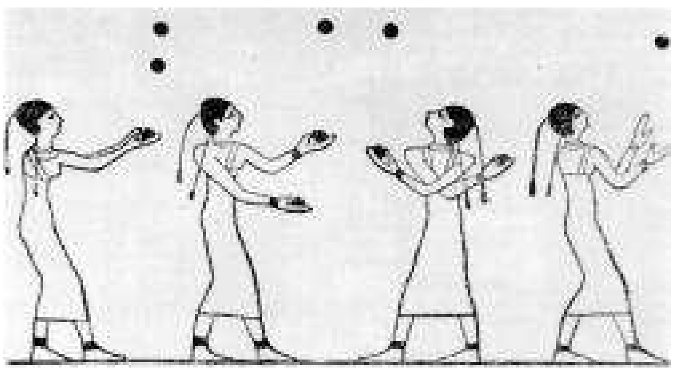
Jongleerauksesta

Harri Varpanen
Jyväskylän yliopisto
havarpan@maths.jyu.fi

Johdanto

Jongleeraaminen on erinomaista vastapainoa matematiikan harrastamiselle. Pitkällisen matematiikkasession jälkeen hartiat ja aivot tapaavat olla jumissa, jolloin viidenkin minuutin heittely (ja pudonneiden pallojen nostelu) rentouttaa huomattavasti sekä kehoa että mieltä. Alkuun on helppo päästä, kunhan löytää sopivat pallot. Esimerkiksi ilmapallolla päällystetyt, hiekalla täytetyt tennispallot ovat varsin mainiot. (Pelkät tennispallot ovat liian kevyitä ja pudottuaan pomppivat sekä vierivät turhan kauas.) Jongleeraaminen on kuitenkin myös matemaattisesti mielenkiintoista, kuten tulemme näkemään.

Jongleerauksessa erilaiset rytmit ja heittojen korkeudet saavat aikaan kuvioita, joita voi muodostaa myös useamman ihmisen voimin. Tässä mielessä jongleeraaminen muistuttaa soittimen soittamista, ja sävelkuvioiden tapaan myös jongleerauskuvioilla on oma teoriansa. Teoria on yksinkertainen, luonnollinen ja se istuu yllättävän nätisti matematiikan kielelle. Se keksittiin vasta 1980-luvun lopussa, mikä on hämmästyttävää, sillä jongleerauksesta löytyy todisteita jo 4000 vuoden takaa (kuva 1).



Kuva 1. Pala egyptiläisestä seinämaalauksesta. Samassa maalauksessa esiintyy myös tanssijoita ja akrobaatteja. Maalaus on kuningas Beni Hassanin haudasta noin vuodelta 2000 eKr.

Teorian myötä kuvioiden ymmärtäminen ja kommunikoiminen on helpottunut huomattavasti. Nykyään kuviot osataan merkitä yksiselitteisesti ja tiedetään, miten monimutkaiset kuviot rakentuvat yksinkertaisemmista. Kuvioita voi myös katsella tietokoneen ruudulta, ellei elävää jonglööriä ole saatavilla mallia näyttämään.

Tämä teksti toimii lyhyenä, esimerkkipainotteisena johdantona jongleerauskuvioiden matemaattiseen teoriaan. Teksti nojaa vahvasti internet-simulaattoriin, joten sen täyspainoinen lukeminen on mahdollista vain internet-yhteyden ja Javalla varustetun verkkoselaimen ääressä. Laajempi johdanto aiheeseen on lukuvuonna 2003-2004 kirjoittamani opinnäytetyö, joka löytyy osoitteesta

www.maths.jyu.fi/˜havarpan/jong.pdf.

Opinnäytetyön ensimmäinen luku on kirjoitettu käsillä olevaa tekstiä perusteellisemmin ja täsmällisemmin, se ei sisällä vaikeaa matematiikkaa eikä se nojaa internetiin, joten sen lukeminen on joka tapauksessa suositeltavaa.

Jongleerauksesta yleisemmässä mielessä löytyy lisätietoja mm. seuraavista osoitteista:

www.juggling.org/help
(sivuston päivittäminen lopetettu 2001)
www.jugglingdb.com
www.passingdb.com.

Simulaattori

Esimerkkien havainnollistamiseksi käytämme mainiota JugglingLab-nimistä www-simulaattoria, joka on helpokäyttöinen: haluttu kuvio kirjoitetaan selaimen osoiteriville perusosoitteen jatkoksi. Seuraavassa esimerkkejä simulaattorin käytöstä ja samalla erilaisista kuviotyypeistä.[1]

http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?450
http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?(4x,2x)
http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?[54]24
http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?([44x],2)(2,[44x])
http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?<5p 3p 4 | 4p 2 3p>
http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?<(4x,4xp)|(4x,4xp)>

(Sivustosta www.passingdb.com löytyy omalle koneelle asennettavaksi simulaattoreita, joilla useamman jonglöörin samanaikainen simuloiminen on kätevämpää.)

Perusidea ja siteswap-kuviot

Miten kuvailla täsmällisesti esimerkiksi kolmen pallon peruskuviota

http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?3 ?

Erilaisia sanallisia selityksiä voi yrittää, mutta etenkin monimutkaisten kuvioiden tapauksessa ne ovat usein mahdottomia ymmärtää. Siispä on yritettävä erotella kuviosta olennaisia elementtejä ja katsoa, mitä niistä saa aikaan.

Havaitkaamme ensin, että kuvion taustalla on *tahti*: pallot otetaan kiinni tasavälisillä tahdinlyönneillä, jotka samaistuvat mukavasti kokonaislukujen joukkoon $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. (Emme tässä kiinnitä huomiota kuvion aloittamiseen tai lopettamiseen, vaan oletamme sen jatkuvan ikuisesti.)

Havaitkaamme seuraavaksi, että pallon pitäminen kädessä ei ole kovinkaan olennaista kuvion rakenteen kannalta:

pattern=3;hands=(10)(30)(20).;dwell=0.1

(Perusosoite
http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php? jätetty pois.) Emme siis menetä paljoakaan olettamalla, että pallon kiinniotto ja sitä seuraava heitto tapahtuvat täsmälleen samanaikaisesti. Toki tämä on käytännössä mahdotonta: pallot osuisivat yhteen, eikä kukaan omaa moista rajatonta heittonopeutta. Me olemme kuitenkin kiinnostuneita kuvioiden teoriasta, jolloin tällainen oletus on pelkästään hyödyksi.

Voimme nyt kuvata yhden heiton korkeutta sen *ajallisella etäisyydellä* seuraavasti: jos pallo heitetään (eli otetaan kiinni) vaikkapa tahdilla 1 ja otetaan kiinni (eli heitetään uudelleen) seuraavan kerran tahdilla 4, niin tahdilla 1 tapahtuvan heiton *etäisyys* eli *heittoluku* on $4-1=3$. Esimerkkimme peruskuviossa jokaisen heiton etäisyys on kolme, mikä on helpoiten nähtävissä erivärisillä palloilla:

pattern=3;hands=(10)(30)(20).;dwell=0.1;colors=mixed

tai – palataksemme normaaliin heittonopeuteen –

pattern=3;colors=mixed

[1]Simulaattori on Java-sovellus, joten selaimen on tuettava Javaa. Ensimmäistä kertaa käytettäessä simulaattorin lataaminen kestää hetken. Kiitokset Jack Boycelle ja kumppaneille simulaattorin kehittämisestä.

Kukin pallo siis otetaan kiinni (ja heitetään) joka kolmannella tahdilla.[2]

Olemme nyt kuvailleet kolmen pallon peruskuvion seuraavasti: jokaisella tahdilla tapahtuu heitto, jonka etäisyys on kolme. Kuviomme voidaan näin ollen ilmoittaa jonona, jossa tahdinlyönnit eli kokonaislukujen joukko on korvattu tahdinlyönneillä tapahtuvien heittojen heittoluvuilla:

$\ldots, 3, 3, 3, \ldots.$

Koska tämä jono on jaksollinen (luku kolme toistaa itseään), riittää ilmoittaa vain yksi jakso, jolloin kuviomme saa lopullisen muodon 3.

Miksi muka tämä muoto on lopullinen? Miksi on pakko heittää pallo kädestä toiseen? Luku kolme ei sinällään sano mitään siitä, heitetäänkö pallo samaan vai eri käteen. Olemme kuitenkin kaikessa hiljaisuudessa olettaneet, että kaksi kättä heittelevät palloja vuorotahdein. Näin pariton heitto (heitto, jonka heittoluku on pariton) heitetään eri käteen ja parillinen samaan käteen.

Olemme itse asiassa hiljaisesti olettaneet myös sen, että ainoastaan yhden pallon heittäminen on sallittua kullakin tahdilla. Ilman tätä rajoitusta yhdellä tahdinlyönnillä tarvittaisiin kullekin pallolle oma heittolukunsa ja asiasta tulisi hieman monimutkaisempi. Tähän tapaukseen palaamme myöhemmin.

Jos nyt annettuna on kuvio, jota heitetään edellämainituin rajoituksin, voidaan se ilmoittaa yksiselitteisesti heittolukujensa jonona. Jos kuvio (eli heittolukujen jono) on jaksollinen, riittää ilmoittaa jonosta yksi jakso, jonka pituus on kuvion *jaksonpituus*.[3]

Tässä idean sulattelemiseksi muutama kuvio lisää eli kuviot 4, 5, 1 ja 441:

pattern=4;colors=mixed
pattern=5;colors=mixed
pattern=1;colors=mixed
pattern=441;colors=mixed;hands=(10)(30)(20).;dwell=0.1

(Viimeisen kuvion jaksonpituus on kolme, muiden yksi. Animaattori heittää normaalisti ”ykköset” hieman tahdittomasti, siksi viimeisessä kuviossa kiinnipitoaika on laitettu vähäiseksi.)

Numerot nolla ja kaksi ovat hieman poikkeavia ja vaativat erillisen selityksen. Kuvitelkaamme ensin, että kolmen pallon peruskuviosta 3 jätetään yksi pallo pois, tällöin syntyy kuvio 330:

pattern=330;colors=mixed;hands=(10)(20).;dwell=0.05

Nolla on siis ”tyhjä” heitto. Hetki sitten sovimme, että kullakin tahdilla heitetään vain yksi pallo, eli tarkalleen ottaen kullakin tahdilla heitetään *enintään* yksi pallo.

Olettakaamme sitten, että heiton etäisyys on kaksi. Pallo siis heitetään samaan käteen, *eikä käsi siinä välissä tee mitään*, sillä välissä olevalla tahdinlyönnillä heittovuoro (= kiinniottovuoro) on toisella kädellä. Näin ollen palloa voi yhtä hyvin pitää vain kädessä paikallaan yhden tahdin yli, ja näin myös useimmiten tehdään. Esimerkiksi sopii kuvio 423:

pattern=423;colors=mixed;hands=(10)(30)(20).;dwell=0.1

tai normaalilla kiinnipitoajalla

423

(Sopii myös kokeilla pelkästään kuviota 2.)

Voimme nyt esittää lukujonona jokaisen kuvion, joka täyttää kaksi rajoitusta:

- kullakin tahdilla heitetään enintään yksi pallo
- yksi jonglööri heittää vuorotahdein oikealla ja vasemmalla kädellä.

Jälkimmäinen näistä on itse asiassa ainoastaan sopimus, joka vaikuttaa vain kuvion ulkonäköön. Koska kullakin tahdilla heitetään vain yksi pallo, voi tuon pallon heittää koko ajan myös yksi ja sama käsi tai vaikkapa seitsemän eri kättä vuorotellen. Teoreettisesti kuvio pysyisi kuitenkin samana.

Näitä ”enintään yksi pallo per tahti” -kuvioita sanotaan *siteswap-kuvioiksi.* (Nimen syystä lisää opinnäytetyön kohdassa 2.11, sivu 19.)

Siteswap-kuvioiden ominaisuuksia

Millaiset lukujonot esittävät siteswap-kuvioita? Kaikenlaiset jonot eivät nimittäin kelpaa, kelvoton jono on esimerkiksi 431. Kelvottomuus johtuu siitä, että heittoa 4 seuraisi heitto 3, ja nämä kaksi palloa ”laskeutuisivat” samalla tahdinlyönnillä.

Voidaan osoittaa, että kuvion kelvollisuus voidaan testata seuraavasti, esimerkkinä kelvollinen kuvio 450:

[2] Kiinniotoista muodostuva tahti on hieman helpompi erottaa kuviosta kuin heitoista muodostuva tahti. Käytännössä tahdinlyönti myös syntyy kiinnioton aiheuttamasta äänestä. Luonnollisempaa on kuitenkin ajatella niin, että tahdinlyönnillä heitetään.

[3] Jaksottomia kuvioita ei olennaisesti ole olemassa, ks. opinnäytetyön luku 5.

Kirjoitetaan kuvio...	450
... ja heittolukujen alle numerot nollasta alkaen.	012
Lasketaan nämä luvut yhteen...	462
... ja otetaan jakojäännökset jaksonpituudella jaettuna.	102

Kuvion 450 jaksonpituus on kolme, joten viimeisessä vaiheessa neljä jaettuna kolmella on yksi, jää **yksi**; kuusi jaettuna kolmella on kaksi, jää **nolla** ja kaksi jaettuna kolmella on nolla, jää **kaksi**.

Koska saadut luvut 1 0 2 ovat täsmälleen toiselle riville kirjoitetut luvut 0 1 2 (eri järjestyksessä), on kuvio kelvollinen.

Sen sijaan jono 1203 (jaksonpituus neljä) ei ole kelvollinen, koska heitot 3 ja 0 "osuvat toisiinsa":

1203
0123
1326
1322

Nyt kakkonen esiintyy viimeisessä rivissä kaksi kertaa, nolla ei kertaakaan.

Lisäksi voidaan osoittaa, että kelvollisen kuvion pallojen lukumäärä saadaan heittolukujen keskiarvona; näin ollen esimerkiksi kuviossa 450 on $(4+5+0)/3 = 3$ palloa. Tämä ei kuitenkaan riitä kelvollisuustestiksi: esimerkiksi lukujen 435 keskiarvo on 4, mutta 435 ei ole kelvollinen kuvio.

Monimutkaisempia kuvioita

Entä jos luovumme rajoituksestamme ja sallimme useamman pallon heittämisen samalla tahdilla? Jos oletamme edelleen, että palloja heitetään vain yhdestä kädestä kerrallaan, ei suurta muutosta aikaisempaan tarvitse tehdä: jos useampi pallo heitetään samalla tahdilla, ilmoitetaan kullekin pallolle oma heittonumeronsa. Esimerkiksi kuviossa [45]24 heitetään joka kolmannella tahdilla kaksi palloa samanaikaisesti, toinen neljän ja toinen viiden tahdin päähän (heittoluvut hakasulkeen sisällä). Tällaisia kuvioita sanotaan *multiplex*-kuvioiksi.

Jaksonpituuden käsite vaatii tässä tapauksessa hieman tarkennusta. Vaikka ylläolevassa kuviossa [45]24 on neljä heittolukua, niin sen jaksonpituus on kolme, sillä luvut 4 ja 5 kuuluvat samaan tahtiin. Kuvion jaksonpituus on siis niiden *tahtien* lukumäärä, joiden jälkeen kuvio (eli kuvion heittoluvut) toistavat itseään.

Kelvollisen kuvion pallojen lukumäärä on jälleen jonon kaikkien lukujen summa jaettuna *jaksonpituudella*. esimerkkitapauksessamme siis $15/3 = 5$.

Kuvion kelvollisuuden testaaminenkin tapahtuu lähes samoin kuin ennen:

Kirjoitetaan kuvio...	[45]24
... ja alle numerot (saman tahdin luvuille sama numero)	[00]12
Lasketaan nämä yhteen...	[45]36
... ja otetaan jakojäännökset jaksonpituudella jaettuna.	[12]00

Tässä ovat täsmälleen samat luvut kuin toisella rivillä (hakasulkeista ei enää tarvitse välittää), joten kuvio on kelvollinen.

Entä, jos sallimme pallojen heittämisen useasta kädestä samanaikaisesti? Tällöin homma monimutkaistuu, sillä kullekin kädelle tarvitaan oma lukujononsa, ja heiton korkeuden lisäksi tulee tietää se, mihin käteen heitto suuntautuu. Yhden jonglöörin eli kahden käden tapauksessa kuviot ovat vielä kutakuinkin ymmärrettävissä: numeron perään lisätään x, jos heitto heitetään kädestä toiseen. Tässä muutamia esimerkkejä (yksi sulkupari kuvaa yhtä tahtia, sulkujen sisällä kummankin käden heittoluvut):

(4,4)
(4x,4x)
(4x,2x)
(4,2x)(2x,4)
(4x,2x)(4,2x)(2x,4x)(2x,4)

Ensimmäisen, toisen ja kolmannen kuvion jaksonpituus on yksi, neljännen kuvion jaksonpituus on kaksi ja viimeisen kuvion jaksonpituus on neljä.

Käytännön syistä näissä *synchro*-kuvioissa oletetaan aina yksi välitahti: esimerkiksi siteswap-kuviossa 4 on nopeudeltaan kaksinkertainen tahti verrattuna synchro-kuvioon (4,4). Silti synchro-kuvio ilmoitetaan muodossa (4,4) eikä muodossa (2,2), vaikka jälkimmäinen tapa olisi matemaattisesti korrektimpi. Silloin heittonumeroiden tulkinta kuitenkin olisi täysin erilainen synchro- ja siteswap-tapauksissa, mikä hankaloittaisi elämää monin tavoin. Vakiintunut käytäntö on olettaa synchro-kuvioihin välitahti (ts. heitot tapahtuvat vain joka toisella tahdilla eli parittomia heittonumeroita ei esiinny lainkaan), jolloin heittonumeroiden tulkinnat vastaavat toisiaan. Ainoa poikkeus on synchroheitto 2x, joka vastaa siteswap-heittoa 1. Seuraavien kuvioiden vertaaminen keskenään selventänee asiaa:

441
(4,2x)(2x,4)
42
(4,2)

(Kaksi viimeistä kuviota näyttävät täysin samoilta. Tarkoittaako tämä sitä, että ne *ovat* samoja?)

Myös synchro-kuvioissa pallojen lukumäärä saadaan heittolukujen keskiarvosta, mutta välitahtisopimuksen takia pitää lopuksi vielä jakaa kahdella. Esimerkiksi kuviossa (4x,2x) jaksonpituus on yksi ja heittolukujen summa kuusi. Heittolukujen summa jaksonpituudella jaettuna on siis kuusi, joka lopuksi vielä jaetaan kahdella. Kuviossa on siis kolme palloa.

Synchro-kuvioiden kelpoisuustesti toimii jälleen samaan tapaan kuin aikaisemmin, esimerkkinä kelvollinen kuvio (4,2x)(2x,4), jaksonpituus kaksi:

(4,2x)(2x,4)	Kirjoitetaan kuvio...
(2,1x)(1x,2)	... jaetaan luvut kahdella (välitahtisopimus) ...
0 0 1 1	... numeroidaan tahdit (samalle tahdille sama numero) ...
(2,1x)(2x,3)	... lasketaan yhteen ...
(0,1x)(0x,1)	... ja lasketaan jakojäännökset jaksonpituudella jaettuna.

Koska alimmalla rivillä esiintyvät kaikki mahdolliset lukujen 0 ja 1 yhdistelmät merkin x kanssa ja ilman (eli 0, 0x, 1 ja 1x), niin kuvio on kelvollinen. Kelvollinen ei sen sijaan ole kuvio (4x,4x)(2,4), sillä silloin alimmalle riville saadaan (0x,0x)(1,1), jossa yhdistelmät 1 ja 0x esiintyvät kahdesti ja yhdistelmiä 0 ja 1x ei esiinny lainkaan.

Yleistyksiä ja avoimia kysymyksiä

Edellisessä luvussa kuvaillut multiplex- ja synchrokuviot voidaan tietenkin yhdistää, jolloin saadaan esimerkiksi kuvio ([44x],2)(2,[44x]).

Lisäksi mukaan voidaan ottaa useampia jonglöörejä, mutta tällöin käsien eli sulkeiden sisältämien sarakkeiden määrä lisääntyy, eikä pelkkä x-kirjain enää riitä merkitsemään eri käteen suuntautuvaa heittoa. Käytännössä ainoastaan kahden vastakkain seisovan jonglöörin tapaus on vielä ihmisen luettavissa: silloin merkitään heittoluvun perään p sen merkiksi, että heitto heitetään toiselle suoraan (straight pass) ja xp sen merkiksi, että heitto heitetään toiselle ristiin (cross pass). Kuvio merkitään sulkeiden < > sisään ja pystyviivalla erotetaan kunkin jonglöörin heittelemät kuviot toisistaan. Esimerkiksi tekstin alun kuviossa <5p 3p 4 | 4p 2 3p> toinen jonglööri heittää (siteswap-)kuviota 5p 3p 4 ja toinen kuviota 4p 2 3p (vastaavilla tahdeilla ja kätisyyksillä).

Useamman kuin kahden jonglöörin tapauksessa ihminen siirtyy suosiolla piirrettyihin diagrammeihin, simulaattori sen sijaan pysyttelee numeromerkinnöissä.

Lopuksi muutama kysymys. Ensimmäinen kuvataan tarkemmin opinnäytetyön luvussa viisi: jos annettuna on pallojen lukumäärä ja suurin sallittu heittoluku, niin montako erilaista (oikein tulkittuna) kuviota saadaan aikaan? Tämä on vaikea kombinatorinen ongelma, jolle ei edes siteswap-tapauksessa ole löydetty ratkaisua. Kuviot pystytään kyllä luettelemaan tietokoneella kussakin tapauksessa erikseen, mutta yleistä kaavaa ei tiedetä.

Toinen kysymys liittyy käsien liikkeisiin, niihin emme ole toistaiseksi kiinnittäneet minkäänlaista huomiota. Käytännössä heiton voi heittää monella tavalla, esimerkiksi selän takaa tai toisen käden alta. Nämä on tapana ilmoittaa erikseen, esimerkiksi ”423, neloset olkapään yli selän takaa eteen”. Näin myös simulaattoreissa, missä käsien liikkeet annetaan hankalasti suoraan avaruuden koordinaatteina eri ajanhetkinä. Miten yleisimmät käsien liikkeet voisi viisaasti sisällyttää teoriaan siten, että tietokoneohjelma luettelisi (ja näyttäisi ruudulla) myös nämä ilman erillistä koordinaattien kanssa veivaamista? Miten erilaiset käsien liikkeet voi yhdistää? Uutta teoriaa ei välttämättä juurikaan tarvittaisi, mutta kiertosuunnista ja symmetriaryhmän käsitteestä voisi olla hyötyä.

Vastaan mielelläni aiheeseen liittyviin kysymyksiin.