



# Osataanko matematiikkaa kyllin hyvin?

*Marjatta Näätänen*

Dosentti

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Solmun tekijöille on tullut paljon kannanottoja matematiikan osaamistasosta eri oppilaitosten matematiikan opettajilta. Tässä on kooste palautteesta.

Matematiikkaan suhtautuminen näyttää jakavan ihmiset kahteen ryhmään; niihin, jotka pitävät ja arvostavat matematiikkaa ja niihin, jotka pelkäävät ja inhoavat sitä. Jos jakautuminen osuisi niin, että ne, jotka pelkäävät ja inhoavat matematiikkaa, olisivat juuri niitä, jotka eivät myöhemmin ammattiopinnoissaan tai työelämässään tarvitse matemaattista tietoutta ja taitoja, olisi asiaan helpompi löytää ratkaisuja: Opetuksessa peruskoulusta yliopistoon asti voitaisiin keskittyä niihin, jotka pitävät matematiikasta ja arvostavat matemaattista ajattelua ja tietävät saavansa siitä etua opiskelussaan ja tarvitsevansa sitä työelämässään. Valitettavasti tilanne ei ole näin yksinkertainen. Näyttää jopa siltä, että viralliseksi kannaksi on muodostunut, että opetuksen tavoitteet ja työmäärät on suunniteltava erityisesti niiden mukaan, joiden tiedetään tarvitsevan matematiikkaa tehtäviensä kunnolla hoitamisessa, mutta jotka samalla inhoavat sitä yli kaiken. Onko matematiikan opetuksen suunnittelusta ja toteutuksesta puuttunut tunneäly?

Matematiikan parissa työskentelevät ovat kyllästymiseen asti saaneet kuulla kuin leuhkimisena ”Matematiikasta en koskaan ymmärtänyt mitään” ja ”Tarvitaanko tätä johonkin? Koneethan nykyisin laskevat.” Näin ai-

kuiset siirtävät omat huonot asenteensa ja tunteensa uusille polville median auliilla avustuksella. Opettajat toki kohtaavat työssään myös positiivisia ja innostuneita asenteita. Positiivisia kokemuksia tulee raportoitua eteenpäin harvoin; opetustyötähän raskauttavat ne, joilla on puutteelliset pohjatiedot ja huono asennoituminen ja joilta uuden oppiminen ei sen vuoksi suju.

Parhaillaan käynnistyvä kerhotoiminta osoittaa kuitenkin, että negatiivisen suhtautumisen kierre on katkaistavissa; oppilaat ovat kerhoissa, jos niitä heille pienestä pitäen tarjotaan, hyvin innostuneita matematiikasta. Myös unkarilaisvaikutteista matematiikan alkuopetuskokeilua tekevät suomalaiset opettajat iloitsevat innostuneista oppilaista.

## Kokemuksia korkeakoulusta

Korkeakoulun matematiikan opettajan virassa jouduin 1980-luvulta lähtien kokemaan, kuinka matematiikan ja tilastotieteen suorittajien määrä romahti siitäkkin pienestä osajien ja kiinnostuneiden joukosta mikä se oli ollut 1970-luvulla (noin 120 opiskelijasta matematiikan arvosanoja suoritti vuosittain noin 10–15). Tästä joukosta useat jatkoivat ylempiin tutkintoihin ja tutkimustyön pariin. Edelläesitetynlaiset ja muut negatiivista asennoitumista heijastavat retoriset kysymykset tu-

livat samanaikaisesti yhä yleisemmiksi ja oppilasmäärät kursseilla pienenevät.

## Kokemuksia ammattikorkeakoulusta

Surukseni täytyy tunnustaa, että opiskelijoiden (suomalaisien) matemaattiset taidot tuntuvat vuosi vuodelta käyvän köykäisemmiksi. Eihän meille ole koskaan tullutkaan lukioista parasta ainesta, mutta nyt tilanne on aika karmea. Alkeelliset peruslaskutoimitukset murtoluvuilla, lausekkeiden sievennys, peruskaavojen ”vettä valaen” hallinta ym. ovat monella täysin retuperällä. Sitten näiden opiskelijoiden kanssa pitäisi pystyä selviytymään sellaisista aiheista kuin Fourier’n sarjat, Fourier-muunnos, differenssiyhtälöt,  $z$ -muunnos jne., jotka esim digitaalisessa signaalinkäsittelyssä ovat perustyökaluja. Matemaattinen tarkkuus (täsmälliset todistukset) on suurelta osin hylättävä. Lisäksi tähän soppaan on vielä liitettävä laskenta tietokoneella ja säästösyistä tapahtunut kontaktiopetustuntien vähenys viime vuosina.

Mikä mahtaa olla syynä tähän tilanteeseen? Mitä lukioissa tapahtuu nykyään? Vaaditaanko siellä tehtäväksi esim. kotitehtäviä? Käydäänkö asioita läpi liian nopeasti? Meidän opiskelijamme eivät juurikaan tee kotilaskuja, ilmeisesti tällainen käytös on opittu jostain; kun ei niitä ole vaadittu ennenkään, niin ei niitä tehdä nytkään. Täytyy siis laskea laskuja harjoitustunneilla koulussa ja oikein ratkaistuihin tehtäviin saa lisäpisteitä kokeessa. Tämäkään ei saa kaikkia laskemaan! Pitäisikö järjestää ilmainen oluttarjoilu laskuharjoituksiin? Koska harjoitustuntejakin on niukasti, jää opiskelijoiden laskurutiini vaatimattomaksi.

Eräs syy on varmaan myös se, että tekujen pääsykokeessa on viime vuosina supistettu runsaasti matemaatiikan osuutta. Sisään pääsee sellaisia, joilla nykyvaatimusten mukaan ei ole juuri edellytyksiä selviytyä opinnoista. Resurssien kaikinpuolista tuhlausta!

Totta kai poikkeuksiakin löytyy; onhan toki hyviäkin joukossa. Lisäksi jonkinlainen ilonaihe ovat ulkomaalaiset, joiden laskutaito on keskimäärin ottaen parempi kuin suomalaisten. Porukkaa on Kiinasta, Venäjältä, USA:sta, Unkarista ja Itävallasta; osa vaihto-opiskelijoita, mutta suurin osa käy läpi koko nelivuotisen insinöörin koulutusohjelman. Tietotekniikka on houkutin, ehkä myös Nokia. Kiinalaiset ovat kertoneet, etteivät he saa käyttää kaavakokoelmia, vaan kaavat on opeteltava ulkoa. Kävin EU-opettajavaihdossa, opiskelijoiden keskimääräinen laskutaito oli huomattavasti parempi kuin täällä – mutta siellä onkin kunnan karsinta paikalliseen AMK:hon.

Ammattikorkeakoulujen tekniikan alan opiskelijoista 1/3 on lukenut lukion lyhyen matematiikan. Trigonometria-vektorit -perustan puuttuminen lukion

nykyisestä OPS:sta on heille melkoinen opintoja vaikeuttava ongelma. Arvelisin, että tilanne on saman kaltaisen myös yliopistoissa ja teknillisissä korkeakouluissa matematiikan ja luonnontieteiden osalta. Tämä lyhyen matematiikan asia koskee tuhansia teknisten alojen opiskelijoita vuosittain. Oman ongelmansa muodostavat ammattioppilaitoksista tulevat opiskelijat. Heitäkin on 1/3 AMK:n tekniikan opiskelijoista. Näiden opiskelijoiden matematiikan osaaminen on käytännössä peruskoulutasoa. Opetuksen eriyttäminen on ollut melkoinen työ, eikä se ole aina onnistunut. Tosin jotkut ammattioppilaitoksista tulevat opiskelijat ovat erittäin lahjakkaita ja motivoituneita.

Ammattikorkeakoulusta löytyy insinööriopiskelijoita, joille tilavuuden käsite on epäselvä; he eivät osaa laskea pinta-alaa, jos tunnetaan tilavuus ja korkeus.

## Kokemuksia teknillisestä oppilaitoksesta

Oppilaiden perustiedot ovat osoittautuneen niin puutteelliseksi, että kaiken tarvitsemamme matematiikan opetamme alusta alkaen. Teknikkokoulutukseen ei tule oppilaita, jotka ovat hyviä matematiikassa. Monet tulijat osaavat joukon temppuja, mutta eivät itse asioita. Kaikkien matematiikan alueiden käsittely on aloitettava perusteista asti (myös ylioppilailla). Lukio opettaa kaksi pahaa asiaa:

1. En osaa, enkä opikaan.
2. Voisiko tästä lintsata?

Näistä poisopettamien on työlästä.

Teknillisen opiston opettaja, joka ei suostunut alentamaan matematiikan osaamisen vaatimustasoa lujusuopin opetuksessa, sai nuhteet opetusviranomaisilta. Ehtoja ei saa antaa eikä luokalle jättää, vaikkeivat oppilaat osaisikaan oppisisältöjä. Kaikki vain insinööreinä lujuuksia suunnittelemaan vaikkei ole hajuakaan miten lasketaan! Opettaja painostettiin hyväksymään Gaussin käyrän mukaisesti tenttejä tuloksista riippumatta! Tällöin oli kyse jo ammatin vaatimasta tiedosta ja taidosta eikä perusopetuksen tasosta.

## Esimerkkejä eri oppilaitoksista

Kauppaoppilaitoksessa peruslaskutoimitusten hallinta on olematonta, päässä laskutaito surkeaa ja matematiikan inhoaminen on yleistä.

Terveystieteiden oppilaitoksessa päässä laskutaito on olematonta, suuruusluokan arviointi ei onnistu. Laatuja ei osata muuntaa. Asenne matematiikkaa kohtaan

on joko inhoava tai pelokas. Monien mielestä matematiikalla ei ole mitään tekemistä jokapäiväisen elämän kanssa.

Maatalousoppilaitoksessa suureyhtälöistä ei osata laskea muuta kuin valmiiksi ratkaistu suure.

Metsäoppilaitoksessa on enemmän sanallisia laskutehtäviä, joten pitäisi erityisesti osata soveltaa. Useissa ammattiaineissa vaaditaan melko korkeatakin matematiikan osaamista.

## Kokemuksia peruskoulusta ja lukiosta

Lyhyen matematiikan abiturientti ei ensin tuntenut potenssimerkintää  $x^2 \cdot x$ :lle. Tämä selvitettiin ja sitten, nähtyään lausekkeen  $-x - x$  hän luuli, että se on  $-x$  toiseen potenssiin.

Lyhyen oppimäärän lukiolaisista merkittävä osa ei pysty ratkaisemaan yksinkertaista ensimmäisen asteen yhtälöä, tyyppiä  $3x = 5$ .

## Tuntimääristä

Pitäiskö tuntimääriä lisätä? Tämä ratkaisu tulee tietysti ensimmäiseksi mieleen. Ongelma on kuitenkin monimutkaisempi ja vaatii syvällisempää pohdiskelua kuin vain tuntimäärien lisäämistä, joka sekin voi olla osa ratkaisua. Tuntimäärien supistamista ovat valittaneet lähes kaikkien aineiden edustajat. Asia on siis yhteinen kaikille hyvään kokonaistulokseen pyrkiville opettajille ja kouluttajille aineesta riippumatta. Tuntimäärien lisäystä yritimme korkeakoulussa aikoinaan kun huomasimme ettei porukka osannut lukion lyhyen oppimäärän asioita vaikka oli päässyt korkeakouluun vain jos oli ylioppilaskirjoituksissa saanut vähintään cumun lyhyestä matematiikasta. Teimme testejä osaamisesta ja järjestimme vapaaehtoisia tukiopetuskursseja lukion oppimäärästä niille, jotka testien mukaan ja omastakin mielestään sitä tarvitsivat. Oppilaat olivat jopa innostuneita täydentämään osaamistaan, pisteitä ei saanut. Myöhemmin muita seuraten korkeakoulu päätti, että kaikkien pitää suorittaa pakollinen matematiikan (laskennon) oppimäärä, 4 opintoviikon laajuinen. Se synnytti lähes kapinan tai ainakin loi uskomattoman vihamielisen asennoitumisen matematiikkaa kohtaan, joka katsottiin ”syylliseksi” päätökseen. Kielteistä asennoitumista tuki aineiden välinen kilpailu, olihan matematiikalle uhrattu opintoviikkojen määrä pois jostakin muusta. Kolmannes oppilaista oli avoimen vihamielisiä, kolmannes oli kiinnostuneita ja asiansa hyvin hoitavia, vaikka sosiaalinen paine vaikutti heihinkin ja kolmannes vain halusi jotenkin saada kurssin pois alta.

## Opetushallitus

Olisiko lähtökohta huonolle tasolle opetushallituksen tasovaatimuksissa tai siinä, miten vaatimusten toteuttamista kontrolloidaan? Neuvostoliitolla oli maailman tiukimmat ympäristönormit aikoinaan, mutta tulos oli katastrofaalinen!

## Miten ennen?

Ei kai perusopetuksen puitteissa voida lähteä erikoistamaan opetusta niin kuin erikoislukioissa? Aikaisemmin asia hoitui arvosanojen jouston avulla. Oppilaat saattoivat ”erikoistua” kutakin kiinnostaviin aineisiin siten, että hankkivat toisista parhaat arvosanat ja jättivät toiset alimmalle tasolle. Jokainen opettaja löysi hyviä ja huonoja oppilaita katraastaan ja huomio kiinnitettiin hyvien oppilaiden tasoon. Ylhäältä annetut tasovaatimukset olivat myös hyviä oppilaita ajatellen laaditut niin, että arvosanojen erilaisuudessa oli järkeä sekä osaamisen tason mittarina että tarvittavan jouston toteuttamisessa. Tässä suhteessa tasa-arvostaminen arvosanoissa ja vaatimusten asettamisessa aineen kannalta huonoimpien tai aineesta vähiten kiinnostuneiden oppilaiden ”mielentilan” kannalta optimaaliseksi on ollut tuhoisaa. Sitä ei korjata tuntimäärillä vaan oppilas-kohtaisella joustolla.

## Opetusmenetelmistä

Myös opetusmenetelmät ovat tärkeitä jouston aikaansaamiseksi ja työskentelyn tehostamiseksi. Onko kokeilutoiminta tässä asiassa vireää ja tuloksellista vai onko alan tutkimus vain pieniä yksittäisiä asennekyselyjä?

## Laskimen käyttö

Lyhyen matematiikan lukijat haluaisivat käyttää laskinta kaikessa. Esim. ei osata katsoa lukujen  $1, 2 - \sqrt{7}, 4, 2 + \sqrt{7}$  suuruusjärjestystä ilman laskinta. Osittelu-lakien soveltaminen on aivan outoa.

## Jakaantuuko oppilasaines kahtia?

Tämä on näppituntuman havainto. Dimensiossa julkaistavat tilastot osoittavat pitkän matematiikan ykköskirjoittajien jakautuneen kahteen kastiin riippuen siitä, onko kirjoitettu pakollisena vai ei.

## Asennoituminen

Monet ovat huolissaan siitä, että liian moni oppilas etenkin keskitason lukioissa yrittää päästä helpolla ja tyytyy huonompaan kurssiarvosanaan mitä kyvyt todellisuudessa edellyttäisivät. Asettavatko nuoret tavoitteensa liian korkealle ja jos näihin ei yllätä, antavat periksi liian helpolla? Eikö ”hyvä keskitaso” kelpaa? Monien asenteet matematiikkaa kohtaan ovat aika hirveät.

## Oppikirjat

Ovatko oppikirjat tulleet liian yksityiskohtaisiksi? Matematiikan oppikirjoissa on niin paljon valmiiksi laskettuja esimerkkejä, että luulisi itseopiskelun olevan kohtuullisen helppoa. Vuonna 1962 käytettyjen matematiikan oppikirjojen sivumäärä oli noin 300. Tällä hetkellä uskoisin sivuja olevan noin 1000! Lisäksi nykyisten taulukkikirjojen kaavakokoelma piti osata ulkoa.

## Fysiikka

Syynä matematiikan tason putoamiseen on oppimiskäsitys, jossa pohdiskellaan loputtomasti eikä tehdä lapsille selväksi mitä pitää muistaa ulkoa. En tiedä ”kuka Perkele” on saanut ensimmäisenä päähänsä, että murtolukujen yhteenlasku on helpointa siten, että keksitään säännöt joka ainoa kerta piirtelemällä uudestaan kokonaisia ja osia sen sijaan, että vaadittaisiin säännön osaaminen ulkoa!

Voiman komponentti on aina  $F \sin \alpha$  tai  $F \cos \alpha$ . Lukion toisluokkalaisista ei juuri kukaan osaa sanoa kumpi on kumpi. No minähän opetan asian viimeinkin ”kunnolla”: piirrän suorakulmaisen kolmion ja ilmoitan sopimukset. Sanon vielä, että teidän kannattaisi käyttää muutama minuutti kotona siihen, että muistatte: sini vastainen ... tai te sotkette tätä koko lukioaikanne (omasta mielestäni hyvin toimittu). Vuosi toisensa perään sama lopputulos: lähes kaikki valitsevat sotkemisen!

On anteeksiantamatonta, että samat ihmiset, jotka ovat valmiita opettelemaan vieraiden kielten tuhansia sanoja on totutettu siihen, että he eivät voi opetella matematiikasta pariakymmentä sääntöä, joilla pärjäisi jo aika pitkälle.

Toinen asia, joka on mennyt ”ongelmanratkaisun” mukana metsään on laskurutiinien huono hallinta. Matemaattisen ajattelun kielenä ovat rutiinit. Jos ei ole niitä, ei ole kieltäkään. Jos ei ole ajattelun välineitä, ei ole ajatteluakaan.

Omissa testeissäni suunta huonompaan alkoi 1990-luvun puolivälissä. Matematiikan heikko osaaminen näkyy fysiikan laskuissa esiintyvänä alkeellisina virheinä ja siinä, että asioiden perustelu on puutteellista. Johdonmukainen ajattelu puuttuu. On melko työlästä saada oppilas ajattelemaan ja pyrkimään kohti asioiden ymmärtämistä, ei ulkolukua.

## Osaamistason seurantatutkimus

Tuohi, Helenius, Hyvänen: Tietoa vai luuloa – insinööriopiskelijan matemaattiset lähtövalmiudet. Turun ammattikorkeakoulu, 2004, 110 s + 12 liitettä (Turun ammattikorkeakoulun raportteja; 29)

Tekijät ovat seuranneet aloittavien opiskelijoiden matematiikan osaamistasoa testillä, jota on toistettu vuodesta 1999 lähtien. Tuloksista havaitaan, että matematiikan osaamisen taso on heikentynyt.

Tutkimuksessa todetaan, että lukion oppimäärän suoritaneet osaavat matematiikkaa huomattavasti paremmin kuin ammatillista reittiä opiskelemaan tulleet. Eri koulutusohjelmien insinööriopiskelijoiden lähtösovalmiuksissa on merkitseviä eroja. Samaa testiä tehtiin myös Teknillisessä korkeakoulussa, nämä opiskelijat menestyivät kokeessa merkitsevästi paremmin kuin ammattikorkeakoulussa aloittavat opiskelijat. Tutkimuksessa selvitettiin myös opiskelijan oman osaamisen arviointia. Monet opiskelijat uskoivat ratkaisunsa varmasti oikeaksi, vaikka se olikin virheellinen.