiana on, että jokainen tekijän materiaaliinsa antama oikeus on loppukäyttäjän etu, ja siksi on parempi antaa vähän oikeuksia kuin olla antamatta mitään.

Tyypillisiä rajoittavia lisenssiehtoja ovat esimerkiksi: tekijän nimi mainittava, ei kaupalliseen käyttöön, ei muokkausta (käyttö ja kopioiminen sallittu), sama lisenssi muokatuille teoksille (nk. copyleft-lisenssi).

Standardoitujen lisenssien käyttämisestä saadaan esimerkiksi seuraavia etuja:

1. Lisenssiteksti on jo valmiiksi lakimiesten kirjoittamaa ja tarkastamaa, eikä tähän tarvitse enää käyttää aikaa.

2. Materiaalien käyttäjät ja tuottajat tuntevat valmiiksi lisenssien ehdot ja voivat luottaa niihin tarvitsematta perehtyä jokaisen sopimuksen yksityiskohtiin.

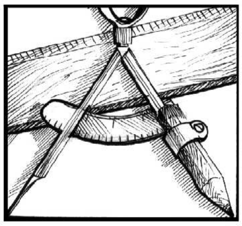
3. Ristiriitaisten lisenssien käyttämisestä johtuvat ongelmat erilaisten materiaalien yhdistämisessä vähenevät.

4. Lisenssi on saatavissa useilla eri kielillä, ja se on havaittu yhteensopivaksi erilaisten kansallisten lainsäädäntöjen ja kansainvälisten sopimusten kanssa.

Creative Commons toimii myös yhteistyössä erilaisten hakukoneiden kanssa mahdollistaakseen lisenssiehtojen mukaisten materiaalien etsimisen. Lisätietoa Creative Commonsin tavoitteista ja julkaisemista lisensseistä löytyy verkkosivulta: `http://creativecommons.fi/`.

Antti Rasila

Toimitussihteerin palsta



Johtosuora ja polttopiste: toisen asteen käyrät

Petteri Harjulehto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Johdanto

Toisen asteen käyriksi sanotaan kaikkia niitä tason käyriä, jotka ovat muotoa

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Tässä a, b, c, d, e ja f ovat reaalilukuja. Tässä kirjoituksessa paneudumme paraabeliin, ellipsiin ja hyperbeliin. Ylöspäin aukeavan paraabelin, jonka huippu on origossa, yhtälö on

$$y = ax^2, \text{ missä } a > 0.$$

Origokeskisen ellipsin yhtälö on

$$ax^2 + by^2 = 1, \text{ missä } a, b > 0,$$

ja origokeskisen hyperbelin yhtälö on

$$ax^2 - by^2 = \pm 1, \text{ missä } a, b > 0.$$

Osoitamme, että paraabeli, ellipsi ja hyperbeli ovat hyvin samankaltaisia käyriä ja niille voidaan antaa yhteinen geometrinen määritelmä. Valitsemamme määritelmä perustuu annettuun suoraan,pisteeseen ja reaaliseen vakioon. Tämä ei ole ainut geometrinen määritelmä, vaan esimerkiksi ellipsi ja hyperbeli voidaan määritellä myös kahden polttopisteensä avulla.

Olkoot l annettu tason suora ja P annettu tason piste, joka ei ole suoralla l. Olkoon e positiivinen vakio. Tutkimme niiden pisteiden uraa, joiden etäisyys pisteestä P on vakio e kertaa etäisyys suorasta l. Uraan kuuluvat siis kaikki pisteet Q, jotka toteuttavat yhtälön

$$\operatorname{dist}(Q, P) = e \operatorname{dist}(Q, l). \tag{1}$$

Tässä dist tarkoittaa kahden pisteen tai pisteen ja suoran välistä (euklidista) etäisyyttä. Suoraa l sanotaan johtosuoraksi, pistettä P polttopisteeksi ja vakiota e eksentrisyydeksi. Jos $0 < e < 1$, sanomme, että ura on ellipsi, jos $e = 1$, niin paraabeli, ja jos $e > 1$, niin hyperbeli. Lisätietoja valitsemastamme määritelmästä löytyy kirjasta

D. A. Brannan, M. F. Esplen ja J. J. Gray: *Geometry*, Cambridge University Press, 1998.

Paraabeli

Tutkimme aluksi tapausta $e = 1$. Olkoon $a > 0$, l_a suora $y = -a$ ja P_a piste $(0, a)$. Etsimme pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana johtosuorasta ja polttopisteestä.

Pisteen $Q = (x, y)$ etäisyyteen suorasta l_a ei vaikuta lainkaan x-koordinaatti, joten saamme etäisyydeksi $|y + a|$. Pisteiden Q ja P_a väliseksi etäisyydeksi saamme tutulla kaavalla $\sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2}$. Yhtälö (1) muuntuu siis muotoon

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = |y + a|.$$

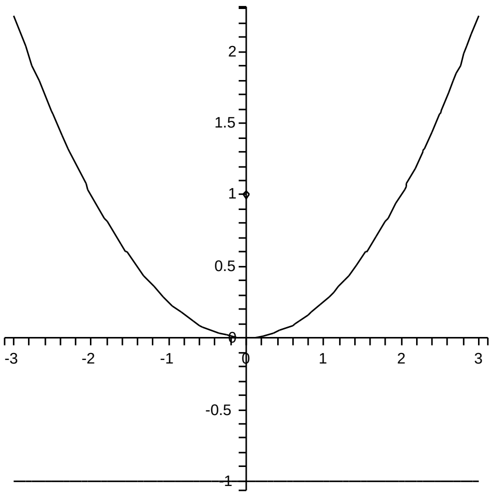
Korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin saamme

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2,$$

ja edelleen

$$x^2 = 4ay \text{ eli } y = \frac{x^2}{4a}.$$

Kyseessä on siis tuttu ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa. Kuvaan 1 on piirretty tapaus $a = 1$ sekä johtosuora ja polttopiste.



Kuva 1. Paraabeli.

Vastaavasti saamme alaspäin aukeavan paraabelin valitsemalla $y = a$ ja $(0, -a)$. Valinnoilla $x = -a$ ja $(a, 0)$ sekä $x = a$ ja $(-a, 0)$ saamme muotoa $x = \frac{y^2}{4a}$ ja $x = -\frac{y^2}{4a}$ olevat paraabelit.

Paraabelin muotoon vaikuttaa vain johtosuoran ja polttopisteen välinen etäisyys. Näin esimerkiksi Kuvan 1 paraabeli on yhtenevä kaikkien niiden paraabeli kanssa joiden johtosuora on $y = -1$ ja polttopiste on muotoa $(r, 1)$, missä r on reaaliluku. Näiden kaikkien paraabelien huiput sijaitsevat x-akselilla.

Valitsemalla suoran, joka ei ole kummankaan koordinaattiakselin kanssa yhdensuuntainen, saamme "vinossa" olevan paraabelin. Olkoon esimerkiksi $y = x + 1$ johtosuora ja $(-2, 2)$ polttopiste. Tällöin pisteen $Q = (x, y)$ etäisyys johtosuorasta on

$$\frac{|1 \cdot x + (-1) \cdot y + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

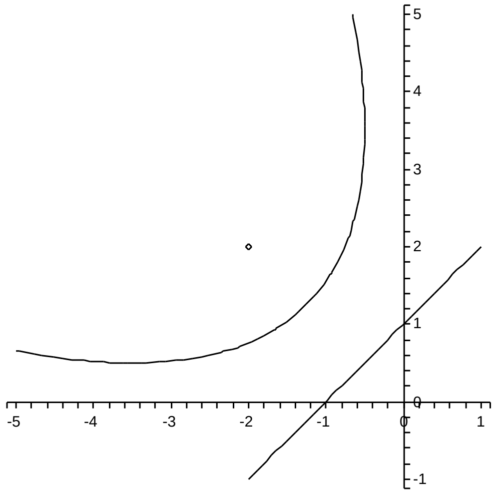
ja pisteen Q etäisyys polttopisteestä on $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$. Yhtälö (1) muuntuu siis muotoon

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}.$$

Korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin ja muokkaamalla saatua tulostaa saamme

$$x^2 + y^2 + 2xy + 6x - 6y + 15 = 0.$$

Tämän paraabelin kuvaaja, yhdessä johtosuoran ja polttopisteen kanssa, on esitetty Kuvassa 2.



Kuva 2. Paraabeli.

Ellipsi

Tutkimme sitten tapausta $0 < e < 1$. Olkoon $a > 0$. Valitsemme johtosuoraksi $x = a/e^2$ ja polttopisteeksi $(a, 0)$. Tällöin yhtälö (1) muuntuu muotoon

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = e\left|x - \frac{a}{e^2}\right|.$$

Korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin ja muokkaamalla saatua lauseketta saamme

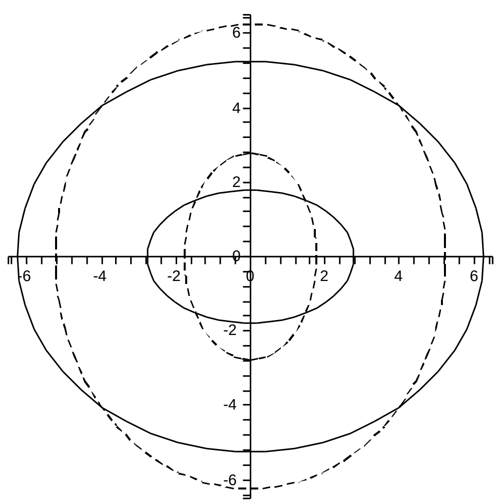
$$\frac{e^2}{a^2}x^2 + \frac{e^2}{a^2(1-e^2)}y^2 = 1. \tag{2}$$

Kyseessä on origokeskeinen ellipsi. Valitsemalla johtosuoraksi $x = -a/e^2$ ja polttopisteeksi $(-a, 0)$ saamme saman ellipsin.

Valitsemme sitten johtosuoraksi $y = a/e^2$ ja polttopisteeksi $(0, a)$. Tällöin saamme

$$\frac{e^2}{a^2}y^2 + \frac{e^2}{a^2(1-e^2)}x^2 = 1. \tag{3}$$

Kuvassa 3 on esitetty ellipsien (2) kuvaajat tavallisella viivalla ja ellipsien (3) kuvaajat katkoviivalla arvoilla $e = \frac{3}{5}$ ja $e = \frac{2}{5}$ sekä $a = 1$. Saman eksentrisyyden omaavat ellipsit ovat samanmuotoisia, mutta ne ovat toisiinsa nähden 90 asteen kulmassa.

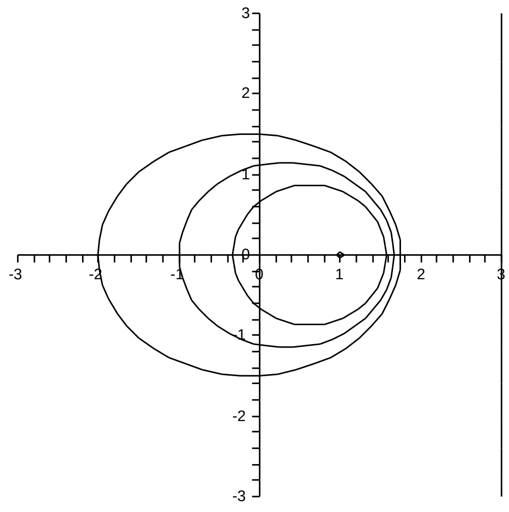


Kuva 3. Origokeskeisiä ellipsejä.

Miten eksentrisyys vaikuttaa ellipsin muotoon? Kiinnitämme johtosuoran ja polttopisteen, esimerkiksi $x = 3$ ja $(1, 0)$. Tällöin saamme ellipsit

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + (6e^2 - 2)x + 1 - 9e^2 = 0.$$

Kuvassa 4 on esitetty johtosuora, polttopiste sekä ellipsit eksentrisyyden arvoilla $\frac{2}{5}$ (sisimmäinen), $\frac{1}{2}$ (keskimmäinen) ja $\frac{3}{5}$ (ulommainen).



Kuva 4. Ellipsejä eksentrisyyden eri arvoilla.

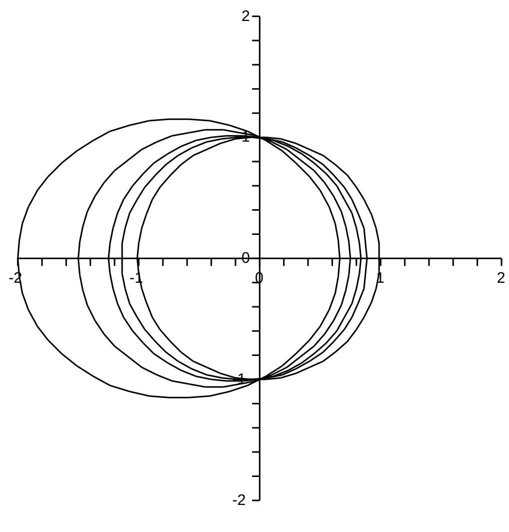
Käyttämämme määritelmä ei suoraan anna mahdollisuutta määritellä ympyrää. Ympyrä voidaan kuitenkin tulkita ellipsinä, jonka johtosuora on äärettömyydessä. Kiinnitämme polttopisteeksi origon ja johtosuoraksi $x = \frac{a}{e}$, $a > 0$. Tällöin saamme ellipsit

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2eax = a^2.$$

Kun $e \to 0$, niin johtosuora etäisyys origosta kasvaa rajatta, ja saamme

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

joka on origokeskinen a säteinen ympyrä. Kuvassa 5 on esitetty ellipsit eksentrisyyden arvoilla $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{100}$, kun $a = 1$.



Kuva 5. Ellipsejä, kun johtosuora lähestyy ääretöntä.

Hyperbeli

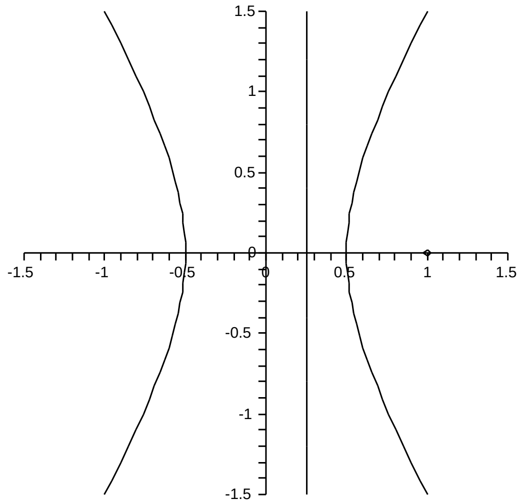
Viimeiseksi tutkimme tapausta $e > 1$ eli hyperbeliä. Valitsemme saman johtosuoran ja polttopisteen kuin orikokeskisen ellipsin tapauksessa eli $x = a/e^2$ ja $(a, 0)$, $a > 0$. Tällöin yhtälö (1) muuntuu muotoon

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = e\left|x - \frac{a}{e^2}\right|.$$

Saamme tämän muokattua muotoon

$$\frac{e^2}{a^2}x^2 - \frac{e^2}{a^2(e^2-1)}y^2 = 1.$$

Kyseessä on origokeskinen hyperbeli. Valitsemalla johtosuoraksi $x = -a/e^2$ ja polttopisteeksi $(-a, 0)$ saamme saman hyperbelin. Kuvassa 6 on ensiksi mainittu hyperbeli, johtosuora ja polttopiste, kun $e = 2$ ja $a = 1$.



KUVA 6. Hyperbeli.

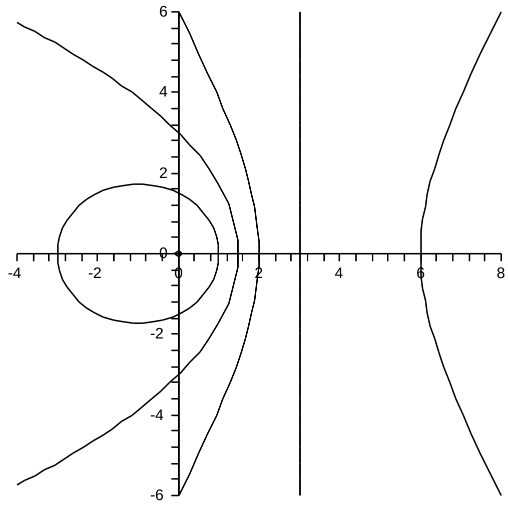
Piirrämme lopuksi samaan kuvaan paraabelin, ellipsin ja hyperbelin. Tätä varten kiinnitämme johtosuoraksi $x = 3$ ja polttopisteeksi origon. Tällöin yhtälö (1) muuntuu muotoon

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e\,|x - 3|\,,$$

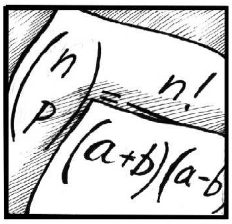
mistä saamme

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 6e^2x - 9e^2 = 0.$$

Kuvasta 7 on esitetty kuvaajat eksentrisyyden arvoilla $\frac{1}{2}, 1, 2$, sekä johtosuora ja polttopiste.



KUVA 7. Paraabeli, ellipsi ja hyperbeli.



Suklaa, kauneus ja matematiikka

Tuomas Korppi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Ratkaisun löytäminen matemaattiseen probleemaan ei ole useinkaan helppoa. Tässä tekstissä kuvailen ajatusprosessin, jonka jouduin käymään läpi saadakseni ratkaistua Tommi Sottisen minulle esittämän kysymyksen.

Oletetaan, että meillä on $k \times l = n$ palan suklaalevy, joka pitäisi pilkkoa yhden palan kokoisiksi osiksi. Käytämme seuraavaa menetelmää:

Katkaisemme levyn palojen välistä (suoraviivaista) jakoviivaa pitkin, ja saamme kaksi osaa. Sen jälkeen valitsemme jonkun osan, ja katkaisemme sen palojen välistä jakoviivaa pitkin. Toistamme tätä osan valitsemista ja sen halkaisemista, kunnes suklaa on täysin pilkottu.

Ylläesitetty pilkkomissysteemi jättää kuitenkin pilkkojalle valinnanvaraa. Hän voi esimerkiksi aloittaa halkaisemalla levyn joko pitkittäis- tai poikittaissuunnassa. Hän voi myös halkaista levyn keskeltä tai katkaista pelkästään yhden rivin levyn päästä. Pilkkoja on laiska, ja niinpä hän haluaisi saada levyn yhden palan kokoisiin osiin mahdollisimman vähällä työllä. Kuinkahan hänen kannattaisi käyttää pilkkomissysteemin jättämä valinnanvara?

> **Kysymys:** Kuinka pilkkomiskohdat kannattaisi valita, että suklaalevy saataisiin yhden palan kokoisiksi osiksi mahdollisimman vähillä pilkkomisilla? Kuinka monta pilkkomista tällöin tarvitaan?

Tietokoneohjelmoinnin matemaattisessa tarkastelussa törmätään usein ylläesitetyn kysymyksen kaltaisiin probleemoihin. Tietokone pitäisi saada ratkaisemaan haluttu ongelma mahdollisimman vähillä laskenta-askeleilla, ja usein käy niin, että ensiksi mieleen tuleva tapa ei ole nopein mahdollinen.

Tarkastellaan esimerkiksi listaa, jossa on n lukua suuruusjärjestyksessä, ja tietokone pitäisi ohjelmoida vastaamaan kysymykseen ”onko luku k listassa?” Voimme esimerkiksi kirjoittaa ohjelman, joka käy listan läpi alusta loppuun, ja jokaisen listan alkion kohdalla tarkastaa, onko kyseinen listan alkio k. Ohjelma toimii, mutta se joutuu tekemään pahimmillaan n askelta, yhden jokaista listan alkiota kohti.

Parempi tapa ratkaista ongelma onkin seuraava: Tarkastellaan ensin listan keskimmäistä alkiota[1]. Jos se on k, on ongelma ratkaistu. Jos se on suurempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään listan alkupuolta. Jos se on pienempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään listan loppupuolta. Seuraavaksi otetaan edellä valittu listan puolikas, ja sen keskimmäinen alkio. Jos se on k, on ongelma ratkaistu. Jos se on suurempi kuin k,

[1] Jos listassa on pariton määrä alkioita, on listassa yksikäsitteinen keskimmäinen alkio. Mikäli listassa on parillinen määrä alkioita, valitaan jompi kumpi kahdesta keskimmäisestä alkiosta. Menetelmän toimivuuden kannalta on yhdentekevää, kumpi valitaan.

tarkastellaan jatkossa pelkästään valitun listanpuolikkaan alkupuolta. Jos se on pienempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään valitun listanpuolikkaan loppupuolta. Toistetaan sama valitulle listan neljäsosalle, sitten kahdeksasosalle, ja niin edelleen, kunnes k on löytynyt, tai valittu listan osa on huvennut tyhjiin (jolloin k ei ole listassa). Tällä menetelmällä vaaditaan enimmillään noin $\log_2 n$ laskenta-askelta: Jos listan pituus on esimerkiksi 65536 alkiota, askeleita on enimmillään vain 16, eli systeemi on huomattavan nopea.

Suklaalevyä voidaan puolitella hiukan samaan tapaan kuin taulukkoa yllä, joten matemaattisesti koulittu henkilö muodostaa lähes alitajuisesti seuraavan konjektuurin:

> Hyvällä taktiikalla vaadittu pilkkomisten määrä on jotakuinkin $\log_2 n$.

Havaitaan myös, että saman kokoisia, mutta eri muotoisia levyjä voidaan pilkkoa eri tavalla. 4×1-levystä voidaan ottaa yksi pala erilleen, mutta 2×2-levystä täytyy lohkaista kaksi palaa kerralla. Niinpä muodostamme seuraavan konjektuurin:

> Suklaalevyn muoto eli ”geometria” vaikuttaa vaadittujen lohkomisten määrään.

Tämä on täysin normaali menetelmä probleemoja ratkaistessa: Ensin arvataan väittämiä, ja sitten yritetään todistaa ne. Tässä tapauksessa sankarimme ei kuitenkaan keksi, kuinka näitä konjektuureja voisi lähteä todistamaan.

Kun lennokkaat ideat eivät toimi, on aika palata maan tasalle. Otamme siis pieniä levyjä, ja tapaus tapaukselta katsomme läpi, kuinka monta pilkkomista ne vaativat. Tarkoituksena on nähdä, josko levyn koon/muodon ja vaaditun pilkkomisten määrän välille löytyisi jokin yhteys.

- 1×1-levy? Se on jo valmiiksi yhden palan kokoinen. Siis 0 pilkkomista.
- 2×1-levy? Sen voi pilkkoa vain yhdellä tavalla. Siis 1 pilkkominen.
- 2×2-levy? Ainoa tapa on pilkkoa ensin kahdeksi 2×1-levyksi, jotka pilkotaan sitten yhden palan kokoisiksi. Siis 3 pilkkomista.
- 4×1-levy? Nyt voidaan pilkkoa kahdella tavalla. Ensimmäinen vaihtoehto on pilkkoa ensin kahdeksi 2×1-levyksi, jolloin tilanne on sama kuin edellisessä tapauksessa. Toinen vaihtoehto on irroittaa ensin yksi pala, sitten yksi pala lisää, ja lopuksi halkaista 2×1-levy kahtia. Siis 3 pilkkomista kummallakin tavalla.
- 3×2-levy? Edelleen kaksi tapaa pilkkoa. Joko ensin kahdeksi 3×1-levyksi, jotka paloiksi, tai ensin kolmeksi 2×1-levyksi, jotka paloiksi. Molemmilla tavoilla 5 pilkkomista.

Kaikissa yllämainituissa tilanteissa kävi niin, että n palan levyn paloittelu vaati $n - 1$ pilkkomista riippumatta levyn geometriasta tai valitusta pilkkomistaktiikasta. Tässä vaiheessa heitämmekin edelliset konjektuurit romukoppaan, ja yritämme todistaa uutta konjektuuria:

> Kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee, että n palan levyn paloittelu vaatii $n - 1$ pilkkomista riippumatta levyn geometriasta tai valitusta pilkkomistaktiikasta.

Todistettaessa väittämiä kaikille luonnollisille luvuille kannattaa käyttää induktiota:

- $n = 1$*:* 1×1-levyn paloitteluun tarvitaan 0 pilkkomista. Siis väite pätee tässä tapauksessa.
- $n > 1$ *mielivaltainen, väite pätee kaikille luvuille* m*, jotka ovat pienempiä kuin* n*:* n palan kokoinen levy pilkotaan ensin kahteen osaan (1 pilkkominen!), kooltaan m, m'. Sitten m ja m' palan kokoiset osat pilkotaan yhden palan kokoisiksi. Tämä vaatii $m - 1$ ja $m' - 1$ pilkkomista induktio-oletuksen nojalla (ja on riippumaton pilkkomistaktiikasta). Yhteensä siis tehdään $(m - 1) + (m' - 1) + 1 = m + m' - 1 = n - 1$ pilkkomista. Induktio valmis.

Nyt olemme todistaneet konjektuurimme. Induktiotodistuksissa on yleensä yksi ikävä piirre. Ne kertovat meille, *että* väite pätee, mutta ne eivät kerro meille, *miksi* se pätee. Löytyisiköhän konjektuurillemme toinen todistus, joka auttaisi meitä hahmottamaan tilanteen paremmin?

n palan kokoisen levyn paloitteleminen vaatii $n - 1$ pilkkomista. Olisikohan prosessin vaiheilla jokin sellainen ominaisuus, joka kasvaa pilkkomisen myötä? Siis niin, että alussa tuo ominaisuus olisi yksi, yhden pilkkomisen jälkeen kaksi, kahden pilkkomisen jälkeen kolme ja niin edelleen, ja kokonaan paloitellulla levyllä n?

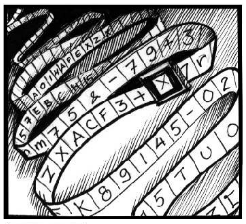
Tässä vaiheessa ratkaisija lyö otsaansa. Tällainen ominaisuus on tietysti olemassa, nimittäin suklaapalasten määrä!

Niinpä saamme konjektuurillemme seuraavan todistuksen:

> Alussa suklaa on yhdessä klöntissä, ja haluttua lopputilaa luonnehtii se, että suklaa on n osassa. Jokainen pilkkominen kasvattaa osien määrää yhdellä (riippumatta valitusta pilkkomistaktiikasta), joten n osaan pääseminen vaatii $n - 1$ pilkkomista.

Matematiikassa on kauneutta. Matemaattinen kauneus ei kuitenkaan synny kauniista käsialasta tai sulavasti piirretyistä summamerkeistä, vaan se on ennemmin samaa lajia kuin hyvän vitsin aiheuttama esteettinen mielihyvä: Tilanne ratkeaa, kun se nähdään uudessa, yllättävässä valossa.

Epilogi: Tässä tapauksessa osoittautui, että vaadittu pilkkomisten määrä ei ollutkaan suklaalevyn koon logaritmi, vaikka aluksi niin yritinkin osoittaa. Pilkkomisongelman kysymyksenasettelua voidaan kuitenkin muuttaa niin, että ”pilkkomisten määrä on jotakuinkin suklaalevyn koon logaritmi” on oikea vastaus. Keksiikö lukija, millaisia operaatioita suklaalevyn pilkkojalle pitäisi sallia, että hän saisi suklaan pilkottua yhden palan kokoisiin osiin ajassa, joka on jotakuinkin logaritmi levyn koosta? Millaisilla levyillä pilkkomisten määrä on tarkalleen $\log_2 n$?



Moniarvoiset kompleksifunktiot ja laskentaohjelmat

Simo K. Kivelä
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Matti Lehtisen artikkeli *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista* sisälsi tiiviin yhteenvedon kompleksiluvuista, mutta kaikkea laskentaohjelman käyttäjälle tarpeellista ei ehkä kuitenkaan tullut sanotuksi.

Jos nimittäin yrittää laskea luvun -1 kuutiojuurta melkeinpä millä tahansa modernilla laskentaohjelmalla tai kompleksiluvut tuntevalla laskimella, tulokseksi tulee

$$\sqrt[3]{-1} = \tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Eikö tämä siis olekaan -1?

Olkoon $z_1 = -1 + i$ ja $z_2 = -1 + 2i$, jolloin $z_1 z_2 = -1 + 3i$. Tällöin laskentaohjelma antaa

$$\log(z_1) + \log(z_2) - \log(z_1 z_2) = 2\pi i,$$

missä log tarkoittaa luonnollista logaritmia, kuten kompleksifunktioiden yhteydessä on tapana merkitä. Eikö tavallinen logaritmien laskusääntö siis pädekään kompleksialueella?

Ilman laskentaohjelmaakin voidaan ajautua kummallisiin laskuihin:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Koska 1 ja -1 tunnetusti ovat eri asioita, jonkin yhtäläisyysmerkin täytyy olla väärä, ehkä useammankin. Mutta mikä niistä on väärä?

Selityksenä on, että kompleksifunktiot ovat hieman mutkikkaampia olioita kuin vastaavat funktiot reaalialueella. Voidaan ajatella, että neliöjuurella on kaksi arvoa: esimerkiksi $\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt{-3+4i} = 1 + 2i$ tai $= -1 - 2i$. Kuutiojuurella on vastaavasti kolme arvoa, kuten Matti Lehtisen artikkelista ilmenee. Logaritmilla arvoja on äärettömän paljon: $\log z = \log|z| + i \arg z + 2n\pi i$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

Tällaiset kompleksifunktiot eivät oikeastaan ole funktioita lainkaan nykyään käytetyn määritelmän mielessä. Funktiolta $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nimittäin vaaditaan, että se liittää jokaiseen lähtöjoukon pisteeseen *yksikäsitteisen* maalijoukon pisteen. (Lähtöjoukko voi toki olla koko kompleksitasoa suppeampikin joukko, kuten logaritmin tapauksessa onkin: origo ei kuulu joukkoon.)

Aiemmin kompleksifunktiot on yleensä mielletty moniarvoisina funktioina ja silloin mikään edellä mainituista esimerkeistä ei ole ongelmallinen: On vain ajateltava, että kun monista mahdollisista arvoista valitaan yksi oikealla tavalla, niin kaavat toteutuvat.

Nykyään kuitenkin yleensä pitäydytään funktion määritelmän yksikäsitteisyysvaatimukseen ja laskentaohjelmien tapauksessa tämä on välttämätöntäkin.

Tällöin joudutaan uuden ongelman eteen: Miten useista mahdollisista arvoista kiinnitetään se, joka määritellään funktion arvoksi? Ongelma koskee neliöjuurta jo reaalialueellakin, ja tällöin arvoksi tunnetusti kiinnitetään kahdesta vaihtoehdosta positiivinen: $\sqrt{4} = +2$ tai yleisemmin $\sqrt{x^2} = |x|$.

Kompleksialueella yhtä yksinkertaista ratkaisua ei ole. Lähtökohtana on kompleksiluvun *napakulman* eli *argumentin* arvojen kiinnittäminen. Tämäkin on nimittäin moniarvoinen funktio: Jos luvun z argumentti on $\arg z = \varphi$, jokainen luku $\varphi + 2n\pi$, missä n on kokonaisluku, kelpaa argumentiksi aivan yhtä hyvin. Argumentti kiinnitetään yleensä välille $-\pi < \arg z \leq \pi$. (Tämä johtaa laskennallisesti yksinkertaisempiin lausekkeisiin kuin jossakin mielessä luontevampi ja varsinkin aikaisemmin lähes yksinomaan käytetty valinta $0 \leq \arg z < 2\pi$.)

Argumentin kiinnittäminen ratkaisee arvojen valinnan sekä juurten että logaritmin tapauksessa. Juuren $\sqrt[n]{z}$ arvoksi valitaan se, jonka argumentti on $\arg z/n$. Logaritmin tapauksessa monikäsitteisyys johtuu argumentin monikäsitteisyydestä, jolloin argumentin kiinnittäminen antaa määritelmän suoraan: $\log z = \log|z| + i \arg z$. Tällä tavoin yksikäsitteisesti määriteltyjä funktioita kutsutaan usein moniarvoisen funktion *päähaaraksi*. Jos arvon kiinnittäminen on tehty jollakin muulla tavalla, puhutaan *sivuhaarasta*.

Esimerkiksi luvun $\sqrt[3]{-1}$ arvo määräytyy siitä, että luvun -1 napakulma eli argumentti kompleksitasossa on π, ja kuutiojuuri on siis kolmesta vaihtoehdosta se kompleksiluku, jonka napakulma on $\pi/3$.

Kaikkea ei kuitenkaan voi saada. Kiinnittämällä monista mahdollisista arvoista yksi menetetään monet totutut laskusäännöt. Esimerkiksi $\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$ ei yleisesti päde, sama koskee tulon logaritmin laskusääntöä. Säännöt ovat kuitenkin 'melkein' voimassa: Syntyvät erot voidaan luonnehtia siten, että on tapahtunut siirtyminen saman funktion jollekin sivuhaaralle.

Monihaaraisten funktioiden ongelma ei rajoitu juuritai logaritmifunktioihin. Esimerkiksi trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot, ns. arcus-funktiot ovat moniarvoisia jo reaalialueella. Näidenkin arvot kiinnitetään nykyään yksikäsitteisellä tavalla. Esimerkiksi $\tan(\pi/4 + n\pi) = 1$ kaikilla kokonaisluvuilla n, mutta käänteisfunktiolle arctan asetetaan $\arctan(1) = \pi/4$.

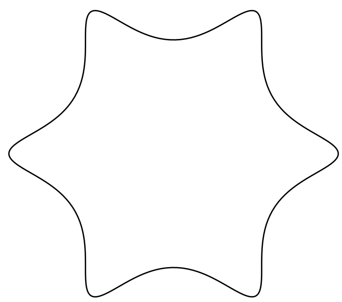
Harjoitustehtävä

Lukija saakoon lopuksi harjoitustehtävän: Kompleksitason yksikköympyrän parametriesitys on $z = \cos(t) + i\sin(t)$, $-\pi < t \leq \pi$, ts. kaikki yksikkömpyrän pisteet saadaan antamalla parametrille t kaikki arvot kyseiseltä väliltä. Yksikköympyrä kuvataan kompleksitasoon (tason kopioon, voidaan ajatella) kuvauksella

$$w = \left(z^p + \frac{1}{2z^p}\right)^{1/p},$$

missä p on luonnollinen luku. Millainen käyrä tällöin syntyy, kun vaaditaan, että p:nnen juuren arvot on valittava funktion sopivilta haaroilta siten, että käyrästä tulee jatkuva?

Helpointa on ehkä kirjoittaa ohjelmakoodi, joka piirtää tällaisia käyriä. Malliksi käyrä arvolla $p = 3$. Piparkakkukäyristä on yleisestikin kyse.

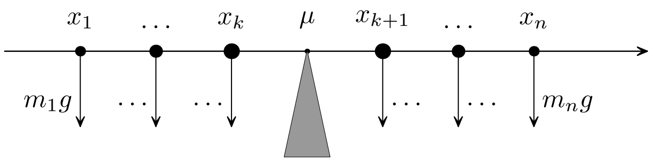


Painopiste

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Sanomme tasa-aineiseksi kappaletta, jonka materiaalissa ei ole sisäisiä tiheyden vaihteluja. Tällaisen kappaleen painopisteen sijainti voidaan joskus päätellä kappaleen muodon perusteella. Esimerkiksi tasa-aineisen pallon painopiste on selvästi pallon keskipiste. Jos tasa-aineisella kappaleella on symmetria-akseli, niin painopiste on akselilla ja jos kappaleella on useampia symmetria-akseleita, niin painopiste on niiden leikkauspiste. Tutkimme painopisteen laskemista siinä tapauksessa, että kappaleella on yksi symmetria-akseli. Ongelma johtaa integraalilaskentaan ja tarjoaa mainioita mahdollisuuksia soveltaa lukiossa opittua laskutekniikkaa. Tarvittavan perusfysiikan kertaamiseksi tutkimme aluksi suoralla sijaitsevaa diskreettiä massajakaumaa.

Pistemäiset massat $m_1, \ldots, m_n$, joiden summa on m, sijaitkoot x-akselin pisteissä $x_1, \ldots, x_n$. Painopiste μ sijaitsee jossakin väleistä $[x_k, x_{k+1}[$. Jakauma on μ:n suhteen tasapainossa, jos pisteisiin x_i vaikuttavien voimien μ:n suhteen laskettujen momenttien summa on nolla. Koska massat ovat suoralla, voimme merkitä μ:n molemmin puolin laskettujen momenttien itseisarvot keskenään yhtäsuuriksi.



Kuva 1.

Saamme yhtälön

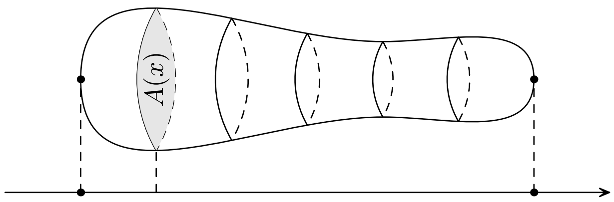
$$\sum_{i=1}^{k}(\mu - x_i)m_i g = \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - \mu)m_i g,$$

josta edelleen

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i. \tag{1}$$

Perehdymme seuraavaksi kappaleisiin, joiden massajakauma on jatkuva. Integraalilaskennan perusidean kertaamiseksi katsomme aluksi, miten kappaleen tilavuus lasketaan.

Olkoot a ja b kappaleen ääripäiden projektiot x-akselilla. Jos kappaletta leikataan x-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla ja tunnetaan leikkauskuvion pinta-ala $A(x)$ jokaisessa pisteessä $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus voidaan laskea.

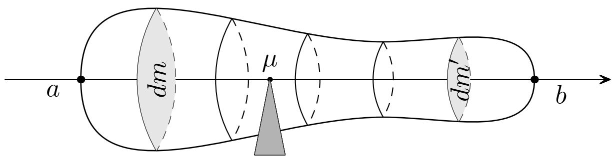


Kuva 2.

Kohdassa x oleva *tilavuusalkio* on $dV = A(x)\,dx$ ja kappaleen tilavuus saadaan summaamalla välillä $[a, b]$ olevat tilavuusalkiot:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Oletamme nyt, että kiinteällä kappaleella on yksi symmetria-akseli, jonka valitsemme x-akseliksi. Kappaleen ääripäät sijaitkoot pisteissä a ja b. Määritämme kappaleen painopisteen momenttiehtoa soveltamalla. Jaetaan kappale x-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla levymäisiksi massa-alkioiksi kuvan osoittamalla tavalla.



Kuva 3.

Pisteissä x ja x' oleviin massa-alkioihin dm ja dm' vaikuttavien voimien momenttialkiot (niiden itseisarvot) μ:n suhteen ovat $(\mu - x)g\,dm$ ja $(x' - \mu)g\,dm$. Summaamalla ne μ:n molemmin puolin saamme yhtälön

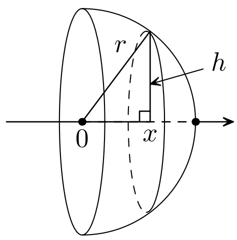
$$\int_a^\mu (\mu - x)g\,dm = \int_\mu^b (x' - \mu)g\,dm',$$

josta, merkitsemällä $m = \int_a^b dm$, edelleen

$$\mu = \frac{1}{m}\int_a^b x\,dm. \tag{2}$$

Yhtälöt (1) ja (2) näyttävät samanlaisilta, mutta niillä on eräs selkeä eroavaisuus: yhtälö (1) on valmis laskukaava, jonka avulla voidaan laskea diskreetin massajakauman painopiste sijoittamalla kaavaan massat ja niiden koordinaatit kun taas yhtälö (2) on pikemminkin toimintaohje laskun suorittamiseksi, sillä massa-alkio dm on muodostettava aina tapauskohtaisesti. Kaava (2) toimii myös silloin, kun kappaleen tiheys (massa pituusyksikköä kohti) vaihtelee. Tiheys on tällöin tunnettava jokaisessa kohdassa x eli on tunnettava *tiheysfunktio* f, jonka arvo ilmoittaa kappaleen tiheyden leikkauskohdassa x. Jos $y = f(x)$ on tällainen funktio, niin $\frac{dm}{dx} = f(x)$ ja siis kohdassa x oleva massa-alkio on $dm = f(x)\,dx$.

Esimerkki. Määritämme tasa-aineisen r-säteisen puolipallon painopisteen. Olkoon m kappaleen massa jolloin tiheys on $\rho = m/V$, missä $V = 2\pi r^3/3$. Puolipallon symmetria-akseli on halkaisijatasoa vastaan kohtisuora säde.



Kuva 4.

Kuvan mukaan kohdassa x oleva tilavuusalkio on $dV = \pi h^2\,dx = \pi(r^2 - x^2)\,dx$ ja sitä vastaava massa-alkio on

$$dm = \rho\,dV = \frac{3m}{2r^3}\left(r^2 - x^2\right)dx.$$

Saamme

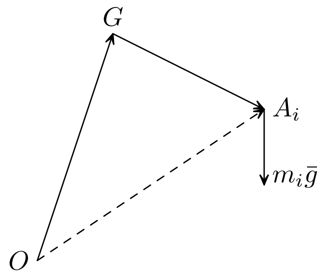
$$\mu = \frac{1}{m}\int_0^r x\,dm = \frac{3}{2r^3}\int_0^r \left(r^2 x - x^3\right)dx = \frac{3}{8}r.$$

Painopiste sijaitsee siis halkaisijatasoa vastaan kohtisuoralla säteellä etäisyydellä $3r/8$ halkaisijatasosta.

Tutkimme vielä diskreettiä massajakaumaa yleisemmin. Sijaitkoot pistemäiset massat $m_1, \ldots, m_n$ pisteissä $A_1, \ldots, A_n$ massattoman tukirakenteen kannattelemina ja olkoon m massojen summa. Olkoon edelleen O mielivaltaisesti valittu avaruuden piste. Yhtälöiden (1) ja (2) perusteella "arvaamme" painopisteen G sijainnin seuraavasti:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_k \overrightarrow{OA_i}. \tag{3}$$

Näemme G:n massajakauman painopisteeksi osoittamalla, että pisteisiin A_i vaikuttavien voimien G:n suhteen laskettujen momenttien $\overrightarrow{GA_i} \times m_i\bar{g}$ summa on $\bar{0}$. Jätämme tämän harjoitustehtäväksi.



Kuva 5.

Pisteen G sijainti riippuu näennäisesti myös O:sta, mutta voidaan osoittaa, että jos

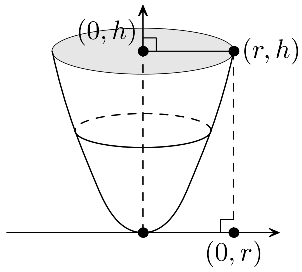
$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_k \overrightarrow{O'A_i}, \tag{4}$$

niin $G' = G$. Myös tämän yksityiskohtaisemman käsittelyn jätämme harjoitustehtäväksi ja toteamme, että yhtälö (3) määrittelee pisteen G yksikäsitteisesti.

Pohdittavaa

Seuraavassa muutamia asiaa valaisevia ajattelu- ja laskutehtäviä.

1. Hahmottele muutamia kolmiulotteisia kappaleita, joilla on vähintään kaksi symmetria-akselia.
2. Miksi tasa-aineisesta levystä leikatun tasokolmion painopiste on kolmion mediaanien leikkauspiste? Ohje: Ajattele kolmio viipaloiduksi jonkin sivun suuntaisin leikkauksin. Missä sijaitsevat viipaleiden painopisteet? Minkä janan painopisteet muodostavat?
3. Määritä tasa-aineisesta materiaalista tehdyn mielivaltaisen nelitahokkaan painopiste. Ohje: Voit hyödyntää edellisen tehtävän tulosta viipaloimalla tahokkaan sopivasti.
4. Suorita yksityiskohtaisesti yhtälöiden (1) ja (2) johtaminen tekstissä annetuista momenttiehdoista lähtien.
5. Tasa-aineisesta materiaalista valmistetun pyörähdysparaboloidin pohjan säde on r ja korkeus on h. Määritä kappaleen tilavuus ja painopiste.



6. Määritä tasa-aineisesta materiaalista valmistetun korkeusjanansa suhteen symmetrisen kartion painopiste. Mikä korkeusjanaa vastaan kohtisuora leikkaus puolittaa kartion massan?
7. Määritä tasa-aineisesta levystä tehdyn puoliympyrän painopiste.
8. Oletetaan, että x-akselin välillä $[0,\infty[$ on lanka, jonka massan tiheyden (massan pituusyksikköä kohti) pisteissä $x \in [0,\infty[$ ilmoittaa tiheysfunktio $f(x) = e^{-x}$. Laske langan massa sekä painopiste.
9. Osoita, että jos G on yhtälön (3) määräämä piste, niin
$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} \times m_i\bar{g} = \bar{0}.$$
Osoita edelleen, että jos yhtälöt (3) ja (4) ovat voimassa, niin $G' = G$.

Kertomuksen kuvat on piirretty MetaPost-ohjelmalla, jonka alkeisiin perehdyttämisestä kiitokset Martti Nikuselle.

Matematiikkaa kaikille

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Hannu Karttunen: Tiedettä kaikille. Matematiikka. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, 2006. 151 s. 24 euroa.

Englantilainen eläin- ja perinnöllisyystieteilijä *Lancelot Hogben* kirjoitti vuonna 1936 suuren suosion saaneen teoksen *Mathematics for the Million*, joka suomennettiin kolme vuotta myöhemmin nimellä *Matematiikkaa kaikille.* Hogben kirjoitti myös kirjan Luonnontieteitä kaikille. Tähtitieteilijä Hannu Karttunen ja etupäässä tähtitieteeseen liittyvää kirjallisuutta aiemmin kustantanut Ursa ovat ryhtyneet vielä laajakantoisempaan yritykseen, julkaisemaan sarjaa *Tiedettä kaikille.* Sen kolmantena niteenä, tähtitieteen ja fysiikan jälkeen, on ilmestynyt teos Matematiikka.

Matematiikkaa popularisoivia kirjoja on Suomessakin viime vuosina julkaistu runsaasti. Useimmat ovat kuitenkin niukasti kuvitettuja mustavalkoisia lukukirjoja ja kaikki käännöksiä. Jonkinlainen edeltäja Karttusen kirjalle on WSOY:n vuonna 1997 julkaisema Carol Vordermanin Kiehtovaa matematiikkaa. Se on kuitenkin selkeästi enemmän lapsille suunnattu kuin Karttusen teos. Karttunen on kuvittanut kirjansa monipuolisesti, suurelta osalta omin valokuvin, mutta myös esimerkiksi Jarno Kantelisen hauskoin piirroksin. – Kirjan lopussa oleva kattavalta näyttävä kuvalähteiden luettelo houkuttaa miettimään, mistä luettelossa mainitsemattomat kuvat ovat tulleet. Tällaisia ovat esimerkiksi Babbagen differenssikonetta esittävä kuva, joka näyttää olevan jonkin muun teoksen kuvataulu VIII ja Pascalin laskukonetta tai Rhindin papyryksen osaa esittävät kauniit värivalokuvat.

Karttunen pyrkii todella esittämään matematiikkaa tieteenä, eikä laskentona tai askarteluna. Jonkinlaisen kehyksen esitykselle antaa koulumatematiikka, jonka eri osille tekijä pyrkii antamaan taustaa ja syvyyttä. Samalla Karttunen käy kuitenkin läpi suuren osan koulumatematiikkaan kuulumattomista matematiikan popularisointien vakioaiheista ja eräitä ei niin tavallisiakin. Esitellyiksi tulevat niin äärettömät joukot, neliväriongelma, valinta-aksiooma, fraktaalit, latinalaiset neliöt, kauppamatkustajan ongelma ja taksitopologia, mutta myös esimerkiksi inversio-ongelmat ovat saaneet oman lukunsa. Kun sivuja, tosin isokokoisia (tekstiala noin 17×24 cm^2), ei kirjassa ole enempää kuin 150 ja niistäkin kuusi aivan tyhjää, ja sen kuvitus on runsas, ei useimpien aiheiden kohdalla ehditä kovin pitkään viipyä. Hiukan epäilyttää, avautuvatko kaikki Karttusen esiin ottamat asiat kirjan kohderyhmälle, jonka ajattelee muodostuvan matematiikasta kiinnostuneista maallikoista, koululaisista ja aikuisista.

Karttusen kirjoitustyyli on korostetun tuttavallista ja puheenomaista, paikoin melkein kiusaksi asti lukijaa kosiskelevan oloista. ”Nyt meillä alkaa jo olla lukuja joka lähtöön. Vaan kuinkapa onkaan yhtälön $2^x = 3$ laita?” Passivin ja oppikirjamaisen monikon ensimmäisen persoonan vaihtelu tuntuu sekin väliin hermostuttavalta. Karttunen asettuu usein matematiikkaa kummastelevien leiriin. Integraalimerkki on ”omituinen”, yhtälö ”kenkkumainen”, 60-jakoiset kulmayksiköt ”järjettömiä”. Makuasiat ovat makuasioita, ehkä en itse olisi näin sanoja valinnut.

Hyvään kirjaan on jäänyt muutama pieni epätarkkuuskin, toki. Selvinä virheinä voi pitää mainintaa siitä, että funktion derivaatta olisi käännepisteessä nolla tai sitä, että Fermat'n pienen lauseen mukaan jakolaskun a^p/p jakojäännös olisi a. Kokeillaan vaikka funktiota $f(x) = x^3 + x$ käännepisteessä $x = 0$ tai lukuja $a = 3$ ja $p = 2$. Eulerin monitahokaskaava on kirjassa esitetyssä muodossa tosi, jos kappale on yhdesti yhtenäinen. Katkelman ”Suoran yhtälössä esiintyy vain muuttujien x ja y ensimmäisiä potensseja. Siksi niiden välistä riippuvuutta sanotaan lineaariseksi, mikä tarkoittaa juuri suoraviivaista.” viesti jää vähintään epäselväksi. Yllättävää on myös, että Karttunen ottaa kolmiulotteisen vektorin käyttöön kolmen luvun kautta, mutta huomauttaa hetken kuluttua, että vektori onkin sellainen olio, johon voidaan liittää kolme lukua. Eikä lauseke $x^3 + ax^2 + bx + c$ ole itsessään vielä yhtälö. Kiireen jälkiä on varmaan epäyhtenäisyys kaavojen välistyksissä ja miinusmerkin pituudessa. Sen sijaan i:n käyttö i:n sijasta imaginaariyksikön merkkinä näyttää tekijän tai layoutin suunnittelijan tietoiselta valinalta. Laaja matemaattisen kirjallisuuden selailu tuntui vakuuttavan käsitystäni siitä, että matemaatikkojen imaginaariyksikkö on aina kursivoitu i, jos kursiivi ylipäänsä on käytössä. Sisällön ja ymmärtämisen kannalta nämä ovat tietysti aivan merkityksettömiä seikkoja.

Matematiikan populaariesityksen juoneksi valitaan usein historia. Karttusellakin on runsaasti viittauksia historiaan. Erityistä johdonmukaisuutta siinä, ketkä historian henkilöt ovat saaneet taustakseen esimerkiksi maininnan elinvuosistaan, ketkä taas eivät, ei näy olevan. Erillisiin juoksevaan tekstiin kuulumattomiin laatikkoihin on lisäksi koottu kaikkiaan 17 merkittävän matemaatikon pienoiselämäkerrat. Tämän kirjoittajalle niissä esiintyvät nimet tuottivat hiukan päänvaivaa. Tuntemissani lähteissä ei Leibnizista ole tehty von Leibnizia eikä Laplacesta de Laplacea. Gaussin olen oppinut tuntemaan etunimillä Carl Friedrich. Karttunen puhuu Johann Carl Friedrichistä. Muutaman Gausselämäkerran selailu näytti osoittavan, että Gauss onkin itse asiassa ristitty nimellä Johann Friedrich Carl; missä vaiheessa Johann on pudonnut pois ja loput kaksi nimeä vaihtaneet järjestystään ei ole tiedossani. – Saksankielen opettaja voisi huomauttaa, että Hilbertin geometriankirjan nimessä on Grundlagen eikä Grundlage ja että Fregen Grundgesetze eivät ole peruslauseita vaan peruslakeja.

Melkein kirjansa aluksi Karttunen tuo esiin matematiikan monipuolisuuden vetoamalla ”MSA-luetteloon”, jossa hänen mukaansa on 98 pääluokkaa ja yli 5000 alaluokkaa. Matematiikan julkaisujen luokitteluun ei kuitenkaan käytetä MSA- vaan MSC-nimistä luetteloa (Mathematical Subject Classification), eikä siinä ole 98 pääluokkaa (vaikka ensimmäisen numero on 00 ja viimeisen 97) vaan vain 63 – osa numeroista on käyttämättä, reservissä. Sen sijaan alaluokkien määrä lienee oikein.

Jos kirjan varsinaisesta asiasisällöstä puhutaan, niin perusanalyysiä, differentiaali- ja integraalilaskentaa esittelevän luvun kohdalla olisin ehkä kirjoittanut hiukan toisin kuin Karttunen. Makuasia tietysti tämäkin, mutta abstraktin derivaatan sijasta konkreettinen muuttumisnopeuden kautta tehtävä lähestyminen viehättäisi enemmän. Ja integraalin kaksijakoisuus ”fluenttina”, sinä joka muuttuu tunnetulla nopeudella, ja äärettömän monen äärettömän pienen summana, ei tekstistä oikein avaudu.

Edelliset sangen perifeerisiin seikkoihin puuttuvat ylipedanttiset huomautukset on ymmärrettävä hengessä happamia sanoi kettu pihlajanmarjoista. Olisihan tällaisen kirjan matemaatikkokin voinut kirjoittaa. Mutta hyvä kuitenkin, että Hannu Karttusen kirjoitti: kirja on joka tapauksessa aivan hieno saavutus. Sen voi hyvin antaa vaikka lahjaksi tai laittaa olohuoneen pöydälle minkä tahansa arvokuvateoksen tapaan, kun vieraita saapuu. Ja Karttusen teksti osoittaa, että matematiikasta voi kirjoittaa näyttävästi ja kansantajuisesti siinä kuin muistakin tiedonaloista. Muitakin tieteenaloja popularisoitaessa jotkin seikat aina jäävät asiaa tuntemattomille vaikeaymmärteisiksi. Matematiikan popularisointia on kaihdettu, koska matematiikka on vaikeaa ja abstraktia. Mutta matematiikan puolesta puhuu sen loogisuus ja yleinen arvattavuus. Vaikkapa modernin fysiikan popularisoija on usein paljon haasteellisemman tehtävän edessä.

Karttusen kirjaan on sinne tänne siroteltu muutama tehtäväkin. Kaikkiin esitetään myös ratkaisu. Yksi tehtävä on avoin: sen ratkaisijalle kustantaja lupaa pienen palkkionkin. Tehtävä ei ole mahdoton ja uskonpa sen ratkaisseenikin. En aio kuitenkaan palkkiota vaatia, joten kirjan toivottavasti monet ostajat voivat siitä vapaasti kilpailla.

Matematiikkaa viisivuotiaan opastuksella

Juha Haataja
Tieteen tietotekniikan keskus CSC

Suomessa aletaan hiljalleen ymmärtää matematiikan osaaminen kansantaloudellisena kilpailutekijänä. Lisäksi pienet tiedekustantajat ovat viime vuosina ilahduttavasti julkaisseet tiedekirjallisuutta, jossa matematiikka nähdään osana yleissivistystä ja ihmiskunnan kulttuuriperintöä. Mutta mikä on olennaisinta matematiikan osaamisen kehittämisessä? Taitavat opettajat, jotka osaavat innostaa koululaisia matematiikan pariin.

Esikoulusta se alkaa

Tyttäreni aloitti syksyllä esikoulun, missä hän perehtyy leikkimisen ohessa matemaattisiin käsitteisiin. Tyttäreni oli ymmärtänyt lukujen merkityksen kommentoidessaan leikkipaikan keinujen määrää: ”Tuossa on se numero, se ...” Sana oli hukassa mutta lukumäärä tiedossa. Oivallus!

Kotona rypäleitä syödessään tytär arvuutti minulta niiden lukumäärää. Hän oli laittanut lautaselleen kolme terttua, joista kussakin oli neljä rypälettä. No kaksitoistahan niitä oli. (Eskarissa on opiskeltu laskemaan 12:een asti.) Tytär söi yhden rypäleen ja kysyi, kuinka paljon niitä nyt on jäljellä. No 11 tietenkin. Se sattui olemaan tyttäreni lempinumero, sillä niin monta lasta on eskariryhmässä.

Rypäleistä tulee mieleen kaikenlaista lukuihin liittyvää. Millaisilla eri tavoilla tietyn määrän rypäleitä voi jakaa samankokoisiin osiin? Esimerkiksi 11 rypälettä tai 12 rypälettä. Mistä ero mahtaa johtua? Luvut ovat outoja olioita!

Tyttäreni kuvaili eskarin opettajan näyttämää peliä, jossa lukuja laitettiin ruudukkoon niin että niiden summat vaakasuoraan ja pystysuoraan olivat samoja. Kyseessä oli ”lasten sudoku”. Opettaja sai lapset innostumaan luvuista oman innostuksensa ansiosta.

Tyttären pähkäily lukujen parissa tuo mieleen unkarilaisen matematiikan opetuksen tradition, jossa lapsia aktivoidaan monipuolisesti. Lapset perustelevat vastauksiaan kertomalla ajattelustaan. Kielellinen harjoitus ja selkeä päättely tukevat toisiaan.

Unkarilla lienee maailmanennätys ykköstason matemaatikkojen määrässä suhteessa väkilukuun. Unkarilaissyntyisiä nobelisteja löytyy kymmenkunta, esimerkkeinä holografian keksijä Dénes Gábor ja kvanttimekaniikan symmetrioita tutkinut Eugene Wigner, joista kummankin tutkimusalueella tarvitaan vahvaa matemaattista pohjaa.

Unkarilaista matematiikan opetuksen perinteestä on kerrottu aiemmin Solmussa. Lehden www-sivuilta solmu.math.helsinki.fi löytyy suomeksi käännettyinä ongelmia, joita koululaiset ratkovat. Tässä esimerkki: Voiko sadan ensimmäisen alkuluvun käänteislukujen summa olla kokonaisluku?

Kuka osaa vastauksen?

Koulussa aina vierastin tilannetta, jossa opettaja antoi ymmärtää hallitsevansa vastauksia eikä jättänyt tilaa oivaltaa. Mutta onneksi sain opettajia, jotka antoivat tilaa kekseliäisyydelle ja kokeiluille.

Sama oivaltamisen ilo auttaa jaksamaan myös työelämässä. Löysin Pauli Juutin kirjasta ”Toivon johtaminen” (WSOY, 2004) käsitteen ”ei-tietävä positio”. Juutin mukaan asiantuntijaorganisaatiot selviävät vain, jos esimiehet luopuvat tietäväisyydestä ja kuuntelevat työtovereitaan etsien yhdessä ratkaisuja.

Sama resepti pätee myös hyviin matematiikan opettajiin. Vain ”ei-tietämisen” kautta löytyy oivalluksen iloa. Toki tarvitaan myös rautaista ammattitaitoa.

Matematiikkaan hurahtamisesta on ollut myöhemmin elämässä paljon iloa. Informaatiotulvan keskellä matematiikka tarjoaa käsitteitä ja välineitä symmetrioiden, relaatioiden, suuruusluokkien, todennäköisyyksien ja paradoksien löytämiseen. Ilman matematiikkaa edessä on vain lista faktoja. Päätöksenteossa matematiikan avulla voi etsiä olennaista faktojen sydämestä.

Maailma on matematiikkaa

Yhteiskunta muuttuu läpikotaisin matemaattiseksi. Kaikkialla on digitaalista tekniikkaa, ja sitä myötä matematiikka soluttautuu kaikkialle. Tietokoneet, kännykät, digikamerat ja mp3-soittimet tikittävät matemaattisten operaatioiden ja teoreemojen tahtiin.

Samalla rakennetaan yhä isompia ohjelmistoja. Koskaan ennen ihmiskunta ei ole luonut näin suuria ja täsmällisiä aineettomia rakenteita. Yhteiskunta toimii – jos toimii – matematiikan varassa.

Maailman todennäköisesti käytetyin tietokoneohjelma Google rakentuu matematiikalle. Hakutulosten laittaminen paremmuusjärjestykseen perustuu miljardeja tuntemattomia muuttujia sisältävän ominaisarvotehtävän ratkaisemiseen.

Toisaalta matematiikan sulautumisessa ihmisten kulttuuriin ei ole mitään uutta. Kaikissa ihmisessä tikittää sisällä eksakti matemaattinen koneisto, nimittäin kolme miljardia emäsparia DNA:ta. Tämä DNA-ketju on avattuna noin kahden metrin mittainen ja koodaa lukemattomia ihmiselämän salaisuuksia.

Elämän salaisuutta jäljittämässä

Jos tänä päivänä lähtisin opiskelemaan, panostaisin matemaattisiin taitoihin mutta suuntaisin biotieteisiin. Elämän salaisuus on kirjoitettu matematiikan kielellä.

Luin vastikään Arja Hokkasen suomentaman John Gribbinin teoksen ”Syvä yksinkertaisuus – Kaaos, kompleksisuus ja elämän synty” (Ursa, 2005). Selkäpiissäni kulkevat väreet, kun mietin kaoottisten dynaamisten systeemien kaunista teoriaa. Tulee mieleen nuoruuden into sukeltaa uusiin asioihin.

Toinen matematiikan ihmeitä viime aikoina valottanut teos on ”SYNC - The Emerging Science of Spontaneous Order” (Hyperion, 2003). Steven Strogatz etsii vastausta kysymykseen, miksi Malesian tulikärpäset tuikkivat öisin samaan tahtiin. Kirja osoittaa, että synkronisoituminen on väistämätöntä johtuen takaisinkytkennän epälineaarisuudesta.

Leikkiä ja ymmärrystä

En halua painostaa tyttäriäni matematiikan opiskeluun. Mutta olisi ihanaa, jos heistä kasvaisi uteliaita, leikkisiä, kyseenalaistavia ja totuutta arvostavia nuoria naisia. Siis sellaisia, joilla on lämmin suhde matematiikkaan ja tähän arvoitukseen, jota kutsumme maailmaksi.

Kadehdin unkarilaisilta matematiikan opetuksen perinnettä, jossa kehitetään tasapainoisesti oppilaan kykyjä. Menetelmä on hyvin suunniteltu, mutta vaatii opettajilta paljon, ehkä jopa pitkän perinteen matematiikan opettamisen kehittämisestä.

Koululaisena kävelylenkeillä Kainuun kirkkaan tähtitaivaan alla juttelin isäni kanssa maailmankaikkeuden ihmeistä. Hän ei koskaan esittänyt tietävänsä asioista enemmän kuin minä, eikä tarjonnut valmiita vastauksia. Tämä ei-tietäväisyys ruokki uteliaisuuttani ja antoi tilaa omille oivalluksille.

Odotan kiinnostuneena, millaista matematiikkaa tyttäreni minulle opettavat.

Neljä lukion oppikirjaa

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Tarmo Hautajärvi, Jukka Ottelin ja Leena Wallin-Jaakkola: Laudatur 1. Funktiot ja yhtälöt. Otava 2005. 216 s. 11,50 euroa.

Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoski, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen, Teuvo Laurinolli ja Timo Sankilampi: Matematiikan Taito 1 – 2. Funktiot ja yhtälöt, Polynomifunktiot. WSOY 2005. 245 s. 20,80 euroa.

Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen, Maija Salmela ja Jorma Tahvanainen: Pitkä matematiikka 1. Funktiot ja yhtälöt. WSOY 2004. 198 s. 11,40 euroa.

Pekka Kontkanen, Riitta Liira, Kerkko Luosto, Juha Nurmi, Riikka Nurmiainen, Anja Ronkainen ja Sisko Savolainen: Pyramidi 1. Lukion pitkä matematiikka. Funktiot ja yhtälöt. Tammi 2005. 152 s. 16,30 euroa.

Opetushallituksen Määräys 33/11/2003, Lukion opetussuunnitelman perusteet, jakaa lukion pitkän matematiikan pakollisen osuuden 10 kurssiksi, joista ensimmäinen on nimeltään Funktiot ja yhtälöt. Varsin kattavasta nimestä huolimatta määräys esittää kurssille melko vaatimattomat tavoitteet. Kurssin tavoitteena on, että ”oppilas vahvistaa yhtälöiden ratkaisemisen ja prosenttilaskennan taitojaan, syventää verrannollisuuden, neliöjuuren ja potenssin käsitteiden ymmärtämistään, tottuu käyttämään neliöjuuren ja potenssin laskusääntöjä, syventää funktiokäsitteen ymmärtämistään tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita ja oppii ratkaisemaan potenssiyhtälöitä”. Keskeisiksi sisällöiksi opetussuunnitelma listaa neljä asiaa, potenssifunktion, potenssiyhtälöiden ratkaisemisen, juuret ja murtopotenssin sekä eksponenttifunktion. Melkein kaikki tavoitteet ja asiat esiintyvät myös yläasteen opetussuunnitelmassa. Koko lukion oppimäärää koskevat yleistavoitteet kuten se, että oppilaan toivotaan näkevän matemaattisen tiedon loogisena rakenteena, ymmärtävän ja osaavan käyttää matematiikan kieltä ja harjaantuvan käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, koskevat tietysti tätäkin kurssia. Määräys on määräys, mutta miten käsitellään mielekkäästi eksponenttifunktiota ilman logaritmeja?

Opetussuunnitelmasta tulee todellista opetusta pitkälti oppikirjojen kautta. Tilanne, jossa oppikirjan kirjoittaja on Funktiot ja yhtälöt -kurssia realisoidessaan, ei ole aivan helppo. Kurssin sisällöksi määritellyt asiat ovat melkein kaikki jo peruskoulussa käsiteltyjä. Käytäntö osoittaa, että lukioon tulevat oppilaat hallitsevat ne usein ällistyttävän huonosti. Kertaus olisi siis tarpeen. Mutta eteenpäinkin pitäisi joutua, jopa jatko-opintokelpoisuuden ja korkeakoulukypsyyden tuottavaa osaamista kohti. Aines sallisi toki ihan matemaattisesti kunnollisenkin lähestymisen, mutta silloin pitäisi oikeastaan alkaa alusta. Opettaako matematiikkaa vai laskentoa?

Tarkastelen tässä neljää Funktiot ja yhtälöt -kurssia varten kirjoitettua oppikirjaa. Näistä Matematiikan taito sisältää myös kurssin Polynomiyhtälöt, mutta kaikki, mitä kirjasta sanon, koskee vain ensimmäistä kurssia. Kurssi päättyy varsinaisesti kirjan sivulle 119, mutta molempia kursseja koskevat tehtävien ratkaisuosasto, hakemisto ja kirjaan sisältyvä suomalais-englantilainen sanasto. Valikoimani ei ole aivan kattava, mutta siihen sisältyvillä kirjoilla opetetaan valtaosaa lukiolaisistamme. Näkökulmani on henkilökohtainen, matematiikan ammattilaisen ja harrastajan.

Tarkastellaan tuotteita ensin päällisin puolin. Kaikki ovat pehmeäkantisia, kannesta värikkäitä. Pyramidi on sentin muita korkeampi ja kapeampi, muiden mitat ovat $24 \times 18,4$ cm^2. Kirjojen painot ovat verrannollisia sivumääriin: Laudatur kuormittaa lukiolaisen reppua 412 grammalla, Matematiikan taito 431 grammalla (mutta siinä on kaksi kurssia), Pitkä matematiikka 354 grammalla ja Pyramidi 313 grammalla. Laudatur, Matematiikan taito ja Pitkä matematiikka on painettu kahdella värillä. Pyramidissa on useampia värejä, muttei kuitenkaan varsinaista värikuvitusta. Kaikkien kirjojen tekstiä on eri perustein painettu osin värillisiin laatikkoihin. Laudaturin ja Pyramidin sekä pääosin Pitkän matematiikan kirjasin näyttää 12 pisteen kokoiselta, Matematiikan taidon 11 pisteen. Pitkän matematiikan harjoitustehtävät on painettu 11 pisteen kirjasimella.

Kirjojen tekijöiden lukumäärä vaihtelee kolmesta kahdeksaan. Molemmat sukupuolet ovat edustettuina. Pyramidin tekijöistä enemmistö on naisia. Joka kirjan tekemiseen on osallistunut toimittaja, ulkoasun suunnittelijoita ja piirtäjä tai piirtäjiä. Yhdenkään kirjan yhteyteen ei ole painettu mitään taustatietoja tekijöistä, lukuun ottamatta Laudaturin esipuheen marginaaliin painettuja, ilmeisesti jossain määrin kirjan tekijöitä esittäviä karikatyyrejä. Matematiikan taidon, Pitkän matematiikan ja Pyramidin tekijöistä kirjoittaja tunnistaa sekä yliopistomatemaatikkoja että lukionopettajia, Google-haku paljastaa Laudaturin tekijät lukion opettajiksi. Tekijöiden taustaorganisaatioiden esille pano on julkaisuissa aika tavallista, mutta syystä tai toisesta sitä ei näissä yhteyksissä ole tehty.

Pyramidia lukuun ottamatta kirjojen alkuun on painettu kurssin ajankäyttöehdotus. Matematiikan taito ehdottaa 30 tunnin käyttämistä, Pitkä matematiikka 28:aa ja Laudatur 27:ää. Varsinaisen kurssiasian lisäksi Laudaturissa on yksityiskohtaisia opiskeluohjeita, matematiikan olemusta pohdiskeleva jakso, sekä esiintaitettava keskeisten asioiden lista, Pitkässä matematiikassa sivun mittainen lainaus yllä kuvatusta opetussuunnitelmasta, Matematiikan taidossa suomalais-englantilainen sanasto ja Pyramidissa keskeisten matemaattisten merkintöjen luettelo. Kaikissa kirjoissa on useampia mallikokeita, asiahakemisto ja periaatteessa kaikki tehtävät kattava harjoitustehtävien vastausluettelo. Numeroituja harjoitustehtäviä on Laudaturissa 420, Matematiikan taidossa 489, Pitkässä matematiikassa 370 ja Pyramidissa 290. Kun harjoitustehtävä tyypillisesti jakautuu useisiin alakohtiin, ei edellisiä lukuja voi suoraan pitää kirjan tehtävien lukumääränä. Melkein kaikki harjoitustehtävät ovat suoraviivaisia ja mekaanisia. Laudatur ja Matematiikan taito käyttävät muutaman kerran mahdollisuutta teettää jonkin tekstissä ilmoitusasiana annetun kaavan todistus harjoitustehtävänä. Tätä mahdollisuutta olisi esimerkiksi erilaisten potenssien laskusääntöjen kohdalla varmaan voinut käyttää huomattavasti enemmänkin.

Painettua tekstiä ja erityisesti matematiikan kieltä käyttäviä julkaisuja lukemaan tottuneelle oppikirjojen yleisilme tuottaa hämmennystä. Varsin suuri osa etenkin Laudaturin, Pitkän matematiikan ja Pyramidin sivuista vaikuttaa taulutyöskentelyn kopioinnilta tai jäljittelyltä. Kaavat ovat virkeyhteydestä irrallisina, välimerkeittä ja mahdollisesti viereen kirjoitettujen selittävien merkintöjen saattelemina. Vain Matematiikan taito noudattaa matemaattisen ja suomenkielisen esityksen käytänteitä. Jos olisin äidinkielenopettaja, olisin huolissani. Koska olen matematiikan opettaja, olen huolissani. En näe syytä totuttaa oppilaita vääriin kirjoitustapoihin ja antaa heille oppikirjan auktoriteetin kautta käsitys, että matemaattista esitystä kirjoitettaisiin eri säännöin kuin muuta kieltä. Aivan omituinen on myös Laudaturissa ja Pitkässä matematiikassa puhtaimmin viljelty, mutta myös Pyramidissa käytetty tapa antaa tehtävä esimerkiksi seuraavassa muodossa:

Laske. a) $(\sqrt{2}\sqrt{5})^2$ b) $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}\right)^2$

Kyllä ne laskettavat ovat laske-predikaatin objekteja ja kuuluvat samaan virkkeeseen, pistettä ennen ja pilkulla tai yhdistävällä konjunktiolla erotettuna! Matematiikan taitoa lukuun ottamatta kirjat noudattavat myös käytäntöä, jossa ratkaistun esimerkin jälkeen kirjoitetaan uusi, Vastaus-sanalla alkava kappale, jossa vastaus toistetaan. Miksi ihmeessä? Eihän näin mekaanisesti tehdä tosielämässä. Ymmärtävä ja ajatteleva ihminen, jollaisia oppilaat ovat jo ennen opetusta ja toivottavasti vielä enemmän opetuksen jälkeen, oivaltaa varmasti vastauksen olemuksen muutenkin. Myös opetussuunnitelman yleiset lauseet matematiikan kielestä edellyttäisivät malliksi kelpaavaa oppikirjatekstiä. Taulutyylillä on paikkansa taululla, mutta silloin esitykseen liittyvät taululle kirjoittajan suulliset täydennykset.

Paino- ja huolimattomuusvirheitä sattuu lukijan silmään oikeastaan yllättävän vähän. Laskutehtäviä en toki tarkistanut kuin pistokokein, mutta suorastaan vääriä vastauksia ei tullut silmiini yhtään.

Kaikki oppikirjat ottavat huomioon opetussuunnitelman viitteet. Kaikissa on erityiset suoraan ja kääntäen verrannollisuutta käsittelevät lukunsa ja samoin prosenttilaskentaa käsitellään joka kirjassa. Näille aiheille omistettujen sivujen osuus vaihtelee 14 % ja 20 % välillä koko sivumäärästä. Kaikki kirjat alkavat lukujoukkojen ja niiden nimien esittelyllä. Pitkä matematiikka tosin esittelee vain luonnolliset luvut, kokonaisluvut ja rationaaliluvut (mutta mainitsee irrationaaliluvut alaviitteessä myöhemmin). Laudatur ja Pyramidi määrittelevät reaalilukuvälit. Kumpikin käyttää avoimen ja puoliavoimen välin merkintänä merkintästandardiinkin päätynyttä bourbakistista $]a, b[$:tä mainitsematta perinteistä ja laajassa käytössä olevaa (a, b):tä.

Muutama huomio yksittäisistä kirjoista

Laudatur

Laudaturin matemaattinen typografia on kirjoista heikoin. Jakoviiva ei ole osoittajan ja nimittäjän keskivaiheilla ja itseisarvomerkkien paikka on kummallinen.

Laudaturin yksi tunnuspiirre on tuttavallinen, voisi jopa sanoa lukijaa kosiskeleva tyyli. Esimerkeissä ja tehtävissä esiintyy usein nimellisiä ihmisiä ja kotieläimiä. Kirjaa koristelevat myös hauskat pikku piirrokset. "Testaa hyvä taitosi" on kertaustehtäväosion otsikko. Toisaalta ilmaisun täsmällisyys jättää paljon toivomisen varaa. Muutama lainaus sattumanvaraisista paikoista: "Kokonaisluvut koostuvat kolmesta osasta". "Lukujoukko ilmaistaan lukusuoralla piirtämällä joukon vastinpisteet, jolloin saadaan reaalilukuväli." "Kun murtoluvussa sekä osoittaja että nimittäjä kerrotaan samalla luvulla, kyseessä on luvun laventaminen." (Kerrotaan ehkä nollalla, ykkösellä tai puolella?) Ihan helposti ei voi sulattaa ilmoitusta että $x < a$ on usein sama kuin joukko $\{x \,|\, x = \mathbb{R},\, x < a\}$ ($\in$-merkki kyllä määritellään, joten yhtäläisyysmerkki lienee painovirhe).

Toinen Laudaturin erityispiirre on matematiikan historian ja sanojen etymologian esillä pitäminen. Aivan uuttakin tietoa sain. Tyhjän joukon $\emptyset$ merkki kuuluu olevan norjalainen ö "norjalaisen matemaatikon Henrik Abelin kunniaksi". Mahtaisiko Niels Henrik Abel olla tällaisesta kunnianosoituksesta iloissaan? – Bourbakilta peräisin olevan merkin isäksi on muistelmissaan ilmoittautunut Andre Weil. Hän ei puhu Abelista mitään, mutta sanoo kyllä olleensa bourbakisteista ainoa, joka tunsi tanskalais-norjalaiset aakkoset. Entä intialainen matemaatikko Bhaskarachara? Matematiikan historiat tuntevat hyvin vain Bhaskara I:n ja Bhaskara II:n, mutta toki: George Chevergese Josephin The Crest of the Peacock kertoo, että Bhaskara II yhä laajalti tunnetaan Intiassa Laudaturin ilmoittamalla nimellä, joka tarkoittaa Bhaskara-opettajaa.

Laudaturissa on muitakin omintakeisuuksia. Oppiaineiden kytkentöjä osoitetaan esittämällä siellä täällä harjoitustehtäviä vaihtelevilla kielillä. Suomen murteet eivät kuitenkaan esiinny. Ainakin kerran tämä idea potkaisee takaisin. Suorakulmaisen särmiön kanssa samankokoista kuutiota ilmeisesti tavoittelevan tehtävän englanninkielinen muoto on melko vaikeaymmärteinen, kun sanat *cube* ja *cubic* ovat sekoittuneet ja särmän pituuden sijasta on ajauduttu kysymään kuution pituutta. Ja fysikaalinen ongelma, jossa johtimen ("wire") resistanssi on kääntäen verrannollinen siinä kulkevaan virtaan on koko lailla omituinen.

Opetussuunnitelma esittää Funktiot ja yhtälöt -kurssin yhdeksi tavoitteeksi yhtälöiden ratkaisemisen ja prosenttilaskennan taitojen vahvistamista. Laudatur ei varsinaisesti käsittele yhtälönratkaisua, mutta prosenttilaskusta – jonka voisi mukavasti nähdä ensimmäisen asteen yhtälön yhtenä soveltamisalueena – kehitetään oma teoriansa erikseen opeteltavine kaavoineen, kuten "q-kertaiseksi kasvaneen luvun suuruuden nousemisen kaava" $q \cdot 100\ \% - 100\ \%$. Prosenttilaskuissa usein esiintyvän lausekkeen $1 + \dfrac{p}{100}$ Laudatur nimeää prosenttikertoimeksi.

Matematiikan taito

Ilmaisun kannalta Matematiikan taito erottuu selvästi Laudaturista ja muista vertailtavista teoksista. Matematiikan taito on kirjoitettu niin kuin matematiikkaa kirjoitetaan. Virkkeet ovat täydellisiä, välimerkit oikein. Ilmaisu on lyhyttä, ytimekästä ja yleensä täsmällistä. Asiallisuutta korostaa värillisten laatikoiden säästäväinen käyttö. Hammastellakin aina voi. "Yhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun yhtälön puolet vaihdetaan" (mihin?). Taulutyöskentelyn näköisiä esimerkkejä on vähemmän kuin muissa kirjoissa. Tosin heti ensimmäistä tekstisivua koristaa sekä tavallinen painovirhe että saksankielisen ilmaisun kielioppivirhe (die ganze Zahlen, $\mathbb{Z}$:n selityksenä). Makuasia, mutta en osaa pitää kirjan omaksumaa keisarillista monikon ensimmäistä persoonaa neutraalia passiivia parempana. Kun kirjoitetaan esimerkiksi, että "kutsumme luvun toista potenssia tämän luvun neliöksi", viestitään, että kyseessä olisi esimerkiksi kirjassa tai muuten meidän kesken omaksuttu sopimus, eikä universaali ilmaisutapa.

Matematiikan taidon tieteellisyys tuntuu menevän paikoin snobbailun puolelle, esimerkiksi silloin, kun kirja erottelee, ilmeisesti lineaarialgebraa ennakoiden, eron ensimmäisen asteen yhtälön $ax + b = 0$, $a \neq 0$, jolla on aina yksikäsitteinen ratkaisu, ja lineaarisen yhtälön $ax + b = 0$, jolla voi olla ratkaisuja 0 tai äärettömän paljon.

Matematiikan taidon aines on jaettu neljään lukuun ja 14 alalukuun. Jokainen alaluku alkaa pienellä kysymyksellä tai kysymyssarjalla, joiden vastauksia ei ole sisällytetty vastausosastoon. Mielenkiintoista olisi ollut saada tekijöiden vastaus heidän esittämäänsä kysymykseen, mitä saadaan, kun 2 kerrotaan itsellään viisi kertaa. Onko se 64 (viisi kertolaskua) vai 32 (viisi kakkosta)? Neliöjuuren laskusääntöjä käsittelevän alaluvun ensimmäinen silmään osuva kaava on $\sqrt{16+9} =$

$\sqrt{16}+\sqrt{9}$, tosin niin esitettynä, että kaavan totuutta tai epätotuutta kysytään.

Matematiikan taito selviää prosenttilaskennasta – tai siis sen taitojen vahvistamisesta pienimmällä sivumäärällä. Itseäni Matematiikan taidon esitys viehätti, siinä on kaikki tarpeellinen eikä muuta. Matematiikan taidon mielestä $1+\dfrac{p}{100}$ on *kasvukerroin*. Pitkä matematiikka ja Pyramidi selviävät prosenttilaskuista nimeämättä tätä lauseketta.

Matematiikan taito on Laudaturin ohella kirjoista ainoa, joka varsinaisesti käsittelee yhtälöparin ratkaisemisen.

Matematiikan taitoon kuuluu pieni lisäosio Tutkimus- ja harrastustehtäviä. Siihen sisältyy riemastuttava kommentti Paavo Lipposen esivanhempien lukumäärästä. Kirjassa on myös varsin asiallinen kolmisivuinen suomalais-englantilainen sanasto. Sitä, miksi juuri tällainen liite on katsottu tarpeelliseksi, ei kirjassa mitenkään perustella.

Pitkä matematiikka

Pitkän matematiikan yleisote on mahdollisimman yksinkertainen, useimmissa kohdissa vain välttämättömän tiedon esittelevä. Tämän tiedon esittely on sinänsä korrektia. Oletan, että tekijöillä on kirkkaasti mielessä lukion aloittava nuori, vielä oikeastaan peruskoululainen. Varsinainen asia näkyy painetun vihreälle taustalle. Vihreitä juovia on harvakseltaan, koska suuri osa kirjan painopinta-alasta on käytetty väljästi ladottuihin esimerkkeihin. Hiukan lisäeloa tekstiin tuovat alaviitteet, joissa aika ajoin tuodaan esiin myös vaihtoehtoisia tarkastelutapoja.

Ainoana kirjoista Pitkä matematiikka ei jaottele ainesta hierarkkisesti numeroituihin lukuihin. Ainesta on myös vähemmän kuin muissa kirjoissa. Reaalilukuja ja reaalilukujen joukon osajoukkoja ei esitellä eikä nimetä, funktiota yleisenä käsitteenä ei määritellä eikä ongelmia, jotka liittyvät irrationaaliseen eksponenttiin mainita. Kirjassa esiintyy kyllä merkintä x^r, ilman, että r olisi spesifioitu rationaaliluvuksi. Edes merkintää $f(x)$ ei Pitkä matematiikka esittele. Kirja ei sentään tule toimeen "funktio x^2"-tyyppisittä ilmauksitta. Pitkän matematiikan mukaan opiskeleva jää myös paitsi esimerkiksi tiedosta $\sqrt{a^2}=|a|$, koska itseisarvon käsitettä tai merkkejä ei mainita. Pitkä matematiikka ei harrasta viittauksia historiaan. Ilmeisesti ainoina poikkeuksina ovat alaviitteissä annetut tiedot leikkimielisen *googol*-sanan alkuperästä, sanan prosentti etymologiasta sekä neliöjuurimerkin alkuperästä.

Pitkän matematiikan vastausosasto erottuu muista kirjoista. Siinä on monien tehtävien kohdalla kerrottu numeerisen vastauksen lisäksi myös siitä, miten vastaukseen päädytään. Kirjan tehtävät ovat muutoin melko yksioikoisia laskuja.

Pitkä matematiikka on pelkistetty esitys myös siinä mielessä, että kirjaan ei ole kerätty mitään ylimääräistä liitetietoa.

Pyramidi

Pyramidi esittelee ainoana vertailtavista kirjoista verrannollisuuden ja prosenttilaskun ensimmäisen asteen yhtälön sovelluksina. Tämä on linjassa matematiikan olemuksen ja siis myös matematiikan opetuksen perustavoitteen kanssa: erillisiä prosenttilaskun tai verrannollisuuden teoriota ei tietenkään tarvita. Pyramidikaan ei kuitenkaan uskalla käsitellä verrannollisuuden kahta lajia funktio-käsitteen alla, jonne se loogisesti kuuluisi.

Pyramidi ottaa heti alkuun käyttöön lukujoukkojen merkinnät ja $\in$-merkin. Mutta kun esimerkkitehtävissä tulee vastaan yhtälöitä, jotka osoittautuvat identtisiksi, kirja neuvoo merkitsemään vastaukseksi "$x\in\mathbb{R}$". Tätä ei oikein voi ymmärtää: tokihan aina reaaliyhtälön ratkaisulle x tuo relaatio pätee, riippumatta siitä, onko ratkaisuja muitakin.

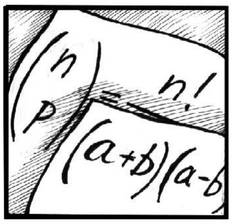
Pyramidin kirjoitustyyli on täsmällistä ja ytimekästä. Pyramidi on kirjoista esimerkiksi ainoa, joka määrittelee vastaluvun korrektisti.

Pyramidi menee muutamissa kohdin selvästi kilpailijoitaan pitemmälle asiasisällöissä. Se on ainoa kirja, jossa otetaan kantaa muuttujan sisältävän lausekkeen itseisarvoon. Ensimmäisen asteen yhtälöiden keralla käsitellään myös yhtälöparin ratkaiseminen. Kirjan lopussa olevassa liitteessä esitetään reaaliluvun aksiomaattinen määritelmä täydellisyysaksioomaa myöten ja kerrotaan tämän aksiooman tarpeellisuus kurssimateriaaliin kuuluvan tyypin $x^n=a$ yhtälöiden ratkaisujen olemassaolon kannalta. Pyramidi numeroi harjoitustehtävät kolminumeroisesti: ensimmäinen numero on samalla kirjan luvun numero. Viimeisen tehtävän numerosta 729 ei siis ole heti syytä säikähtää. Harjoitustehtävät, jotka sisältävät samalla muuta tietoa, ovat hyviä, mutta aiheuttavat lisähaasteen: todeksi esitettyjen tietojen tulisi mielellään sitä olla. Pyramidi esittää prosenttilaskutehtävän, jonka perustietona on, että Suomessa olisi vuonna 2004 ollut 27 100-vuotiasta. Totta tietysti, mutta lukija toki uskoo tarkoitettavan 100-vuotiaiden kokonaismäärää, joka on ollut ainakin kymmenkertainen.

Pyramidissa on harjoitustehtävä, jossa yhtälöstä $x=1$ johdetaan puolittain x:llä kertomalla ja puolittain x vähentämällä ensin yhtälö $x(x-1)=0$, josta $x=0$. Tehtävän kysymys on, missä virhe tehdään. Vastausosaston mukaan ei olisi saanut kertoa x:llä eikä jakaa 0:lla. Tämä ei ihan päde: jos kerran on sanottu, että $x=1$, niin toki $x^2=x$ ja edelleen $x(x-1)=0$. Mutta tästä ei voi päätellä, että $x=0$, kuten vastauksessa oikein sanotaankin. – Olennaisesti sama tehtävä on Matematiikan taidon Tutkimus- ja harrastustehtäväosastossa.

”Toimituksen valinta”

Solmun toimitus ei laita kirjoja jonoon. Kirjojen eri ominaisuuksia voi painottaa hyvin eri tavoin ja hyvin perustein valita niistä minkä hyvänsä. Mutta jos valitsisin kirjaa vain omien mieltymyksieni perusteella, ottaisin Matematiikan taidon. Pyramidi olisi vahva kilpailija. Kolmannelle sijalle asettaisin Pitkän matematiikan. Laudatur tuntuu yrittävän liikaa ja liian monenlaista. Oikeasti en ole valinnan edessä. Kurssimuotoisen lukion yksi perustelu oli, että opetuksen modulaarisuus helpottaa siirtymistä. Tällöin jokaiselle 10 pitkän matematiikan kurssillekin pitäisi voida valita juuri sen kohdalla paras oppikirja. Epäilen, mahtaisiko tämä onnistua. Nyt esillä olleissa kirjoissa on päällispuolisesta samanlaisuudesta huolimatta aika paljon eroja, joiden voi olettaa kertautuvan sarjojen myöhemmissä osissa. Valintapäätökseni tulisi siis perustua sarjojen muihinkin osiin. Solmu pyrkii palaamaan aiheeseen näiden osalta myöhemmin.



Solmun tehtäviä

Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Yksinkertaisilta näyttävät käytännön tilanteet saattavat usein johtaa ongelmiin, joiden ratkaiseminen on yllättävän hankalaa.

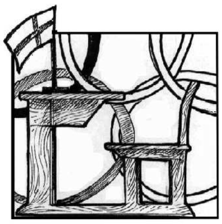
Tilanne 1: Painoaan tarkkaileva lammas haluaa rajoittaa syömistään ja kiinnittää sen vuoksi itsensä köydellä (miten ihmeessä?) ympyrän muotoisen aitauksensa reunatolppaan.

Ongelma 1: Jos aitauksen säde on 10 m, niin mikä olisi sopiva köyden pituus, jotta lammas pystyisi syömään täsmälleen puolet aitauksen ruohosta? Vastaukseksi riittää likiarvo.

Tilanne 2: Lieriön muotoiseen tyhjään juomalasiin asetetaan mehupilli. Pilli on kallellaan niin, että sen alaosa on pohjan reunassa ja yläosa yltää juuri ja juuri lasin yläreunaan (vastakkaisella puolella). Lasiin kaadetaan hitaasti limonadia, jolloin pilliin kiinnittyy kuplia ja se alkaa nousta lasista. Oletetaan, että pillin alapää nousee suoraan ylöspäin lasin sivua pitkin ja että pillin tukipiste lasin yläreunassa pysyy samana (eli tilanne on tietyssä mielessä kaksiulotteinen). Juoman kaatamista jatketaan niin kauan, että lasi täyttyy ja pilli on lopuksi vaakasuorassa.

Ongelma 2: Oletetaan, että lasin poikkileikkauksen halkaisija on 1 ja pillin pituus 2. Kuinka korkealla (lasin yläreunasta mitattuna) pillin yläpää enimmillään on, ja mikä on tällöin pillin kaltevuuskulma vaakatasoon nähden? Anna vastauksena korkeuden tarkka ja likiarvo sekä kulman likiarvo.

Ongelmien ratkaisuihin palataan Solmun seuraavassa numerossa.



Kilpailumatematiikkaa

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Vuoden 2006 Pohjoismainen matematiikkakilpailu pidettiin 30. maaliskuuta kotirataotteluna kaikissa viidessä Pohjoismaassa. Kilpailu on kutsukilpailu, ja kukin maa saa nimetä osallistujiksi enintään 20 matematiikkaolympialaisiin valmennettavaa koululaista. Tehtävät laadittiin ja vastaukset arvosteltiin tänä vuonna Tanskassa. Kilpailutehtävät ja niiden ratkaisut löytyvät mm. linkistä `http://www.math.helsinki.fi/~smy/olympia/PM/nmc94_06.pdf`. Kilpailun voitti Norjan Jørgen Rennemo, mutta kymmenen parhaan joukossa oli neljä Suomen edustajaa: Sebastian Dumitrescu (Tampereen lyseo) jaetulla toisella, Esa Vesalainen (Helsingin matematiikkalukio) ja Janne Kokkala (Päivölän opisto) jaetulla neljännellä sekä Ville Pettersson (Someron lukio) jaetulla kahdeksannella sijalla.

Toinen kevään matematiikkakilpailutapahtuma oli Päivölän opistossa 22. huhtikuuta 2006 toisen kerran järjestetty Pythagoraan Polku -joukkuematematiikkakilpailu. Kilpailuun osallistui kaikkiaan 12 nelihenkistä lukiolaisjoukkuetta Helsingistä, Espoosta, Tampereelta, Nurmosta, Porista, Hämeenlinnasta ja Päivölästä. Kilpailijat ratkaisivat joukkueina kolmessa tunnissa kaikkiaan 20 tehtävän sarjaa. Kilpailun epävirallisen luonteen vuoksi sen tuloksia ei julkisteta. Solmu julkaisee ohessa Pythagoraan polun tehtävät. Ratkaisuihin palataan myöhemmin.

1. Neljä avaruuden pistettä, A, B, C ja O sijaitsee niin, että $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ ja $\angle AOC = \gamma$, $\angle ABC = \angle ABO = \angle OBO = 90°$. Todista, että $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

2. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ ja kaikille $x \in [0,1]$ pätee

$$\frac{1}{f(x)} < f'(x).$$

Todista, että

$$\int_0^1 f(x)\,dx < \frac{7}{3}.$$

3. Määritä kaikki derivoituvat funktiot f, jotka toteuttavat seuraavat ehdot: kaikilla reaaliluvuilla x ja y pätee $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$. Lisäksi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituva ja $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että kaikilla x pätee

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f(t)(x-t)\,dt.$$

5. Määritä funktion $f(x) = \sqrt[x]{x}$ ääriarvot välillä $[\frac{1}{2}, \infty[$.

6. Olkoot $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ ja $ax^2 + bxy + cy^2$ lausekkeita, jotka ovat positiivisia kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$ ja joiden suhde ei ole vakio. Todista, että $(aB - bA)x^2 + 2(aC - cA)xy + (bC - cB)y^2$ saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

7. Todista, että konveksin (kuperan) monikulmion ympäri voidaan piirtää suunnikas, jonka pinta-ala on korkeintaan kaksi kertaa niin suuri kuin monikulmion.

8. Päivolään tullessa eräs lukiolainen tulee aina samalla junalla ja hänet haetaan juna-asemalta aina täsmälleen junan tullessa. Kerran tämä lukiolainen tulikin asemalle junalla joka oli asemalla tasan tuntia ennen kuin juna millä hän yleensä tulisi. Lukiolainen lähti kävelemään asemalta kohti kotia ja jonkin ajan kuluttua häntä hakemaan lähtenyt auto tuli vastaan ja vei kävelijän Päivolään 10 minuuttia etuajassa. Eräänä toisena päivänä tämä sama päivöliini tuli asemalle tasan puoli tuntia etuajassa ja lähti taas kävelemään hakijaansa vastaan. Kuinka monta minuuttia etuajassa hän nyt saapui Päivolään?

9. Kuutio värjätään kuudella eri värillä, yksi väri kutakin tahkoa kohti. Kuinka monella eri tavalla kuutio voidaan tällöin värjätä, jos kaksi värjäystä ovat samoja silloin, kun ne voidaan saada toisistaan kääntämällä kuutio?

10. Kolme r-säteistä ympyrää sijaitsee siten, että kunkin kehä kulkee kahden muun ympyrän keskipisteen kautta. Laske ympyröiden yhteisen osan pinta-ala.

11. Kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä, ja pisteiden A, B, C ja D, E, F kiertosuunta on sama. Sivut AB ja DE eivät ole yhdensuuntaisia. Osoita, että janojen AD, BE ja CF keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

12. Kuperan nelikulmion vastakkaisten sivujen keskipisteiden yhdistysjanat jakavat nelikulmion neljäksi osanelikulmioksi. Todista, että kahden sellaisen osanelikulmion, joilla ei ole yhteisiä sivuja, alojen summa on sama kuin toisen samanlaisen osanelikulmioparin nelikulmioiden alojen summa.

13. Neljä pistettä sijaitsee avaruudessa, ja ne eivät sijaitse samassa tasossa. Kuinka monta tasoa voidaan laittaa tähän avaruuteen niin, että kaikki neljä pistettä ovat yhtä etäällä tasosta?

14. Kuinka monta kertaa täytyy heittää kolikkoa, että todennäköisyys kolmelle peräkkäiselle klaavalle on vähintään 25 %?

15. Jana katkaistaan kolmeen palaan kahdesta satunnaisesta kohdasta. Mika on todennäköisyys, että saaduista kolmesta palasta voidaan muodostaa kolmio?

16. 1500 km levyisen aavikon vastakkaisilla laidoilla on kaupungit. Kuorma-auto lähtee toisesta kaupungista liikkeelle ja yrittää päästä vastakkaiseen kaupunkiin. Kuorma-auto pystyy kantamaan mukanaan polttoainetta 900 km pituiseen matkaan kerrallaan. Kuorma-auto voi jättää kuinka suuren tahansa osan lastistaan aavikolle varastoksi, josta se voi täydentää tankkiaan kun tarvitsee. Jos oletamme, että polttoainetta ei häviä lainkaan varastoinnin aikana, niin kuinka kuorma-auto pääsee aavikon yli toiseen kaupunkiin mahdollisimman vähällä polttoaineen kulutuksella? Kuinka paljon polttoainetta tarvitaan?

17. Määritellään jono (a_n) asettamalla $a_0 = 0$ ja $a_{n+1} = 3a_n + 1$, kun $n > 1$. Osoita, että a_{2010} on jaollinen 121:llä.

18. Positiiviset kokonaisluvut x, y ja z toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 &= 2(y+z), \\ x^6 &= y^6 + z^6 + 31(y^2 + z^2). \end{cases}$$

Määritä x, y, z.

19. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ on jaollinen 10:llä.

20. Kaksi pelaajaa pelaa peliä kirjoittamalla vuorotellen taululle positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat korkeintaan k. Jo kirjoitetun luvun tekijää ei saa kirjoittaa. Pelin häviää se, joka ei enää voi kirjoittaa lukua. Millä k:n arvoilla pelin aloittava pelaaja voi aina voittaa pelin?