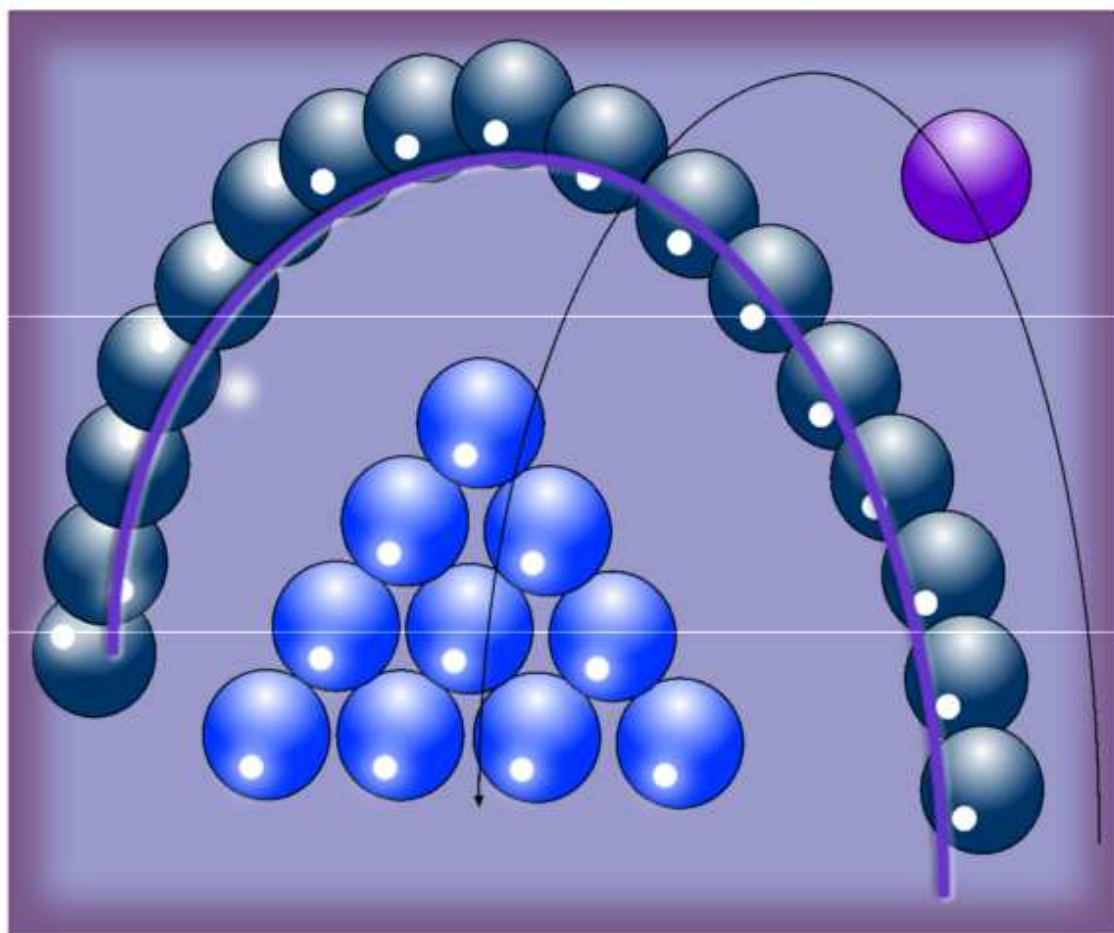


Solmu

Matematiikkalehti
3/2005

<http://solmu.math.helsinki.fi/>



Solmu 3/2005

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

<http://solmu.math.helsinki.fi/>

Päätoimittaja

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Toimitussihteerit

Mika Koskenoja, tohtoriassistentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Antti Rasila, tutkija, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti *toimitus@solmu.math.helsinki.fi*

Toimituskunta:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Ari Koistinen, FM, Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Matti Lehtinen, dosentti, Maanpuolustuskorkeakoulu

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Tommi Sottinen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Virpi Kauko, yliopistonopettaja, *virpik@maths.jyu.fi*

Jyväskylän Avoin yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, *jorma.mattila@lut.fi*

Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, professori, *jorma.merikoski@uta.fi*

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto

Kalle Ranto, assistentti, *kalle.ranto@utu.fi*

Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Tiina Rintala, opiskelija, *tirintal@paju.oulu.fi*

Oulun yliopisto

Timo Tossavainen, lehtori, *timo.tossavainen@joensuu.fi*

Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

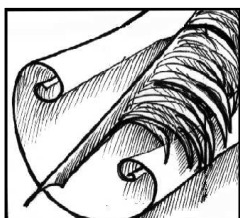
Numeroon 1/2006 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään vuoden 2005 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa sekä Suomen Kulttuurirahastoa (sanakirja-projekti).

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehteä koidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus: Suuria yhtälöitä (Pekka Alestalo)	4
Toimitussihteerin palsta: Summamutikka-keskus aloittaa toimintansa (Antti Rasila)	5
Jongleerauksesta (Harri Varpanen)	6
Kerhomatematiikkaa (Emilia Manninen ja Tiina Rintala)	11
Joukkojen mahtavuudesta (Ari Koistinen)	15
Calkinin-Wilfin jono (Markku Halmetoja)	18
Toiminnallista matematiikkaa: Fraktaaliaskartelua (Saara Lehto)	21
Lottorivin numeroiden summa (Pentti Haukkanen)	25
Presidentti-gallup (Pekka Alestalo)	27



Suuria yhtälöitä

Teknillisen korkeakoulun matematiikan laitoksen kirjastossa tehtiin suursiivous: uusille kirjoille täytyi saada lisää tilaa, joten aikansa eläneitä kirjoja siirrettiin varaston puolelle. Olin itsekin mukana tässä operaatiossa, ja eräs ensimmäisistä varastoon tuomitsemistani oli yhden kokonaisen hyllymetrin vienyt 26-osainen sarja ”Progress in Computers”. Sarjaa oli alettu julkaista v. 1960 ja viimeinen numero oli vuodelta 1985. Loppuiko siis tietokoneiden kehitys 1980-luvun puolivälissä? Ei tietenkään. Sarjan päättymisen syynä oli todennäköisesti se, että joko matematiikan laitoksella todettiin alan kehityksen seuraamisen kuuluvan jollekin muulle taholle, tai sitten julkaisijat totesivat, ettei sarjaa ole enää tarkoituksenmukaista julkaista vuosikirjan muodossa.

Joka tapauksessa kehitys viimeisten 20 vuoden aikana on ollut huimaavaa, sillä esimerkiksi NASAn 1980-luvun supertietokoneilla tekemät satelliittien ratalaskut voi nykyisin tehdä tavallisella kotitietokoneella, ainakin laskentatehon puolesta. Matemaatikoiden ja sovellusalojen tutkijoiden kannalta laskentatehon kasvu on muuttanut sekä ajattelu- ja toimintatapoja että tutkimuskohteita. Erityisen hyvin tämä kehitys näkyy suurten yhtälöryhmien ratkaisemisen kohdalla. Tekniiseen yleissivistykseen kuuluu esimerkiksi tietää, ettei lentokoneiden aerodynamiikkaa suinkaan tutkita valmistamalla erilaisia malleja, vaan lähinnä tietokonea-

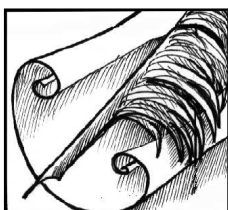
vusteisen suunnittelun kautta. Testattavan virtuaalisen koneen pinta jaetaan pieniin kolmioihin ja virtaukset rungon ympärillä selviävät, kun ratkaistaan yhtälöryhmä, jossa on pari miljoonaa tuntematonta ja saman verran yhtälöitä. Samanlaista numeerista aerodynamiikkaa on hyödyntänyt myös eräs tunnettu perunalastujen valmistaja, jonka ongelmana olivat valmistusprosessin aikana linjoilta hypähtelevät lastut. Lopulta perunalastujen muoto saatiin optimoitua valmistusprosessiin sopivaksi – ratkaisemalla supertietokoneen avulla lastun aerodynamiikkaa hallitsevat yhtälöt. Siis samaan tapaan kuin jumbo-jetin tapauksessa!

Ja lopuksi, ei sovi unohtaa internetin tunnetuinta haakuohjelmaa, joka perustuu yhtälöryhmien teoriaan. Verkkosivujen hierarkia voidaan nimittäin sisällyttää taulukkoon, jossa kullakin verkkosivulla on oma paikansa sekä pysty- että vaakasuunnassa. Sivulta A sivulle B johtava linkki ilmaistaan taulukon A:ta vastaavan rivin ja B:tä vastaavan sarakkeen leikkausruutuun asetetulla luvulla 1. Kun sitten käyttäjä kirjoittaa hakusanan ’Solmu’, niin ensimmäinen linkki johtaa Solmu-lehteen: tähän tulokseen hakupalvelun ylläpitäjät ovat päätyneet ratkaisemalla muutamaa viikkoa aikaisemmin taulukkoon liittyvän yhtälöryhmän, jossa yhtälöitä ja tuntemattomia on samaa kertaluokkaa kuin verkkosivuja maailmassa, ts. yli 4 miljardia¹.

Pekka Alestalo

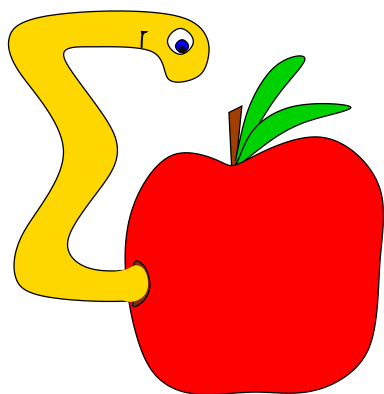
Pääkirjoitus

¹ Julkisia verkkosivuja oli tammikuussa 2005 n. 11,5 miljardia, mutta kaikkia niitä ei ole ym. taulukossa.



Summamutikka-keskus aloittaa toimintansa

Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitokselle perustetaan tänä syksynä LUMA-keskuksen alla toimiva Summamutikka-keskus. Keskus palvelee matematiikan opetusta ja opettajia, ja sen painopisteenä on toiminnallinen matematiikka. Keskus on jatkoa aikaisemmalle matematiikkakerhotoiminnalle, ja sen avajaiset pidetään 7.11.2005. Avajaisiin odotetaan noin 150 vierasta, joista suuri osa on opettajia, ja tämän Solmun numeron ilmestyminen on ajoitettu keskuksen avajaisiin.



Antti Rasila

Teeman mukaisesti tähän numeroon on saatu toiminnalliseen matematiikkaan liittyviä kirjoituksia mm. fraktaaleista. Lisätietoja Summamutikka-toiminnasta löytyy sivulta:

<http://www.helsinki.fi/summamutikka/>

LUMA-keskus on Helsingin yliopiston matemaattis-luonnontieteellisen tiedekunnan koordinoima sateenvarjo-organisaatio, joka tekee yhteistyötä koulujen, yliopistojen ja elinkeinoelämän kanssa. LUMA-keskuksen tavoitteena on luonnontieteiden, matematiikan, tietotekniikan ja teknologian oppimisen edistäminen. Keskukseen koordinoimaan toimintaan kuuluvat esimerkiksi lapsille järjestettävät tiedekerhot. Tietoa muusta LUMA-keskuksen toiminnasta löytyy keskuksen www-sivulta: <http://www.helsinki.fi/luma/>

Toimitussihteerin palsta



Jongleerauksesta

Harri Varpanen

Jyväskylän yliopisto

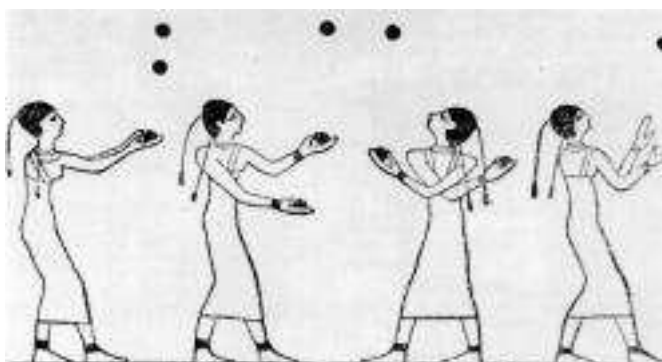
havarpan@maths.jyu.fi

Johdanto

Jongleeraaminen on erinomaista vastapainoa matematiikan harrastamiselle. Pitkällisen matematiikkasession jälkeen hartiat ja aivot tapaavat olla jumissa, jolloin viidenkin minuutin heittely (ja pudonneiden pallojen nostelu) rentouttaa huomattavasti sekä kehoa että mieltä. Alkuun on helppo päästä, kunhan löytää sopivat pallot. Esimerkiksi ilmapallolla päällystetyt, hiekalla täytetyt tennispallot ovat varsin mainiot. (Pelkät tennispallot ovat liian kevyitä ja pudottuaan pomppivat sekä vierivät turhan kauas.) Jongleeraaminen on kuitenkin

myös matemaattisesti mielenkiintoista, kuten tulemme näkemään.

Jongleerauksessa erilaiset rytmit ja heittojen korkeudet saavat aikaan kuvioita, joita voi muodostaa myös useamman ihmisen voimin. Tässä mielessä jongleeraaminen muistuttaa soittimen soittamista, ja sävelkuvioiden tapaan myös jongleerauskuvioilla on oma teorianensa. Teoria on yksinkertainen, luonnollinen ja se istuu yllättävän nätisti matematiikan kielelle. Se keksittiin vasta 1980-luvun lopussa, mikä on hämmästyttävää, sillä jongleerauksesta löytyy todisteita jo 4000 vuoden takaa (kuva 1).



Kuva 1. Pala egyptiläisestä seinämaalauksesta. Samassa maalauksessa esiintyy myös tanssijoita ja akrobaatteja. Maalaus on kuningas Beni Hassanin haudasta noin vuodelta 2000 eKr.

Teorian myötä kuvioiden ymmärtäminen ja kommunikoiminen on helpottunut huomattavasti. Nykyään kuviot osataan merkitä yksiselitteisesti ja tiedetään, miten monimutkaiset kuviot rakentuvat yksinkertaisemmista. Kuvioita voi myös katsella tietokoneen ruudulta, ellei elävää jonglööriä ole saatavilla mallia näyttämään.

Tämä teksti toimii lyhyenä, esimerkkipainotteisena johdantona jongleerauskuvioiden matemaattiseen teoriaan. Teksti nojaa vahvasti internet-simulaattoriin, joten sen täyspainoinen lukeminen on mahdollista vain internet-yhteyden ja Javalla varustetun verkkoselaimen ääressä. Laajempi johdanto aiheeseen on lukuvuonna 2003-2004 kirjoittamani opinnäytetyö, joka löytyy osoitteesta

www.maths.jyu.fi/~havarpan/jong.pdf.

Opinnäytetyön ensimmäinen luku on kirjoitettu käsillä olevaa tekstiä perusteellisemmin ja täsmällisemmin, se ei sisällä vaikeaa matematiikkaa eikä se nojaa interne-

tiin, joten sen lukeminen on joka tapauksessa suositeltavaa.

Jongleerauksesta yleisemmässä mielessä löytyy lisätietoja mm. seuraavista osoitteista:

www.juggling.org/help
(sivuston päivittäminen lopetettu 2001)
www.jugglingdb.com
www.passingdb.com.

Simulaattori

Esimerkkien havainnollistamiseksi käytämme mainiota JugglingLab-nimistä www-simulaattoria, joka on helpokäyttöinen: haluttu kuvio kirjoitetaan selaimen osoiteriville perusosoitteen jatkoksi. Seuraavassa esimerkkejä simulaattorin käytöstä ja samalla erilaisista kuviotyypeistä.²

<http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?450>
[http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?\(4x,2x\)](http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?(4x,2x))
[http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?\[54\]24](http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?[54]24)
[http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?\(\[44x\],2\)\(2,\[44x\]\)](http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?([44x],2)(2,[44x]))
<http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?<5p 3p 4 | 4p 2 3p>>
[http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?<\(4x,4xp\)|>](http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?<(4x,4xp)|>)

(Sivustosta www.passingdb.com löytyy omalle koneelle asennettavaksi simulaattoreita, joilla useamman jongloörin samanaikainen simuloiminen on kätevämpää.)

Perusidea ja siteswap-kuviot

Miten kuvailla täsmällisesti esimerkiksi kolmen pallon peruskuviota

<http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?3> ?

Erilaisia sanallisia selityksiä voi yrittää, mutta etenkin monimutkaisten kuvioiden tapauksessa ne ovat usein mahdottomia ymmärtää. Siispä on yritettävä erotella kuviosta olennaisia elementtejä ja katsoa, mitä niistä saa aikaan.

Havaitkaamme ensin, että kuvion taustalla on *tahti*: pallot otetaan kiinni tasavälisillä tahdinlyönneillä, jotka samaistuvat mukavasti kokonaislukujen joukkoon $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. (Emme tässä kiinnitä huomiota kuvion aloittamiseen tai lopettamiseen, vaan oletamme sen jatkuvan ikuisesti.)

Havaitkaamme seuraavaksi, että pallon pitäminen kädessä ei ole kovinkaan olennaista kuvion rakenteen kannalta:

`pattern=3;hands=(10)(30)(20).;dwell=0.1`

(Perusosoite

<http://jugglinglab.sourceforge.net/siteswap.php?> jätetty pois.) Emme siis menetä paljoakaan olettamalla, että pallon kiinniotto ja sitä seuraava heitto tapahtuvat täsmälleen samanaikaisesti. Toki tämä on käytännössä mahdotonta: pallot osuisivat yhteen, eikä kukaan omaa moista rajatonta heittonopeutta. Me olemme kuitenkin kiinnostuneita kuvioiden teoriasta, jolloin tällainen oletus on pelkästään hyödyksi.

Voimme nyt kuvata yhden heiton korkeutta sen *ajalisella etäisyydellä* seuraavasti: jos pallo heitetään (eli otetaan kiinni) vaikkapa tahdilla 1 ja otetaan kiinni (eli heitetään uudelleen) seuraavan kerran tahdilla 4, niin tahdilla 1 tapahtuvan heiton *etäisyys* eli *heittoluku* on $4 - 1 = 3$. Esimerkkimme peruskuviossa jokaisen heiton etäisyys on kolme, mikä on helpoiten nähtävissä erivärisillä palloilla:

`pattern=3;hands=(10)(30)(20).;dwell=0.1;colors=mixed`

tai – palataksemme normaaliin heittonopeuteen –

`pattern=3;colors=mixed`

²Simulaattori on Java-sovellus, joten selaimen on tuettava Javaa. Ensimmäistä kertaa käytettäessä simulaattorin lataaminen kestää hetken. Kiitokset Jack Boycelle ja kumppaneille simulaattorin kehittämisestä.

Kukin pallo siis otetaan kiinni (ja heitetään) joka kolmannella tahdilla.³

Olemme nyt kuvailleet kolmen pallon peruskuvion seuraavasti: jokaisella tahdilla tapahtuu heitto, jonka etäisyys on kolme. Kuviomme voidaan näin ollen ilmoittaa jonona, jossa tahdinlyönnit eli kokonaislukujen joukko on korvattu tahdinlyönneillä tapahtuvien heittojen heittoluvuilla:

..., 3, 3, 3, ...

Koska tämä jono on jaksollinen (luku kolme toistaa itseään), riittää ilmoittaa vain yksi jakso, jolloin kuviomme saa lopullisen muodon 3.

Miksi muka tämä muoto on lopullinen? Miksi on pakko heittää pallo kädestä toiseen? Luku kolme ei sinällään sano mitään siitä, heitetäänkö pallo samaan vai eri käteen. Olemme kuitenkin kaikessa hiljaisuudessa oletaneet, että kaksi kättä heittelevät palloja vuorotahdein. Näin pariton heitto (heitto, jonka heittoluku on pariton) heitetään eri käteen ja parillinen samaan käteen.

Olemme itse asiassa hiljaisesti olettaneet myös sen, että ainoastaan yhden pallon heittäminen on sallittua kullakin tahdilla. Ilman tätä rajoitusta yhdellä tahdinlyönneillä tarvittaisiin kullekin pallolle oma heittolukunsa ja asiasta tulisi hieman monimutkaisempi. Tähän tapaukseen palaamme myöhemmin.

Jos nyt annettuna on kuvio, jota heitetään edellämaituin rajoituksin, voidaan se ilmoittaa yksiselitteisesti heittolukujensa jonona. Jos kuvio (eli heittolukujen jono) on jaksollinen, riittää ilmoittaa jonosta yksi jakso, jonka pituus on kuvion *jaksonpituus*.⁴

Tässä idean sulattelemiseksi muutama kuvio lisää eli kuviot 4, 5, 1 ja 441:

```
pattern=4;colors=mixed
pattern=5;colors=mixed
pattern=1;colors=mixed
pattern=441;colors=mixed;hands=(10)(30)(20);dwell=0.1
```

(Viimeisen kuvion jaksonpituus on kolme, muiden yksi. Animaattori heittää normaalisti ”ykköset” hieman tahdittomasti, siksi viimeisessä kuviossa kiinnipitoaika on laitettu vähäiseksi.)

Numerot nolla ja kaksi ovat hieman poikkeavia ja vaativat erillisen selityksen. Kuvitelkaamme ensin, että kolmen pallon peruskuvioista 3 jätetään yksi pallo pois, tällöin syntyy kuvio 330:

```
pattern=330;colors=mixed;hands=(10)(20);dwell=0.05
```

Nolla on siis ”tyhjä” heitto. Hetki sitten sovimme, että kullakin tahdilla heitetään vain yksi pallo, eli tarkalleen ottaen kullakin tahdilla heitetään *enintään* yksi pallo.

Olettakaamme sitten, että heiton etäisyys on kaksi. Pallo siis heitetään samaan käteen, *eikä käsi sinä välissä tee mitään*, sillä välissä olevalla tahdinlyönneillä heitovuoro (= kiinniottovuoro) on toisella kädellä. Näin ollen palloa voi yhtä hyvin pitää vain kädessä paikallaan yhden tahdin yli, ja näin myös useimmiten tehdään. Esimerkiksi sopii kuvio 423:

```
pattern=423;colors=mixed;hands=(10)(30)(20);dwell=0.1
```

tai normaalilla kiinnipitoajalla

423

(Sopii myös kokeilla pelkästään kuviota 2.)

Voimme nyt esittää lukujonona jokaisen kuvion, joka täyttää kaksi rajoitusta:

- kullakin tahdilla heitetään enintään yksi pallo
- yksi jonglööri heittää vuorotahdein oikealla ja vasemmalla kädellä.

Jälkimmäinen näistä on itse asiassa ainoastaan sopimus, joka vaikuttaa vain kuvion ulkonäköön. Koska kullakin tahdilla heitetään vain yksi pallo, voi tuon pallon heittää koko ajan myös yksi ja sama käsi tai vaikkapa seitsemän eri kättä vuorotellen. Teoreettisesti kuvio pysyisi kuitenkin samana.

Näitä ”enintään yksi pallo per tahti” -kuvioita sanotaan *siteswap-kuvioiksi*. (Nimen syystä lisää opinnäytetyön kohdassa 2.11, sivu 19.)

Siteswap-kuvioiden ominaisuuksia

Millaiset lukujonot esittävät siteswap-kuvioita? Kaikenlaiset jonot eivät nimittäin kelpaa, kelvoton jono on esimerkiksi 431. Kelvottomuus johtuu siitä, että heittoa 4 seuraisi heitto 3, ja nämä kaksi palloa ”laskeutuisivat” samalla tahdinlyönneillä.

Voidaan osoittaa, että kuvion kelvollisuus voidaan testata seuraavasti, esimerkkinä kelvollinen kuvio 450:

³Kiinnitoista muodostuva tahti on hieman helpompi erottaa kuviosta kuin heitoista muodostuva tahti. Käytännössä tahdinlyönti myös syntyy kiinnioton aiheuttamasta äänestä. Luonnollisempaa on kuitenkin ajatella niin, että tahdinlyönneillä heitetään.

⁴Jaksottomia kuvioita ei olennaisesti ole olemassa, ks. opinnäytetyön luku 5.

Kirjoitetaan kuvio...	450
... ja heittolukujen alle numerot nollasta alkaen.	012
Lasketaan nämä luvut yhteen...	462
... ja otetaan jakojäännökset jaksonpituudella jaettuna.	102

Kuvion 450 jaksonpituus on kolme, joten viimeisessä vaiheessa neljä jaettuna kolmella on yksi, jää **yk-****si**; kuusi jaettuna kolmella on kaksi, jää **nolla** ja kaksi jaettuna kolmella on nolla, jää **kaksi**.

Koska saadut luvut 1 0 2 ovat täsmälleen toiselle riville kirjoitetut luvut 0 1 2 (eri järjestyksessä), on kuvio kelvollinen.

Sen sijaan jono 1203 (jaksonpituus neljä) ei ole kelvollinen, koska heitot 3 ja 0 "osuvat toisiinsa":

1203
0123
1326
1322

Nyt kakkonen esiintyy viimeisessä rivissä kaksi kertaa, nolla ei kertaakaan.

Lisäksi voidaan osoittaa, että kelvollisen kuvion pallojen lukumäärä saadaan heittolukujen keskiarvona; näin ollen esimerkiksi kuviossa 450 on $(4 + 5 + 0)/3 = 3$ palloa. Tämä ei kuitenkaan riitä kelvollisuustestiksi: esimerkiksi lukujen 435 keskiarvo on 4, mutta 435 ei ole kelvollinen kuvio.

Monimutkaisempia kuvioita

Entä jos luovumme rajoituksestamme ja sallimme useamman pallon heittämisen samalla tahdilla? Jos olettamme edelleen, että palloja heitetään vain yhdestä kädestä kerrallaan, ei suurta muutosta aikaisempaan tarvitse tehdä: jos useampi pallo heitetään samalla tahdilla, ilmoitetaan kullekin pallolle oma heitonumeronsa. Esimerkiksi kuviossa [45]24 heitetään joka kolmannella tahdilla kaksi palloa samanaikaisesti, toinen neljän ja toinen viiden tahdin päähän (heittoluvut hakasulkeen sisällä). Tällaisia kuvioita sanotaan *multiplex*-kuvioiksi.

Jaksonpituuden käsite vaatii tässä tapauksessa hieman tarkennusta. Vaikka ylläolevassa kuviossa [45]24 on neljä heittolukua, niin sen jaksonpituus on kolme, sillä luvut 4 ja 5 kuuluvat samaan tahtiin. Kuvion jaksonpituus on siis niiden *tahtien* lukumäärä, joiden jälkeen kuvio (eli kuvion heittoluvut) toistavat itseään.

Kelvollisen kuvion pallojen lukumäärä on jälleen jonon kaikkien lukujen summa jaettuna *jaksonpituudella*. Esimerkkitapauksessamme siis $15/3 = 5$.

Kuvion kelvollisuuden testaaminenkin tapahtuu lähes samoin kuin ennen:

Kirjoitetaan kuvio...	[45]24
... ja alle numerot (saman tahdin luvuille sama numero)	[00]12
Lasketaan nämä yhteen...	[45]36
... ja otetaan jakojäännökset jaksonpituudella jaettuna.	[12]00

Tässä ovat täsmälleen samat luvut kuin toisella rivillä (hakasulkeista ei enää tarvitse välittää), joten kuvio on kelvollinen.

Entä, jos sallimme pallojen heittämisen useasta kädestä samanaikaisesti? Tällöin homma monimutkaistuu, sillä kullekin kädelle tarvitaan oma lukujononsa, ja heiton korkeuden lisäksi tulee tietää se, mihin käteen heitto suuntautuu. Yhden jonglöörin eli kahden käden tapauksessa kuviot ovat vielä kutakuinkin ymmärrettävissä: numeron perään lisätään x, jos heitto heitetään kädestä toiseen. Tässä muutamia esimerkkejä (yksi sulkupari kuvaa yhtä tahtia, sulkujen sisällä kummankin käden heittoluvut):

(4,4)
 (4x,4x)
 (4x,2x)
 (4,2x)(2x,4)
 (4x,2x)(4,2x)(2x,4x)(2x,4)

Ensimmäisen, toisen ja kolmannen kuvion jaksonpituus on yksi, neljännen kuvion jaksonpituus on kaksi ja viimeisen kuvion jaksonpituus on neljä.

Käytännön syistä näissä *synchro*-kuvioissa oletetaan aina yksi välitahti: esimerkiksi siteswap-kuviossa 4 on nopeudeltaan kaksinkertainen tahti verrattuna synchro-kuvioon (4,4). Silti synchro-kuvio ilmoitetaan muodossa (4,4) eikä muodossa (2,2), vaikka jälkimmäinen tapa olisi matemaattisesti korrektimpi. Silloin heitonumeroiden tulkinta kuitenkin olisi täysin erilainen synchro- ja siteswap-tapauksissa, mikä hankaloittaisi elämää monin tavoin. Vakiintunut käytäntö on olettaa synchro-kuvioihin välitahti (ts. heitot tapahtuvat vain joka toisella tahdilla eli parittomia heitonumeroita ei esiinny lainkaan), jolloin heitonumeroiden tulkinnat vastaavat toisiaan. Ainoa poikkeus on synchro-heitto 2x, joka vastaa siteswap-heittoa 1. Seuraavien kuvioiden vertaaminen keskenään selventänee asiaa:

441

 $(4,2x)(2x,4)$

42

 $(4,2)$

(Kaksi viimeistä kuviota näyttävät täysin samoilta. Tarkoittaako tämä sitä, että ne *ovat* samoja?)

Myös synchro-kuvioissa pallojen lukumäärä saadaan heittolukujen keskiarvosta, mutta välihahtisopimuksen

takia pitää lopuksi vielä jakaa kahdella. Esimerkiksi kuviossa $(4x,2x)$ jaksonpituus on yksi ja heittolukujen summa kuusi. Heittolukujen summa jaksonpituudella jaettuna on siis kuusi, joka lopuksi vielä jaetaan kahdella. Kuviossa on siis kolme palloa.

Synchro-kuvioiden kelpoisuudesta toimii jälleen samaan tapaan kuin aikaisemmin, esimerkkinä kelvollinen kuvio $(4,2x)(2x,4)$, jaksonpituus kaksi:

$(4,2x)(2x,4)$	Kirjoitetaan kuvio...
$(2,1x)(1x,2)$	... jaetaan luvut kahdella (välihahtisopimus) ...
0 0 1 1	... numeroidaan tahdit (samalle tahdille sama numero) ...
$(2,1x)(2x,3)$	... lasketaan yhteen ...
$(0,1x)(0x,1)$	... ja lasketaan jakojäännökset jaksonpituudella jaettuna.

Koska alimmalla rivillä esiintyvät kaikki mahdolliset lukujen 0 ja 1 yhdistelmät merkin x kanssa ja ilman (eli 0, 0x, 1 ja 1x), niin kuvio on kelvollinen. Kelvollinen ei sen sijaan ole kuvio $(4x,4x)(2,4)$, sillä silloin alimmalle riville saadaan $(0x,0x)(1,1)$, jossa yhdistelmät 1 ja 0x esiintyvät kahdesti ja yhdistelmiä 0 ja 1x ei esiinny lainkaan.

Yleistyksiä ja avoimia kysymyksiä

Edellisessä luvussa kuvaillut multiplex- ja synchro-kuviot voidaan tietenkin yhdistää, jolloin saadaan esimerkiksi kuvio $([44x],2)(2,[44x])$.

Lisäksi mukaan voidaan ottaa useampia jonglöörejä, mutta tällöin käsien eli sulkeiden sisältämien sarakkeiden määrä lisääntyy, eikä pelkkä x-kirjain enää riitä merkitsemään eri käteen suuntautuvaa heittoa. Käytännössä ainoastaan kahden vastakkain seisovan jonglöörin tapaus on vielä ihmisen luettavissa: silloin merkitään heittoluvun perään p sen merkiksi, että heitto heitetään toiselle suoraan (straight pass) ja xp sen merkiksi, että heitto heitetään toiselle ristiin (cross pass). Kuvio merkitään sulkeiden $< >$ sisään ja pystyviivalla erotetaan kunkin jonglöörin heittelemät kuviot toisistaan. Esimerkiksi tekstin alun kuviossa $<5p\ 3p\ 4\ |\ 4p\ 2\ 3p>$ toinen jonglööri heittää (siteswap-)kuviota $5p\ 3p\ 4$ ja toinen kuviota $4p\ 2\ 3p$ (vastaavilla tahdeilla ja kätisyysillä).

Useamman kuin kahden jonglöörin tapauksessa ihminen siirtyy suosiolla piirrettyihin diagrammeihin, simulaattori sen sijaan pysyttelee numeromerkinnöissä.

Lopuksi muutama kysymys. Ensimmäinen kuvataan tarkemmin opinnäytetyön luvussa viisi: jos annettuna on pallojen lukumäärä ja suurin sallittu heittoluku, niin montako erilaista (oikein tulkittuna) kuviota saadaan aikaan? Tämä on vaikea kombinatorinen ongelma, jolle ei edes siteswap-tapauksessa ole löydetty ratkaisua. Kuviot pystytään kyllä luettelemaan tietokoneella kussakin tapauksessa erikseen, mutta yleistä kaavaa ei tiedetä.

Toinen kysymys liittyy käsien liikkeisiin, niihin emme ole toistaiseksi kiinnittäneet minkäänlaista huomiota. Käytännössä heiton voi heittää monella tavalla, esimerkiksi selän takaa tai toisen käden alta. Nämä on tapana ilmoittaa erikseen, esimerkiksi ”423, neloset olkapään yli selän takaa eteen”. Näin myös simulaattoreissa, missä käsien liikkeet annetaan hankalasti suoraan avaruuden koordinaatteina eri ajanhetkinä. Miten yleisimmät käsien liikkeet voisi viisaasti sisällyttää teoriaan siten, että tietokoneohjelma luettelisi (ja näyttäisi ruudulla) myös nämä ilman erillistä koordinaattien kanssa veivaamista? Miten erilaiset käsien liikkeet voi yhdistää? Uutta teoriaa ei välttämättä juurikaan tarvittaisi, mutta kiertosuunnista ja symmetriaryhmän käsitteestä voisi olla hyötyä.

Vastaan mielelläni aiheeseen liittyviin kysymyksiin.



Kerhomatematiikkaa

Emilia Manninen ja Tiina Rintala

Oulun yliopisto

Taustaa

Tuskin löytyy opiskelualaa tai työpaikkaa, missä ei tarvitsisi matematiikkaa. Kaksi kolmasosaa yliopistojen ja korkeakoulujen opiskelupaikoista vaatisi lukion laajan matematiikan. Kuitenkin abiturienteista laajan matematiikan kirjoittaa vain kolmannes ja vain 15 % pakollisena. Uskomme, että panostamalla matematiikan opetuksen ja oppimisen kehittämiseen peruskoulussa saataisiin oppilaat innostumaan matemaattisista aineista myöhemminkin.

Tämä vaatii työtä niin luokan- kuin aineenopettajilta. Luokanopettajien opintoihin kuuluu muutama opintoviikko matematiikkaa, mikä voi vaikeuttaa matematiikan monipuolista opettamista peruskoulun luokilla 0–6. Toisaalta aineenopettajat omaavat hyvinkin teoreettisen matemaattisen taustan. Tuoreen Turun yliopistossa tarkastetun Eero K. Niemen väitöskirjan mukaan oppikirjalla on merkittävä vaikutus matematiikan opetuksessa. Tämäkin kertoo osaltaan siitä, että opetukseen olisi tarvetta saada lisää ideoita oppikirjan ulkopuolelta.

Syksyllä 2002 ryhmä Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitoksen opiskelijoita aloitti lehtori Ali Huovisen johdolla yhteistyössä kahdeksan oululaisen luokkia 0–6 opettavan peruskoulun kanssa ma-

tematiikkakerhot. Sittemmin toimintaan on tullut lisää kouluja ja ohjaajia, syksyllä 2004 kerhoihin osallistui satoja oululaislapsia. Kesällä 2003 suosittujen matikkakerhojen pohjalta sama työryhmä toteutti Matikkaraketti-leirejä neljällä Oulun koululla, menneenä kesänä Matikkaraketti-leirejä oli jo monta kymmentä.

Kerhoissa pyritään syventämään tietämystä matematiikasta. Tarkoituksena on huomata, että matematiikka on loppujen lopuksi paljon muutakin kuin laskemista, matematiikkahan on useissa asioissa näkymätön vaikuttaja. Koska kaikilla kouluilla ei voi olla matematiikkakerhoja ja toisaalta kaikki lapsetkaan eivät löydä kerhoja, on myös matematiikan tuntien monipuolisuus tärkeää. Kerhoissa käytetäänkin useita ideoita, joita voitaisiin käyttää myös perusopetuksessa kaikilla luokka-asteilla, lukiossakin.

Jyväskylän yliopiston psykologian laitoksella tehty tutkimus antaa viitteitä siitä, että matematiikan ensi- ja alkuopetuksessa on tarvetta uudelleen puntaroinnille. Helsingin Sanomissa 19.9.2004 julkaistussa mielipidejutussa tutkimuksen tekijät kirjoittavat, että kiinnostuneisuus matematiikkaa kohtaan näytti koulussa laskevan erityisesti tytöillä – siitäkin huolimatta, että työt suoriutuvat matematiikassa yhtä hyvin kuin pojat.

Kirjoittajien mukaan käsitteiden opettamisessa konkretisointi ei ole tärkeää vain alkuopetuksessa vaan läpi koko peruskoulun.

Tavoitteet

Kerhojen tarkoitus on antaa virikkeitä innostavaan matematiikan opiskeluun ja näin herättää oppilaiden motivaatiota. Tulevaisuuden kannalta on erittäin tärkeää saada hyvä pohja matematiikan perusasioista sekä myönteinen asenne matematiikkaa kohtaan. Toiminta on tärkeää, sillä näin aineenopettajaksi opiskelevat pääsevät harjoittelemaan opettamista jo opiskeluaikana, sekä saavat ideoita varsinaiseen työhönsä. Kerhoja leiritoiminnan avulla aineenopettajaksi opiskelevat saavat ainutlaatuisen tilaisuuden tutustua peruskoulun luokka-asteiden 0–6 matematiikkaan, siihen perustaan mihin tulevien oppilaiden opiskelu pohjautuu.

Kerhotoimintaa on tarkoitus kehittää luokille 0–6 toteutetuista kerhoista edelleen luokille 7–9 ja siitä ylöspäin. Tällaisen kerho- ja leiritoiminnan kautta koulun ja yliopiston yhteistyö tiivistyy.

Suunnittelu

Suunniteltaessa kerhoa kannattaa hoitaa ensin kuntoon yleiset asiat: kerhosta ilmoittelu, kerhoaika ja -paikka, kerhokerrat, materiaali ja kerhomateriaalien säilytystila. Kerhon pitoon vaikuttavat olennaisesti lasten lukumäärä ja ikäjakauma. Vaikka asiat poikkeavat koulussa käsiteltävistä asioista, ei samaan ryhmään kannata ottaa kovin eri-ikäisiä lapsia. Keskittymiskyky ja tehtävien suorittamiseen tarvittava aika vaihtelevat suuresti luokittain. Esimerkiksi jako luokkiin 1–3 ja 4–6 on toimiva ratkaisu. Myös lasten lukumäärä kannattaa pitää kohtuullisena, jotta jokainen kerhossa kävijä saa tarvittaessa yksilöllistä opastusta ja näin ollen viihtyy kerhossa. Kerhossa viihtymiseen vaikuttaa myös olennaisesti hyvä ilmapiiri, kannattaakin heti aluksi miettiä yhdessä kerholaisten kanssa kerholle säännöt, jotka ovat sopusoinnussa myös koulun omien sääntöjen kanssa.

On hyvä suunnitella kerholle valmiiksi runko, jossa kiinnitetään huomiota kerhoajan ja kerhokertojen lukumäärään. Ohjelmista kannattaa tehdä vaihtelevia niin aiheiltaan kuin suoritustavoiltaan, ja mielenkiinnon voi säilyttää erilaisten kohokohtien avulla. Sellaisena voi toimia esimerkiksi seikkailu, jossa on mahdollisesti jokin pieni palkinto. Seikkailusta on esimerkki ohjelmissa.

Hyviä ideoita matikkakerhoon löytyy esimerkiksi seuraavista lähteistä:

Björklund, Jenni ym. Sukkia ja muuta matematiikka.

Oster, Grigori. Mielellön matikka.

Aivojumbppaa ja älypähkinöitä. (Valitut Palat)

Mensa älyjumbppa. (sarja)

Jackson, Paul ym. Paperiaskartelun käsikirja.

Dahl, Kristin. Hauskaa matematiikkaa.

Karilas, Yrjö. Antero Vipunen.

Koulujen matematiikan kirjat

Miguel de Guzmán. Matemaattisia seikkailuja

Matematiikkalehti Solmu; Unkari

On tärkeää, että yksittäiseen kerhokertaan sisältyy onnistumisen elämyksiä jokaiselle. Siksi tehtävissä tulee olla helppoja perustehtäviä, mutta myös haasteita täytyy löytyä. Koska on kuitenkin kyse lasten vapaa-ajasta, kannattaa kerhossa välillä leikkiäkin.

Ohjelmia

Ohjelma 1: Ympyrä

Aloitus: Naruun on kiinnitetty lammis, joka syö heinää. Minkälainen alue syntyy? Toteutetaan tutkimalla pahville kiinnitetyn narun ja kynän avulla. Tutkitaan mistä muualta kerhotilasta löytyy ympyröitä.

Luokille 2 ja 3: Piirretään suurehkojen purkkien avulla paperille ympyröitä (jokaiselle kerholaiselle yksi) ja leikataan ne irti. Taitetaan ympyrä kerran keskeltä ja vahvistetaan jälki (halkaisija). Taitetaan toisen kerran ja vahvistetaan puolet uudesta jäljestä (säde) eriväriä. Merkitään leikkauskohta (keskipiste). Arvuutellaan ympyrän osien nimet kerholaisilta ja kirjoitetaan ne ympyrään. Leikataan ympyrän kehän mittainen lanka ja leikataan siitä halkaisijan pituisia pätkiä pois. Vertaillaan tuloksia. Huomataan, että kaikki saavat tulokseksi 3 halkaisijaa ja vähän yli (pii).

Luokille 4–6: Muuten sama ohjelma kuin edellä, mutta piirretään ympyrät harpilla.

Tarvitaan: Paksua pahvia, esim. aaltopahvia, haaranasta, lankaa ja kynä lampaaksi. Suurehkoja purkkeja, esim. säilyketölkkejä, erivärisiä kyniä, harppeja, pahvia ja saksia.

Ohjelma 2: Pentomino

Aloitus: Piirretään ruutupaperille viiden ruudun kokoisia kuvioita, jotka eivät ole toistensa peilikuvia ja joissa ruudut koskettavat toisiaan ainakin yhdeltä sivulta. Erilaisia vaihtoehtoja on 12. Jokainen kerholainen piirtää ensin yksin jonka jälkeen vaihdetaan kaverin kanssa kuvioita. (Kuviot ovat pentomino-pohjissa.)

Peli: Väritetään pentomino-palat ja liimataan ne kartongille, josta ne leikataan irti. Kootaan eri paloja käyttäen erikokoisia neliöitä ja suorakulmioita. On myös mahdollista koota jokaisen palasen muotoinen kappale muita paloja käyttäen. Varsinaista peliä pelataan 50

ruudun kokoisella pohjalla kahden pelaajan palasilla. Kumpikin pelaaja asettaa alustalle vuorotellen valitseman palan, voittaja on se, joka laittaa alustalle viimeisen palan.

Tarvikkeet: Ruutupaperia, värikyniä, pentomino-pohjat, kartonkia, liimaa ja saksia.

Ohjelma 3: Koordinaatisto

Oppilaat ovat pareittain, toinen heistä on opas. Oppilaille jaetaan monisteet, joista oppaalla on sellainen, missä ruudussa on kuvio ja hänen parillaan on tyhjä ruudukko. Oppaan tehtävä on sanoin selittää toiselle ruudussa oleva kuvio.

Opetetaan koordinaatisto ja mietitään edellisen selitystehtävän avulla, mitä hyötyä siitä on ja miten sitä voi käyttää. Avuksi voi käyttää esimerkiksi puhelinluettelon karttoja.

Pelataan koordinaatistobingoa 5×5 -ruudukolla, jossa pienemmällä voi olla kirjaimet x -akselilla. Jokainen valitsee viisi pistettä ja merkitsee ne. Nostetaan vuorotellen ohjaajalta koordinaatit, bingo tulee kun jokaisen merkityn pisteen koordinaatit on nostettu.

Hyviä aiheeseen liittyviä pelejä ovat esimerkiksi laivan-upotus sekä erilaiset aarrekartat.

Tarvikkeet: Monisteet, ruutupaperia, kyniä ja koordinaatit lapuilla.

Ohjelma 4: Sanan selitys piirtäen (Toimii hyvin kertaavana tehtävänä.)

Jaa kerholaiset joukkueisiin. Jokainen kerholainen käy vuorollaan piirtämässä taululle saamansa sanan, jota muut arvaavat. Pisteet jaetaan joukkueittain.

Esimerkkisanoja: Ympyrä, säde, halkaisija, keskipiste, kehä, pii, viivoitin, laskin, neliö, suorakaide, kolmio, pentomino

Tarvikkeet: Liitu ja sanat lapuilla.

Ohjelma 5: Seikkailu

Yleiset ohjeet: Ohjaaja kirjoittaa ennen seikkailua vihjeet ja tehtävät erillisille lapuille, tietenkin ilman vastauksia, ja tehtävän 3 kirjaimet sanasta seitsemän samoin erillisille lapuille. Seikkailussa annetaan ensimmäiseksi lapsille vihje, jonka avulla he löytävät ensimmäisen tehtävän ja uuden vihjeen. Näin edetään loppuun asti. Tehtävää ja vihjettä ennen lukee suluissa paikka, josta ne löytyvät. Paikat ovat vain esimerkkejä ja ne täytyy muuttaa seikkailun paikan mukaiseksi.

Vihje 1. Nyt alkaa seikkailu! Tehtävänänne on selvittää saatavien vihjeiden ja niiden avulla löytyvien tehtävien avulla piilotetun aarteen sijainti ja sen avaamiseen liittyvä koodi. Ei muuta kuin onnea matkaan. Tässä

ensimmäinen vihje: Aarteen piilottajilla taisi olla jano kun he suunnittelivat ensimmäistä tehtävää.

(Tehtävä 1 ja Vihje 2 löytyvät juoma-automaatin vieressä.)

Tehtävä 1. Etana on muurin alla, joka on 23m korkea. Etana kiipeää joka päivä 7m ylöspäin ja valuu yöllä 3m alaspäin. Monentenako päivänä etana pääsee muurin päälle? (V: Etana pääsee muurin päälle viidentenä päivänä, koska neljän ensimmäisen vuorokauden aikana etana nousee 16 metriä ja viidentenä päivänä 7 metriä.)

Vihje 2. Seuraavaa tehtävää suunniteltiin ikävän, piilaantuneen hajun häiritessä.

(Tehtävä 2 ja Vihje 3 löytyvät roskiksesta.)

Tehtävä 2. Luku löytyy, kun vähennätte kolmestakymmenestä tehtävän numeron sekä neliön kulmien lukumäärän. (V: $30 - 2 - 4 = 24$)

Vihje 3. Tämähän sujuu! Seuraavaan tehtävään liittyvät luokasta löytyvät kirjaimet.

(Tehtävä 3 ja Vihje 4 löytyvät luokasta jostain näkyvästä paikasta.)

Tehtävä 3. (S,E,I,T,S,E,M,Ä,N) Tehtävänä on miettiä mikä numero muodostuu, kun käytätte kaikki kirjaimet yhteen kertaan ja vähennätte siitä numeron yksi. (V: 6.) Kun saatte sen selville, niin lukekaa uusi vinkki.

Vihje 4. Seuraavaa tehtävää suunniteltiin heti, kun oli tultu kouluun ja vaatteet oli jätetty naulakkoon.

(Tehtävä 4 ja Vihje 5 löytyvät naulakosta.)

Tehtävä 4. Perheessä on 7 poikaa ja jokaisella heistä on yksi sisko. Kuinka monta tyttöä perheessä on äidin lisäksi. (V. Perheessä on yksi tyttö äidin lisäksi, hän on kaikkien poikien sisko.)

Vihje 5. Seuraavat tehtävät löytyvät luokasta paikasta josta näkee ulos.

(Tehtävät 5 ja 6 sekä Vihje 6 löytyvät luokasta ikkunan edestä.)

Tehtävä 5. Lisää edellisen tehtävän vastaukseen kaksi. (V: 42.)

Tehtävä 6. Etsitty luku tulee kysymysmerkin kohdalle seuraavaan lukujonoon: 5, 1, 10, 1, 15, 1, 20, 1, ?, ... (V: 25)

Vihje 6. Vielä viimeiset tehtävät niin seikkailu alkaa olla suoritettu. Nämä tehtävät löytyvät opettajan pöydältä ja kumartuakin täytyy.

(Tehtävät 7 ja 8 sekä Vihje 7 löytyvät opettajan pöydän alta.)

Tehtävä 7. Kun vähennät tästä luvusta ensin 16 ja kerrot sen sitten kolmella ja lisäät vielä 2 saat tulokseksi 32. Mikä luku on kyseessä? (V: $(32-2):3 + 16 = 26$)

Tehtävä 8. Väritä seuraavien koordinaattien osoittamat ruudut (piirrä itse koordinaatisto, jossa on alhaalla x -akselilla kirjaimet A–C ja pystyssä y -akselilla numerot 1–5): (A, 1), (B, 3), (A, 5), (C, 2), (C, 3), (B, 1), (C, 1), (B, 5), (C, 4), (C, 5). (V: 3)

Vihje 7. Seuraavaksi tehtävä 9. Se on käytävällä, mutta pimeässä.

(Tehtävä 9 ja aarrearkku löytyvät käytävältä jostain kaapista.)

Tehtävä 9. Pääsitte aarteen luo. Järjestä saamasi vastaukset pienimmistä suurimpaan, lukko aukeaa kun jono on oikea. (V: 1, 3, 5, 6, 24, 25, 26, 42)

PISA-tutkimus

PISA-tutkimus herätti paljon keskustelua matematiikan opetuksesta ja osaamistasosta, näitä kirjoituksia on kerätty osoitteeseen <http://solmu.math.helsinki.fi/2005/pisakeskustelua.html>

Aurinkokeitin

YK on nimennyt tämän vuosikymmenen kestävä kehityksen kasvatuksen vuosikymmeneksi. Kestävä kehityksen vuosikymmenen tavoitteet ovat seuraavat:

1. Nostaa koulutus ja kasvatusta keskeiseksi kestävä kehityksen tekijäksi.
2. Edistää verkostoitumista, vuorovaikutusta ja yhteistyötä eri osapuolten ja sidosryhmien välillä.
3. Antaa tilaa ja tilaisuuksia uusintaa ja edelleen kehittää kestävä kehityksen sisältöä ja merkitystä kaikessa koulutuksessa ja yhteiskunnallisessa vuorovaikutuksessa.
4. Vahvistaa korkealaatuista kestävä kehitystä edistävää opetusta ja oppimista.
5. Kehittää kestävä kehitystä edistävän kasvatuksen ja koulutuksen strategioita kaikilla koulutustasoilla ja -aloilla.

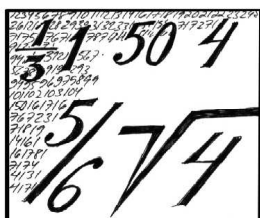
Tässä on suussasulava esimerkki uusiutuvien energioiden käytöstä: Aurinkoenergian avulla voit grillata makkaraa, katso ohjeet

<http://solis.wwnet.fi/koulutus/Makkarakeitin/Default.htm>

Keitin perustuu parabelin polttopisteen ominaisuuksille.

Matematiikan linkkilista

Suomalainen yritys Tieteen tietotekniikan keskus CSC on koonnut kansainvälisestäkin merkittävän matemaattisen linkkilistan osoitteeseen http://www.csc.fi/math_topics/.



Joukkojen mahtavuudesta

Ari Koistinen

Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Kaikki lienevät yhtä mieltä siitä, että joukko $\{1, 2, 3\}$ on suurempi tai *mahtavampi* kuin joukko $\{1, 2\}$. Samoin on ilmeistä, että ääretön joukko on aina mahtavampi kuin äärellinen joukko. Sen sijaan, kun kysytään, kummassa on enemmän alkioita, reaalilukujen vai luonnollisten lukujen joukossa, saattavat mielipiteet jakautua. Joku ehkä sanoo, että joukot ovat yhtä mahtavat, koska molemmissa on äärettömän monta lukua. Toisaalta voidaan väittää reaalilukujen joukon olevan selvästi suurempi, sillä pitäähän se sisällään koko luonnollisten lukujen joukon. On todettu, että kumpikaan näistä kriteereistä ei sovellu hyvin tämän ongelman tarkasteluun.

Jos joukko on äärellinen, sen mahtavuudeksi määritellään yksinkertaisesti sen alkioden lukumäärä. Äärettömien joukkojen kohdalla asia ei ole näin yksinkertainen, mutta perustellusti voidaan sanoa, että on olemassa eri kokoisia äärettömyyksiä. Tähän liittyvä matemaattinen teoria on verrattain nuorta, vaikka ääretön käsitteenä on tunnettu jossain muodossa tuhansia vuosia. Runsaat sata vuotta sitten Georg Cantor (1845–1918) julkaisi käänteentekeviä ajatuksiaan äärettömistä joukoista. Monet sen ajan johtavat matemaatikot vastustivat voimakkaasti Cantorin teorioita, mutta nykyisin Cantorilla on kiistaton asema yhtenä historian merkittävimmistä matemaatikoista.

Ennen kuin esitämme tarkempia määritelmiä äärettömien joukkojen mahtavuuksille, kertaamme tärkeän bi-

jektiivisyyden käsitteen:

Funktio $f : A \rightarrow B$ on *surjektio*, jos funktion arvojoukko on koko B , ts. jos jokaista joukon B alkioita y vastaa jokin joukon A alkio x siten, että $f(x) = y$. Funktio f on *injektio*, jos se ei saa samaa arvoa kahdessa eri pisteessä, ts. jos ehdosta $f(x) = f(y)$ seuraa $x = y$. Jos f on sekä surjektio että injektio, niin se on *bijektio*.

Käsitettä tarvitaan seuraavassa määritelmässä:

Joukot A ja B ovat *yhtä mahtavat*, jos on olemassa bijektio joukosta A joukkoon B .

Yhtä mahtavien joukkojen A ja B välille voidaan siis aina konstruoida yksi yhteen -vastaavuus. Määritelmä on sopusoinnussa arkijärjen mukaisen äärellisten joukkojen yhtämahtavuuden käsitteen kanssa: kahden yhtä monta alkioita sisältävän joukon

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ ja } B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

välille voidaan määritellä esimerkiksi bijektio

$$f : A \rightarrow B; f(x_i) = y_i$$

kaikilla kokonaislukuilla $1 \leq i \leq n$. Jos jommassa kummassa joukossa on yksi alkio enemmän, ei bijektiota enää voida konstruoida, vaan joko maalijoukkoon jää ”ylimääräinen” alkio, jolloin f ei ole surjektio, tai sitten määrittelyjoukon kaksi alkioita joudutaan kuvaamaan samaksi alkioiksi, jolloin f ei ole injektio.

Sanotaankin, että joukko B on *mahtavampi* kuin A , jos on olemassa (ainakin yksi) injektio $f : A \rightarrow B$, mutta ei yhtään surjektiota.

Voimme nyt todeta, että esimerkiksi parillisten lukujen joukon - merkitään sitä vaikkapa P :llä - ja kaikkien luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ mahtavuuksilla ei ole asettamamme määritelmän mukaan eroa, sillä funktio

$$f : \mathbb{N} \rightarrow P; f(x) = 2x$$

kuvaa luonnolliset luvut bijektiivisesti parillisille luvuille. Parillisia lukuja - tai vaikkapa miljoonalla jaollisia lukuja - on siis saman verran kuin kaikkia luonnollisia lukuja!

Asetetaan seuraava määritelmä: jos joukko A on korkeintaan yhtä mahtava kuin luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$, niin A on *numeroituva*.

Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että numeroituvan joukon A alkiot voidaan indeksoida luonnollisilla luvuilla eli *luetella*, vaikka luettelo saattaakin olla päättymätön. On siis olemassa bijektio $\mathbb{N} \rightarrow A$ (jos A on äärellinen, on lähtöjoukkona jokin luonnollisten lukujen osajoukko). Esimerkiksi $\mathbb{N}$ voidaan luetella: 1, 2, 3, 4, ... ja parittomat luvut voidaan luetella: 1, 3, 5, 7, ...

On ehkä yllättävää, että on olemassa lukujoukkoja, joita ei voi tällä tavalla luetella ja joiden voi perustellusti sanoa olevan paljon suurempia kuin joukko $\mathbb{N}$. Tällaisia joukkoja kutsutaan *ylinumeroituviksi*. Cantorin kuuluisa diagonaaliargumentti osoittaa, että reaalilukujen joukko on ylinumeroituva. Päättely voidaan tehdä seuraavasti:

Riittää osoittaa ylinumeroituvaksi väli $[0, 1]$, sillä jos se on ylinumeroituva, niin täytyy olla myös koko $\mathbb{R}$:n. Todistettavan väitteen antiteesi eli vastaoletus on, että väli $[0, 1]$ on numeroituva. Jos tämän voidaan osoittaa johtavan ristiriitaan, niin täytyy antiteesi hylätä ja välin on oltava ylinumeroituva.

Mikäli antiteesi on totta, on olemassa välin $[0, 1]$ alkioiden luettelo. Olkoon se tässä 10-järjestelmän desimaalilukuina ilmaistuna seuraavanlainen (luvut $a_{ij} \in \mathbb{N}$ ovat desimaaleja):

$$\begin{array}{l} 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\ 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\ 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\ \vdots \end{array}$$

On kuitenkin helppoa konstruoida luku, joka ei ole luettelossa, mutta joka kuuluu välille $[0, 1]$: valitaan luvun

desimaalit niin, että poimitaan ylläolevan luettelon *diagonaalilla* olevat desimaalit a_{11}, a_{22}, a_{33} jne. ja *vaihdetaan ne*. Olkoon vaikkapa

$$\begin{array}{l} b_i = 1, \text{ jos } a_{ii} \neq 1 \\ \text{ja} \\ b_i = 0, \text{ jos } a_{ii} = 1 \end{array}$$

Nyt desimaaliluku $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ ei voi olla luettelossa!

Voidaan myös helposti todistaa, että rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on "vain" numeroituva. Todistuksen löytäminen vaatii tosin hieman kekseliäisyyttä. Ideana on kirjoittaa rationaaliluvut tietyllä tavalla taulukoksi ja käydä taulukkoa läpi tietyssä järjestyksessä niin, että jokainen rationaaliluku tulee lueteltua.

Toinen tapa osoittaa $\mathbb{Q}$ yhtä mahtavaksi kuin $\mathbb{N}$ on todeta ensin, että positiivisten rationaalilukujen joukko on yhtä mahtava luonnollisten lukujen muotoa (m, n) olevien järjestettyjen parien joukon eli avaruuden $\mathbb{N}^2$ kanssa, sillä kaikki positiiviset rationaaliluvut ovat muotoa $\frac{m}{n}$, missä $n, m \in \mathbb{N}$. Joukko $\mathbb{N}^2$ taas on yhtä mahtava kuin $\mathbb{N}$, koska esimerkiksi funktio

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}; f(n, m) = 2^n \cdot 3^m$$

on injektio. Muotoa $2^n \cdot 3^m$ oleva lauseke on jonkin luonnollisen luvun alkulukuhajotelma eikä samaa lukua voida jakaa alkulukutekijöihin kahdella eri tavalla. Koska on olemassa injektio $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, on $\mathbb{N}^2$ korkeintaan yhtä mahtava kuin $\mathbb{N}$. Toisaalta $\mathbb{N}$ ei tietenkään voi olla mahtavampi kuin $\mathbb{N}^2$, sillä $\mathbb{N}$ voidaan samaistaa muotoa $(n, 0)$ olevien lukuparien eli avaruuden $\mathbb{N}^2$ osajoukon kanssa. Positiivisten rationaalilukujen joukko on siis numeroituva ja on helppoa päätellä, että jos mukaan otetaan negatiiviset rationaaliluvut ja nolla, on joukko edelleen numeroituva.

Nyt tutuksi ovat tulleet siis seuraavat eriaisteiset joukkojen mahtavuudet: numeroituvat joukot, jotka voidaan jakaa äärellisiin ja numeroituvasti äärettömiin joukkoihin, sekä ylinumeroituvat joukot kuten $\mathbb{R}$.

Seuraavaksi herää kysymys, voidaanko ylinumeroituvia joukkoja jotenkin luokitella mahtavuuden perusteella. Onko olemassa joukkoa $\mathbb{R}$ mahtavampia joukkoja ja millaisia ne joukot ovat? Cantor osoitti vuosisadan vaihteessa myös, että tällainen joukko on $\mathbb{R}$:n osajoukkojen joukko eli $\mathbb{R}$:n potenssijoukko. Edelleen siirtymällä potenssijoukon potenssijoukkoon päästään aina vain mahtavampiin joukkoihin. Voidaan osoittaa, että $\mathbb{R}$ ja luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ potenssijoukko ovat yhtä mahtavia.

Luonnollisten lukujen joukon mahtavuutta, jonka voidaan sanoa olevan pienin mahdollinen äärettömän joukon koko, merkitään symbolilla $\aleph_0$ (luetaan "aalef nolla"; $\aleph$ kuuluu heprealaisiin aakkosiin). Merkintätapa on peräisin Cantorilta. On helppoa osoittaa, että n alkioita sisältävällä (äärellisellä) joukolla on 2^n osajoukkoa, ja jos tämä yleistetään eriaisteisiin äärettömyyksiin, niin

päädytään siihen, että luonnollisten lukujen potenssijoukon ja samalla äsken todetun nojalla myös reaalilukujen joukon mahtavuus on $2^{\aleph_0}$, reaalilukujen joukon potenssijoukon mahtavuus on $2^{2^{\aleph_0}}$ jne.

Symbolilla $\aleph_1$ merkitään pienintä mahdollista ylinumeroituvan joukon mahtavuutta. Edelleen on ratkaisematta kysymys, onko $\aleph_1$ sama kuin reaalilukujen joukon mahtavuus vai onko olemassa joukkoja, joiden mahtavuus on suurempi kuin luonnollisten lukujen joukon mahtavuus mutta pienempi kuin reaalilukujen joukon mahtavuus. Kontinuumihypoteesina tunnettu väittämä sanoo, että tällaisia joukkoja ei ole, vaan että $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. On osoitettu, että kontinuumihypoteesin totuusarvo on riippumaton yleisessä käytössä olevasta joukko-opin aksiomajärjestelmästä *ZFC* eli *Zermelo-Fraenkelin aksiomista*. Tältä kannalta katsoen kontinuumihypoteesi on väittämä, joka ei ole tosi eikä epätosi. Tällaisia väittämiä on löydetty paljon muitakin sen jälkeen, kun Kurt Gödel vuonna 1931 julkaisi kuuluisan epätäydellisyyslauseensa, jonka mukaan jokaisessa (1. kertaluvun) loogisessa teoriassa on mahdollista esittää lauseita, joita ei voi osoittaa todeksi tai epätodeksi.

On enemmän filosofinen kuin matemaattinen kysymys, voiko kontinuumihypoteesin kaltaisella väitteellä olla käytetystä aksiomajärjestelmästä ja valitusta mallista riippumaton totuusarvo. Nykyisistä loogikoista useimmat lienevät sillä kannalla, että väitteiden totuudesta tai epätotuudesta puhuminen on mieletöntä, ellei loogista viitekehystä ole määritelty. Platonistit ajattelevat kuitenkin toisin: muun muassa suomalainen matemaatikko ja filosofi Uno Saarnio (1896–1977) esitti 1960-luvulla – sittemmin virheelliseksi todetun – todistuksensa kontinuumihypoteesille.

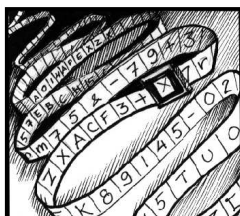
Voisi ajatella, että äärettömyyksien luokittelu on lähinnä kiinnostavaa teoretisointia, jolla tuskin on muuta kuin viihteellistä merkitystä. Näin ei kuitenkaan ole:

varsinkin ylinumeroituvuuden ja numeroituvuuden välinen raja on monilla matematiikan aloilla hyvin tärkeä. On paljon perustavaa laatua olevia ominaisuuksia, jotka ovat vain numeroituvilla joukoilla, mutta eivät ylinumeroituvilla.

Näillä käsitteillä on käyttöä myös tietojenkäsittelytieteessä. Esimerkiksi laskettavuuden teorian keskeinen ratkeamattomuustulos nojaa siihen, että laskennallisia ongelmia tai täsmällisemmin sanottuna ns. *päättöongelmia* on ylinumeroituva määrä. Minkä hyvän sä valitun ohjelmointikielen mahdollisia ohjelmia taas on vain numeroituva määrä, koska kaikki ohjelmat ovat äärellisen merkistön äärellismittaisia merkkijonoja, joita voidaan helposti osoittaa olevan saman verran kuin luonnollisia lukuja. Näin ollen on olemassa päätösongelmia, joita ei voida ratkaista kyseisellä ohjelmointikielellä. Ratkeavia päätösongelmia on siis numeroituva määrä, mutta kaikkia päätösongelmia ylinumeroituva määrä. Tällöin voidaan hieman epätäsmällisesti sanoa, että päätösongelmista vain häviävän pieni osa on ratkeavia. Ratkeamattomien ongelmien joukossa on myös monia käytännön kannalta mielenkiintoisia ongelmia, tunnetuimpana näistä pysähtymisongelma: pysähtyykö tietyn ohjelman suoritus jossain vaiheessa syötteellä x – vai jääkö ohjelma ”ikuiseen luuppiin”?

Heräsikö kiinnostus aiheeseen? Äärettömyydestä on kirjoitettu paljon matematiikkaa popularisoivassa kirjallisuudessa. Esimerkkinä mainittakoon Rudy Ruckerin *Mieli ja äärettömyys* (Art House 1998).

Lopuksi haluan kiittää $\aleph$ -merkintöihin liittyvän väärinkäsitykseni oikaisemisesta Aapo Halkoa, joka on aiemmin käsitellyt joukkojen mahtavuutta Solmussa 2/1998–1999 kirjoituksessaan ”Joukko-oppia reaaliluvuilla”. Kiitän myös kaikkia muita arvokkaita kommentteja ja parannusehdotuksia antaneita.



Calkinin-Wilfin jono

Markku Halmetoja

Mäntän lukio

Funktio $f : X \rightarrow Y$ on *bijektio*, jos sillä on käänteisfunktio $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Joukko X on *äärellinen*, jos se on tyhjä tai jos on olemassa bijektio

$$f : X \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Joukko X on *numeroituva*, jos se on äärellinen tai jos on olemassa bijektio $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Numeroituvuutta käsitellään esimerkiksi kirjassa [2].

Numeroituvan joukon alkiot voidaan siis numeroida antamalla jokaiselle joukon alkion x numero $f(x)$, missä f on mainittu bijektio. Käytännössä tämä merkitsee sitä, että numeroituvan joukon alkiot voidaan asettaa jonoon järjestyksessä $x_1, x_2, x_3, \dots$. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on numeroituva, sillä $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{Z}_+$ on vaadittu bijektio. Myös kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ on helppo osoittaa numeroituvaksi, mutta on ehkä yllättävää, että rationaalilukujen joukkokin on numeroituva. Tyydymme tässä osoittamaan, että positiiviset rationaaliluvut voidaan asettaa jonoon. Todistus perustuu kaavioon

1/1	→	2/1		3/1	→	4/1		5/1	→	6/1	...
	↘		↗		↘		↗		↘		
1/2		2/2		3/2		4/2		5/2		6/2	...
↓	↗		↘		↗		↘		↗		
1/3		2/3		3/3		4/3		5/3		6/3	...
	↘		↗		↘		↗		↘		
1/4		2/4		3/4		4/4		5/4		6/4	...
↓	↗		↘		↗		↘		↗		
1/5		2/5		3/5		4/5		5/5		6/5	...
	↘		↗		↘		↗		↘		
1/6		2/6		3/6		4/6		5/6		6/6	...
⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	⋱

josta nuolia seuraamalla saamme jonon

$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, 3, 4, \frac{3}{2}, \dots$$

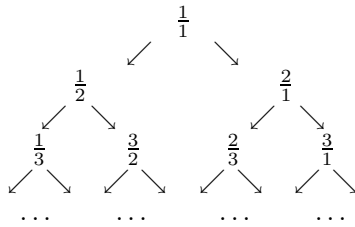
Jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy tässä jonnossa äärettömän monta kertaa. Jättämällä alusta läh-

tien pois jokaisen jonossa jo esiintyneen luvun saamme uuden jonon

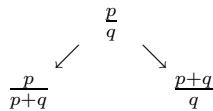
$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5, \dots,$$

jossa jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy täsmälleen kerran.

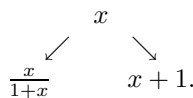
Edellä esitetty herättää kysymyksen, onko mahdollista muodostaa kaikki positiiviset rationaaliluvut käsittävä jono turvautumatta mihinkään jälkikäteism manipulatioihin. Tämä ongelma voidaan ratkaista monella eri tavalla, mutta ehkä elegantin ratkaisu on Calkinin ja Wilfin [3] konstruoima *binäärinen puu*, joka löytyy myös kirjasta [1].



Puu rakentuu kuvion osoittamalla tavalla siten, että jokaisella siinä olevalla luvulla on alla olevassa kaaviossa määritellyt vasemman- ja oikeanpuoleinen jälkeläinen, v_j ja o_j .



tai jos $\frac{p}{q} = x$, niin



Lukemalla puuta vaakariveittäin vasemmalta oikealle saamme *Calkinin-Wilfin jonon*

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \dots,$$

jossa jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy täsmälleen kerran. Todistamme tämän väitteen. Todistus koostuu kolmesta erillisestä induktioperiaatteen sovelluksesta. Induktioperiaatetta käsitellään esimerkiksi kirjassa [2].

Lause 1. Calkinin-Wilfin jonon jokainen luku on supistetussa muodossa.

Todistus. Jonon ensimmäinen luku toteuttaa vaaditun ehdon. Jos $x = p/q$ on jonossa ja $\text{syt}(p, q) = 1$, niin $\text{syt}(p, p+q) = \text{syt}(p+q, q) = 1$, joten myös x :n jälkeläiset ovat supistetussa muodossa. Induktioperiaatteen mukaan jonon kaikki luvut ovat supistetussa muodossa.

Lause 2. Calkinin-Wilfin jono sisältää kaikki positiiviset rationaaliluvut.

Todistus. Jonossa ovat kaikki rationaaliluvut p/q , joille $\text{syt}(p, q) = 1$ ja

$p+q=2$, nimittäin luku $1/1$. Olkoon $k \geq 3$ kokonaisluku. Teemme induktio-oletuksen, jonka mukaan jonossa ovat kaikki positiiviset rationaaliluvut s/r , joille $\text{syt}(s, r) = 1$ ja $s+r < k$. Olkoon nyt p/q sellainen positiivinen rationaaliluku, että $\text{syt}(p, q) = 1$ ja $p+q = k$. Jos $p < q$, niin $\frac{p}{q-p}$ on induktio-oletuksen mukaan jonossa, sillä $\text{syt}(p, q-p) = 1$ ja $p+q-p = q < k$. Täten p/q on $\frac{p}{q-p}$:n v_j :nä jonossa. Samalla tavalla näemme, että jos $p > q$, niin p/q on jonoon kuuluvan luvun $\frac{p-q}{q}$ o_j ja on täten jonossa. Induktioaskel on näin todistettu ja induktioperiaatteesta seuraa, että jonossa ovat kaikki positiiviset rationaaliluvut p/q , joille $\text{syt}(p, q) = 1$ ja $p+q = k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Tämä kattaa kaikki positiiviset rationaaliluvut.

Lause 3. Calkinin-Wilfin jonossa ei ole kahta samaa lukua.

Todistus. Luku 1 esiintyy jonossa vain kerran. Jokainen muu jonon luku on joko v_j (< 1) tai o_j (> 1), joten riittää, että todistetaan kaikki v_j :t ja vastavasti kaikki o_j :t keskenään erisuuriksi. Jonon 7 ensimmäistä lukua ovat keskenään erisuuria ja niissä osoittajan ja nimittäjän summa on ≤ 5 . Olkoon $k \geq 5$ kokonaisluku. Teemme induktio-oletuksen, jonka mukaan jonon kaikki luvut p/q , joille $p+q < k$, ovat keskenään erisuuria. Olkoot m/n ja r/s kaksi jonossa olevaa ehdot $m+n = k$ ja $r+s = k$ toteuttavaa v_j :tä. Luvut

$$x = \frac{m}{n-m} \quad \text{ja} \quad y = \frac{r}{s-r}$$

ovat jonossa ja induktio-oletuksen mukaan erisuuret, sillä

$$\text{syt}(m, n-m) = \text{syt}(m, n) = 1 \quad \text{ja}$$

$$\text{syt}(r, s-r) = \text{syt}(r, s) = 1$$

sekä $m+n-m = n < k$ ja $r+s-r = s < k$. Ehdosta $x \neq y$ eli

$$\frac{m}{n-m} \neq \frac{r}{s-r}$$

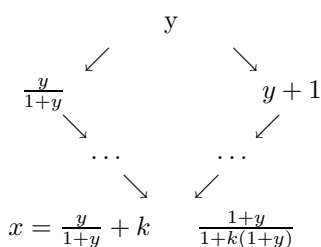
seuraa välittömästi, että m/n ja r/s ovat erisuuret. Samalla tavalla todistetaan, että kaikki o_j :t, joiden osoittajan ja nimittäjän summa on k , ovat keskenään

erisuuria. Jätämme lukijan pohdittavaksi, miksi samanpuoleiset jälkeläiset a/b ja c/d ovat erisuuret, jos $a + b \neq c + d$. Jos siis kaikki jonon luvut p/q , joille $p + q < k$, ovat keskenään erisuuria, niin myös kaikki jonon luvut u/v , joille $u + v \leq k$ ovat keskenään erisuuria kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. Induktioaskel on näin todistettu ja induktioperiaatteen mukaan kaikki jonon luvut ovat erisuuria.

Johdamme lopuksi rekursiokaavan Calkinin-Wilfin jonon lukujen laskemiseksi. Siihen tarvitsemme jonon luvun x korkeamman kertaluvun jälkeläisiä, mitkä määrittelemme ensin.

Näimme edellä, että jos x on jonon termi, niin x :n oj on $x + 1$. Luvun x toisen kertaluvun oj on x :n oj:n oj eli $(x + 1) + 1 = x + 2$. Näin jatkamalla saamme x :lle kertalukua k olevan oj:n; se on $x + k$. Koska x :n vj on $x/(1 + x)$, on x :n toisen kertaluvun vj $x/(1 + 2x)$ ja yleisesti kertalukua k oleva x :n vj on $x/(1 + kx)$. Sijoittamalla saatuihin kaavoihin $k = 0$ saamme x :n nollannen kertaluvun jälkeläiset. Kumpikin niistä on luku x itse.

Puun rakenteesta havaitsemme, että ensimmäistä termiä 1 lukuunottamatta jonon mielivaltainen termi x on erään jonossa aikaisemmin esiintyneen termin y vasemmanpuoleisen jälkeläisen k :nnen kertaluvun oj, missä $k \in \mathbb{N}$. Jos x ei ole puun minkään vaakarivin oikeassa reunassa, niin x :n oikealla puolella oleva luku, luvun x seuraaja jonossa, on puolestaan jo mainitun termin y oikeanpuoleisen jälkeläisen k :nnen kertaluvun vj. Kuvio havainnollistaa asiaa.



Luvun $x = \frac{y}{1+y} + k$ seuraaja on siis $\frac{1+y}{1+k(1+y)}$.

Merkitsemme luvun x kokonaisosaa ja murto-osaa symboleilla $[x]$ ja $\{x\}$. Koska $x = k + \frac{y}{1+y}$, on $[x] = k$ ja $\{x\} = \frac{y}{1+y}$, joten saamme x :n seuraajan muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1+y}{1+k(1+y)} &= \frac{1}{k + \frac{1}{1+y}} = \frac{1}{k+1 - \frac{y}{1+y}} \\ &= \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}}. \end{aligned}$$

Jätämme lukijan todennettavaksi, että johdettu kaava antaa x :n seuraajan myös silloin, kun x on puun oikeassa reunassa.

Seuraajakaavan avulla saamme määritellyä Calkinin-Wilfin jonon (x_n) rekursiivisesti:

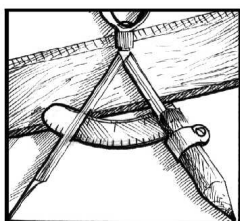
$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = \frac{1}{[x_n] + 1 - \{x_n\}}$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Kiitän professori Jorma Merikoskea kirjoitustani koskeneista arvokkaista huomautuksista.

Kirjallisuutta

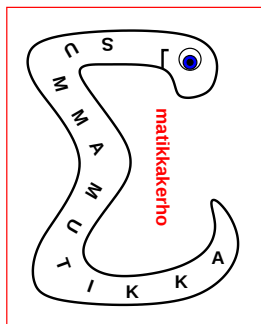
1. M. Aigner, G. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Third edition, Springer 2004.
2. J. Merikoski, A. Virtanen, P. Koivisto, Johdatus diskreettiin matematiikkaan, WSOY 2004.
3. N. Calkin ja H. Wilf, Recounting the rationals. Amer. Math. Monthly 107 (2000), 360-363.
4. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>



Toiminnallista matematiikkaa: Fraktaaliaskartelua

Saara Lehto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto



Sarjassa Toiminnallista matematiikkaa esitellään Summamutikka-matematiikkakerhoissa hyviksi havaittuja tehtäviä. Sarjassa esitetään tehtävät ratkaisuihin, annetaan neuvoja tehtävien ohjaamiseen ja valotetaan niiden matemaattista taustaa. Summamutikkakerhoja järjestävät LUMA-keskus ja Helsingin yliopiston matema-

tiikan ja tilastotieteen laitos pääkaupunkiseudun alasteilla. Lisätietoja Summamutikkakerhoista löytyy sivuilta: <http://www.helsinki.fi/summamutikka>.

Vihreä mato asuu puunkolossa. Eräänä päivänä se päättää mitata kotioksansa pituuden. Se aloittaa oksan juurelta ja lähtee rohkeasti mittaamaan oksaa ylöspäin. Mitattuaan kaksitoista matomitallista se kuitenkin lyö päänsä johonkin kovaan.

Mato katsoo ylöspäin ja huomaa, että oksasta erkanee toinen oksa sen reitille. Se miettii hetken ja päättää sitten mitata myös pienemmän oksan pituuden. Uusi oksa ei ole juuri sen omaa ruumista paksumpi ja sen

pitääkin tasapainoilla pysyäksensä reitillä. Se ehtii mitata vain neljä matomitallista, kun se jälleen huomaa jotain edessään.

Oksasta työntyy ulos jälleen uusi oksa, mutta tämä oksa on aivan pieni ja niin kapea, ettei mato enää mahdu sille mittaamaan. Mato arvioi, ettei oksan pituuskaan ole edes yhtä matomitallista. Kun mato tarkkailee oksaa, se huomaa liikettä oksan juurella. Pienenpieni ruskea mato kulkee oksalla. Se kääntyy tuolle pienemmälle oksalle ja lähtee mittaamaan sitä ylöspäin. Iso mato laskee, että se mittaa yksi, kaksi ja kolme omaa mitaansa.

Sitten iso mato joutuu oikein siristämään silmiään. Pienenpienen oksan varresta työntyy ulos aivan pikkiriikkinen oksa ja pieni ruskea mato jatkaa matkaansa sitä pitkin. Kun iso mato tutkii pientä oksaa tarkemmin, se huomaa, että se on täynnä noita vielä pienempiä oksia. Erästä toista sellaista mittailee toinen pieni ruskea mato.

Mato tuntee yhteenkuuluvuutta noiden pienten ruskeiden matojen kanssa. Nekin mittaavat kotioksiansa pituuksia. Se katselee kaikkia noita pieniä oksia. Miten ruskeat madot ikinä saavat ne kaikki mitatuiksi, se tuu-

mii. Äkkiä matoa alkaa huimata. Se siristää silmiään vieläkin sirkeämmälle ja painaa nenänsä aivan kiinni pienen oksan pintaan. Onko pienenpienen oksan pikki-riikkisillä oksillakin oksanhaaroja?

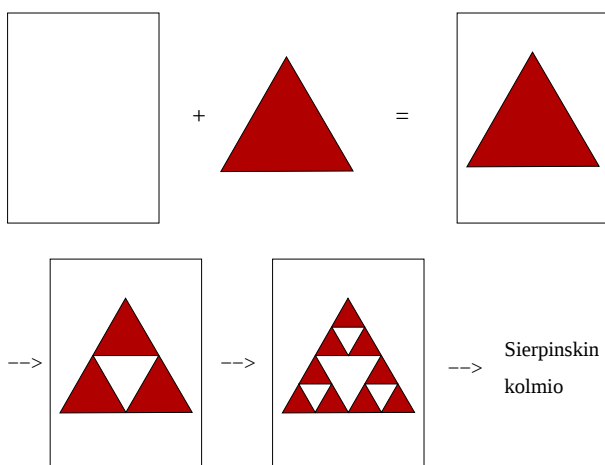
Se katselee ruskeita matoja, jotka mittaavat pieniä oksia, joita se itse ei mahdu mittaamaan. Katselevatko ruskeat madotkin toisia vielä pienempiä matoja, ehkäpä punaisia, jotka mittaavat oksia, joita ruskeat madot eivät enää voi mitata? Mato tuumii, kuinka kauan kaikkien niiden oksien mittaaminen kestäisi.

Mato katselee ympärilleen ja havaitsee, että myös sen oma oksa on täynnä pienempiä oksia. Sillä itselläänkin on siis edessään aika kova mittaaminen. Se kurkistaa oksansa juurelle ja siitä tuntuu, että jokin huimaava tunne pyörii sen vatsanpohjassa.

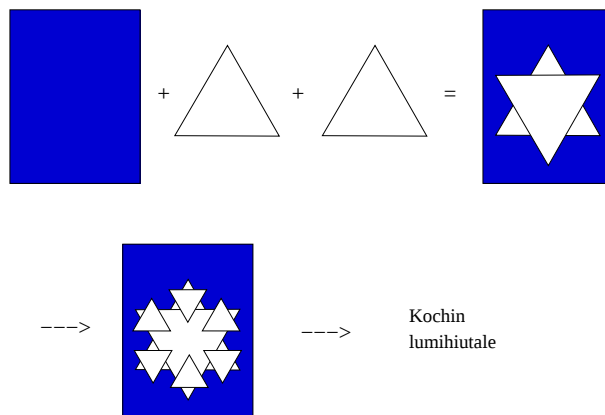
Tässä artikkelissa tutustutaan fraktaalikuvioihin. Tarian mato asui fraktaalipuussa ja retkellään se törmäsi jo moneen fraktaalimaisen huimaavaan ajatukseen. Seuraavaksi käsittelemme samankaltaisia ideoita alasteen ja miksei ylästeenkin oppilaille soveltuvalla tavalla.

Värillistä paperia, sakset ja liimaa

Aloitetaan askartelemalla kaksi kuuluisaa fraktaaliala: Sierpinskiin kolmio ja Kochin lumihiiutale. Puuhaan tarvitaan valkoisia ja värillisiä A4-arkkeja, sakset ja liimaa. Askarteluohjeet on piirretty kuviin 1 ja 2.



KUVA 1. Leikkaa ja liimaa värillinen kolmio valkoiselle paperille. Leikkaa sitten lisää pienempiä valkoisia kolmioita ja liimaa kuten kuvassa. Kun kuviota jatketaan loputtomiin, saadaan Sierpinskiin kolmio.



KUVA 2. Leikkaa ja liimaa värilliselle paperille kaksi valkoista kolmiota Daavidin tähdeksi. Leikkaa sitten lisää pienempiä valkoisia kolmioita ja liimaa kuten kuvassa. Kun kuviota jatketaan loputtomiin, saadaan Kochin lumihiiutale.

Molemmat kuviot syntyvät erikokoisista tasasivuisista kolmioista. Kolmiot voi leikata vapaalla kädellä pyrkien kohti tasasivuista muotoa. Näin syntyy ihan mukavia kuvia. Jos aloituskolmiot eivät ole ihan tasasivuisia, kannattaa pienemmät kolmiot sovittaa kuvan avulla. Tärkeintä on, että fraktaalikuvio säilyy.

Kolmioita leikatessa voidaan pohtia sitä, miten täydellisen tasasivuisen kolmion helpoiten saisi aikaan. Aika hyviä kolmioita saa aikaan ihan kokeilemalla. Jos kantasivu on tietyn pituinen, halutaan kahdesta muusta sivusta vielä saman pituiset. Jos laittaa ensimmäisen sivun näin ja toisen noin, kuinka pitkä kolmannesta sivusta tulee? Onko se oikean pituinen? Mihin eri asentoihin toisen sivun voi laittaa? Voisiko toista ja kolmatta sivua sovittaa jotenkin yhtä aikaa?⁵

Voidaan myös miettiä miten pienemmät kolmiot suhtautuvat isompiin? Miten niistä saa saman muotoisia ja mistä tietää, minkä kokoisia niiden pitää olla? Tässä kannattaa kiinnittää huomiota siihen, kuinka monta pienempää kolmiota isompaan mahtuu. Kun kuvioita askarrellaan eteenpäin, millaisia uusia kolmioita kuvioon syntyy?

Sierpinskiin kolmiota tehtäessä kannattaa katsoa, miten värillinen kolmio jakautuu, kun sen päälle liimataan valkoinen kolmio. Minkä muotoisia jäljelle jäävät värilliset osat ovat? Miten isosta kolmiosta saisi monta oikean kokoista pienempää kolmiota?

Kochin lumihiiutaleta askarrellessa syntyy hiiutaleen reunalle aina uusia pieniä kolmioita. Minkä kokoisia kolmioita niiden päälle liimataan? Kuinka monta selasta mahtuu isompaan kolmioon?

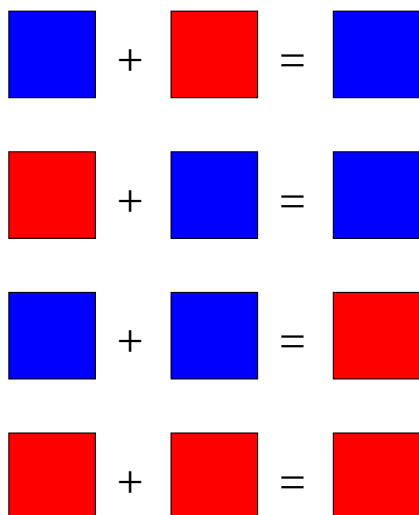
⁵Tasasivuinen kolmio syntyy kätevästi harpin avulla. Piirretään ensin kolmion kantasivu, otetaan sivun pituus harpille ja piirretään ympyränkaaret sivun yläpuolelle kun harpin kärki on vuorollaan sivun molemmissa päissä. Kolmion kolmas kärki on kaarien leikkauspisteessä.

Kuvioiden askartelua voisi periaatteessa jatkaa loputtomiin. Sierpinskiin kolmiossa syntyy aina uusia värillisiä kolmioita, joiden päälle voi liimata valkoisia kolmioita. Kochin lumihuutaleessa voi taas reunalle syntyvien kolmioiden päälle aina liimata uusia pieniä kolmioita.

Värien yhteenlasku ja Sierpinskiin kolmio

Tässä tehtävässä lasketaan lukujen sijaan väreillä. Valitaan tarkasteluun kaksi väriä, vaikkapa sininen (tummempi) ja punainen (vaaleampi). Aloitetaan määrittelemällä värien laskusäännöt kuten kuvassa 3.

Väreillä lasketaan ruutupaperille. Väritetään yhteenlaskettavat ruutuihin niin, että niiden väliin jää yksi tyhjä ruutu. Laskun tulos kirjataan sitten viistosti alapuolelle niiden väliin.

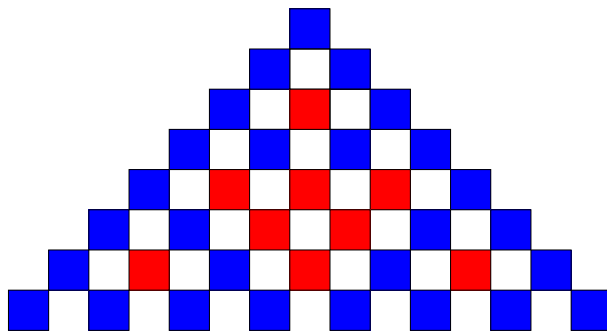


KUVA 3. Värien laskusäännöt.⁶

Aloitetaan kuvion laskeminen värittämällä ruutupaperin yläreunan keskelle sininen ruutu. Koska kuviosta tulee leveä, voi olla hyvä kääntää ruutupaperi vaakatasoon. Sinisen ruudun alapuolelle väritetään toiset siniset ruudut viistosti alavasemmalle ja alaoikealle. Nyt edessä on ensimmäinen laskutoimitus, tarkistetaan säännöistä, että sininen + sininen = punainen ja merkitään tulos sinisten ruutujen alapuolelle. Reunoille tulee taas siniset ruudut.

Jatketaan kuviota laskemalla laskusääntöjen mukaan. Reunoille väritetään aina siniset ruudut. Tämä voidaan ottaa joko annettuna sääntönä tai sitten voidaan ajatella, että siniset ruudut syntyvät, kun lasketaan ylhäällä vasemmalla tai oikealla oleva sininen ruutu ja toisella puolella oleva tyhjä ruutu yhteen.

Kuvassa on laskettu kolmion kahdeksan ensimmäistä riviä. Onko kuviossa jotain samaa kuin aiemmin askarrelluissa fraktaleissa? Silmien siristäminen tai kauempaa katsominen voi auttaa kuvion hahmottamisessa.



KUVA 4. Kuvan 3 laskusäännöillä lasketun kolmion kahdeksan ensimmäistä riviä.

Jos kuviota jatkettaisiin, yhdeksänteen riviin tulisi taas siniset ruudut reunoille ja keskelle seitsemän punaista ruutua. Tämän jälkeen punaisista ruuduista muodostuisi iso kärjellään seisova kolmio ja sen reunoille alkuosan mukaiset kuviot. Kolmiosta saadaan siis Sierpinskiin kolmio.

Kuvion värittäminen vaatii periaatteessa tarkkaavaisuutta, sillä yksikin virhe saattaa muuttaa kuvion kokonaan. Toisaalta kuvion tietty säännönmukaisuus paljastuu käytännössä pienistä virheistä huolimatta. Pienet virheet saattavat itse asiassa tehdä kuvista mielenkiintoisia.

Kolmioita voi olla helpompaa värittää valmiiseen kolmiopohjaan, jossa ovat vapaina vain käytettävät ruudut. Tällaisen voi tehdä esimerkiksi värittämällä väli-ruudut mustaksi ruutupaperilta ja kopioimalla valmiita kolmioita. Tällöin rivejä kannattaa varata joko kahdeksan tai kuusitoista.

Koko luokan värittämät pienet kolmiot voi koota luokan seinälle isoksi Sierpinskiin kolmioksi. Tällöin pieniä kolmioita kiinnitetään seinälle värien yhteenlaskun mukaisesti. Sinisten ruutujen kohdille kiinnitetään pieni kolmio. Punaisten ruutujen kohdat jätetään tyhjiksi. Kuviosta tulee hauska, vaikka eri kolmiot olisi väritetty eri väripareilla.

Värien yhteenlasku ja Pascalin kolmio

Kun värien yhteenlasku on hallussa, voidaan koettaa mitä tavallisella yhteenlaskulla saadaan aikaan. Kirjoitetaan ensimmäiseen ruutuun ja reunoille aina luku yksi ja alapuolelle lasketaan yllä olevat luvut yhteen. Näin saadaan Pascalin kolmio, kuva 5.

⁶Värit erottuvat paremmin verkkolehdestä.



Lottorivin numeroiden summa

Pentti Haukkanen

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto
 pentti.haukkanen@uta.fi

Järjestellessäni äsken vanhoja Mathematica-kansioitani törmäsin tiedostoon, jossa ratkaistaan pieni lottotehtävä. Muutama vuosi sitten nimittäin keskusteltiin julkisuudessa (tosin aivan vähäisessä määrin) siitä, voiko lottorivien numeroiden summien avulla ennustaa arvottavaa lottoriviä. Lottorivin numerot tarkoittavat lottorivin seitsemää kokonaislukua väliltä $[1, 39]$, jotka ilmoitetaan suuruusjärjestyksessä. Jotkut olivat huomanneet, että kaikki lottorivin numeroiden summat eivät ole yhtä todennäköisiä. Esimerkiksi, vain yhden lottorivin (rivin 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) numeroiden summa on 28, kun taas summa 30 saadaan kahdesta lottorivistä (1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 ja 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8). Jotkut maallikot tekivät tästä johtopäätöksen, että kannattaa esimerkiksi ennemmin lotota riviä, jonka numeroiden summa on 30, kuin riviä, jonka numeroiden summa on 28. Todennäköisyyslaskennan alkeet ymmärtävä tietää, että kaikki rivit ovat yhtä todennäköisiä, siis esimerkiksi rivi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 on yhtä todennäköinen kuin rivi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9. Toki on todennäköisempää, että lottorivin numeroiden summa on 30 kuin, että se on 28, mutta lotossa ei veikatakaan numeroiden summaa vaan itse numeroita. (Huomattakoon, että tarkka lottoaja ei kuitenkaan veikkaa riviä 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, koska sitä veikkaa niin moni, että osuessaan kohdalle se tuottaisi yhdelle voittajalle ilmeisesti tavanomaista pienemmän

potin; mutta tämä onkin jo eri asia.)

Laskin silloin muutama vuosi sitten jollekulle asiaa pohtineelle, miten lottorivien numeroiden summat jakautuvat. Tein laskutehtävän generoivilla funktioilla seuraavalla tavalla. Tarkastellaan generoivaa funktiota

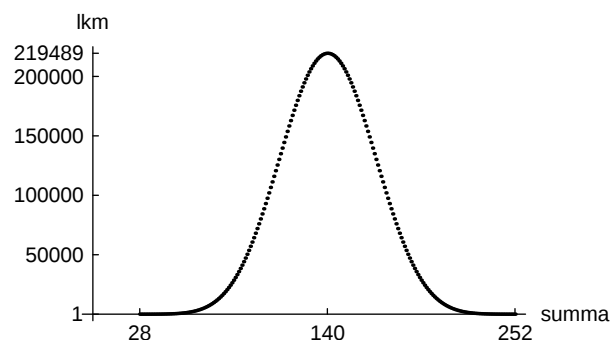
$$g(u, t, M) = \prod_{i=1}^M (1 + u t^i),$$

joka laskee joukon $\{1, 2, \dots, M\}$ osajoukkoja niin, että symbolin u potenssi kertoo, kuinka monta alkioita osajoukossa on, ja symbolin t potenssi kertoo näiden alkioiden summan. Kirjoitetaan $g(u, t, M)$ nyt muotoon

$$g(u, t, M) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{s(m, M)} a_{m, n} u^m t^n,$$

jolloin siis kerroin $a_{m, n}$ ilmaisee, kuinka monta kappaletta on sellaisia m -alkioisia joukon $\{1, 2, \dots, M\}$ osajoukkoja, joiden alkioiden summa on n . (Tässä $s(m, M)$ on suurin mahdollinen summan arvo, ts. $s(m, M) = [M - (m - 1)] + [M - (m - 2)] + \dots + [M - 1] + M$.) Koska lottorivissä valitaan 7 alkioita joukosta $\{1, 2, \dots, 39\}$, niin generoivassa funktiossa $g(u, t, 39)$ kerroin $a_{7, n}$ ilmaisee, kuinka monta kappaletta on sellaisia lottorivejä, joiden numeroiden summa on n . Ge-

neroivien funktioiden laskenta on helppoa Mathematicalla. Kuvassa 1 on lottorivien numeroiden summan jakauma. Yleisin summan arvo on 140, joka on 219 489 eri rivin numeroiden summa. Kaikkiaan erilaisia lottorivejä on $\binom{39}{7}$ eli 15 380 937 kappaletta. Lottorivin numeroiden summa on 140 todennäköisyydellä 0.0142702; siis todennäköisyys on selvästi yli prosentin. Summan arvo on esimerkiksi välillä 137, ..., 143 noin 10 prosentin todennäköisyydellä. Voisi ehkä sanoa, että keskimäiset arvot ovat ”yllättävän” todennäköisiä.



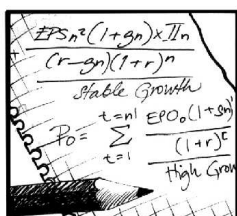
KUVA 1: Lottorivien numeroiden summan jakauma.

Lotto alkoi vuonna 1970 ja ensimmäinen rivi arvottiin 3.1.1971. Kaikki arvotut rivit löytyvät Veikkauksen nettisivuilta. Kiinnostunut lukija voi testata, mitenkä lottorivien numeroiden summat ovat jakautuneet tähän mennessä.

Generoivat funktiot kuuluvat lähinnä kombinatoriikan alaan. Esimerkkeinä alan oppikirjoista mainittakoot [1, 3]. Myös diskreetin matematiikan yleistöksissä esitellään usein generoivat funktiot, ks. esim. [2].

Viitteet

- [1] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*. Second edition. North-Holland Publishing Co., New York, 1992.
- [2] R. P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics*. Fourth edition. Addison Wesley Publishing Co., 1998.
- [3] A. Tucker, *Applied Combinatorics*. Third edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.



Presidentti-gallup

Pekka Alestalo

Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Gallup-uutinen

Presidentinvaalit lähestyvät. Vaalikampanjoinnin lisäksi kiihtyy myös tiedotusvälineiden gallup-huuma, kun tv, radio ja lehdistö kyllästävät meidät uutisilla, joiden yleinen kaava on seuraava:

”Ehdokas X johtaa kilpaa x % kannatuksella, toisena on ehdokas Y, jota kannattaa y % haastatelluista, ja ehdokas Z näyttää putoavan z % kannatuksellaan vaalin toiselta kierrokselta. Kyselyä varten haastateltiin n. 2 000 äänioikeutettua ja tulosten virhe on ± 2 %-yksikköä.”

Uutinen on niin tavallinen aikaisemmista vaaleista, ettei ehkä heti tule kiinnittäneeksi huomiota sen esittämän väitteen mahdollisuuteen. Koska äänioikeutettuja on Suomessa n. 4 miljoonaa, on kyselyyn osallistuneiden osuus kaikista mahdollisista äänestäjistä vain 0,05 %; ei kai näin pienen osuuden perusteella voi päätellä mitään todellisista kannatusluvuista. Vai voiko?

Pieni ajatusleikki lienee paikallaan. Pahimmassa tapauksessa ehdokkaalla X on koko maassa vain 2 000 kannattajaa, mutta juuri he sattuivat tulemaan valituiksi gallupiin. Haastattelijalta on esimerkiksi voinut mennä puhelinluettelo ja erään puolueen jäsenrekisteri sekaisin. Mutta vaikka haastateltujen valinta tehtäisiin kuinka huolellisesti ja ”satunnaisesti” tahansa, on täl-

lainen tulos kuitenkin periaatteessa mahdollinen. Tästä seuraa heti, ettei uutisen väite voi kirjaimellisesti ottaen pitää paikkansa.

Tarkkaavainen lukija on tietysti jo tässä vaiheessa huomannut, ettei yllä kuvattu tilanne ole kuitenkaan kovin *todennäköinen*. Itse asiassa kyseiselle todennäköisyydelle saadaan arvio

$$\frac{2\,000}{4\,000\,000} \cdot \frac{1\,999}{3\,999\,999} \cdots \frac{2}{3\,998\,002} \cdot \frac{1}{3\,998\,001} \approx 4 \cdot 10^{-7469}.$$

Käytännössä se on siis jotakuinkin mahdotonta. Ratkaisu uutisen sisältämään ristiriitaan piileekin siinä, että väitteestä on jätetty pois tämä todennäköisyyksiä koskeva osuus, jonka voisi arkikielellä ilmaista esimerkiksi muodossa ”2 % virheraja on tosi 95 % todennäköisyydellä”. Täsmällisemmässä kielessä sanotaan mieluummin, että väite on tosi 95 % luottamustasolla.

Seuraavassa on tarkoitus lyhyesti selvittää sitä, miten luvut 2 000, ± 2 % ja 95 % liittyvät toisiinsa.

Otanta

Gallupissa haastateltavien henkilöiden valinta on esimerkki otannasta. Jatkossa ei kiinnitetä huomiota siihen, millä tavalla nämä henkilöt pitäisi valita, jotta tu-

los olisi jossakin mielessä satunnainen. Oletamme esimerkiksi, että haastateltavat valitaan selaamalla puhe-linluetteloita. (Mieti, mitä ongelmia tähän liittyy!)

Seuraavaksi yksinkertaistamme tilannetta olettamalla, että ehdokkaita on vain kaksi (tai että tutkitaan vain yhden ehdokkaan kannatusta suhteessa muihin). Voimme unohtaa vaaliteeman ja tarkastella otantaa, jossa sinisiä ja punaisia palloja sisältävästä laatikosta otetaan yksi pallo kerrallaan ja kirjataan sen väri. Tilanteen matemaattinen käsittely yksinkertaistuu, jos jokainen kirjattu pallo palautetaan laatikkoon, koska tällöin eri-väristen pallojen suhteellinen osuus on jokaisessa tois-tossa sama. Jos palloja on yhteensä 4 000 000 ja niistä valitaan 2 000, ei tällä erolla ole mitään käytännön mer-kitystä. (Käytämme siis ”otanta ilman takaisinpanoa”-menetelmän sijasta ”otantaa takaisinpanolla”)

Tarkastellaan tilannetta, jossa laatikossa on N palloa, joista P kpl punaisia ja S kpl sinisiä; tällöin $P+S=N$. Olkoon $p = P/N$ = laatikon punaisten pallojen suhteel-linen osuus, $0 \leq p \leq 1$, ja vastaavasti $s = S/N = 1 - p$ = sinisten pallojen suhteellinen osuus. Ongelmana on se, että kaikki luvut P, S, p, s ovat meille etukäteen tun-temattomia, mutta yritämme saada niistä tietoa valit-semalla laatikosta pallon n kertaa ja palauttamalla sen värin kirjaamisen jälkeen takaisin laatikkoon. Tällöin n toiston jälkeen punaisia palloja on todennäköisimmin saatu $n \cdot np$ ja sinisiä palloja $n \cdot ns$ kappaletta; täsmäl-lisemmin sanottuna nämä luvut kuvaavat punaisten ja sinisten pallojen havaintokertojen odotusarvoja kysei-nessä otannassa:

$$P(1 \text{ pun. pallo}) \cdot 1 + P(2 \text{ pun. pallo}) \cdot 2 \\ + \dots + P(n \text{ pun. pallo}) \cdot n = np.$$

Havaittujen punaisten pallojen lukumäärän varianssi voidaan laskea kaavalla

$$P(1 \text{ pun. pallo}) \cdot (1 - np)^2 + P(2 \text{ pun. pallo}) \\ \cdot (2 - np)^2 + \dots + P(n \text{ pun. pallo}) \cdot (n - np)^2 = nps.$$

Todennäköisyyksien P laskeminen ja tulosten tarkista-minen jääköön lukijalle, mutta asia löytyy myös joista-kin lukiokirjoista binomijakauman kohdalta.

Selitys

Mutta miten näiden tietojen perusteella saadaan haet-tu yhteys? Tulemme nyt tämän kirjoitukseen vai-keimpaan kohtaan, joka tunnetaan todennäköisyykslas-kennassa nimellä ”Keskeinen raja-arvolause”. Sen mu-kaan esimerkiksi otantaan liittyviä todennäköisyyksiä voidaan laskea sopivasti skaalatun normaalijakauman avulla: Kun n on kohtuullisen suuri, mutta selvästi pienempi kuin N , noudattaa esim. punaisten pallo-jen havaittu lukumäärä likimäärin sellaista normaali-jakaumaa, jonka odotusarvo on $\mu = np$ ja keskihajonta

$\sigma = \sqrt{nps}$. En käsittele raja-arvolauseetta sen tarkem-min kuin mainitsemalla, että idealisoidussa tapaukses-sa $N = \infty$ rajatapaus $n \rightarrow \infty$ antaa täsmälleen oikean tuloksen kaikkiin tilannetta koskeviin todennäköisyyk-siin.

Huomautettakoon, että tietokoneiden aikakaudella normaalijakauma-approksimaation käyttäminen ei ole välttämätöntä, sillä laskun lopputulos saadaan myös numeerisesti suoraan binomijakaumasta. Tällöin kaa-van (1) antama riippuvuus jää kuitenkin epäselväksi.

Olkoon siis X = punaisten pallojen havaittu lukumää-rä. Yllä mainittu skaalaaminen tarkoittaa sitä, että lauseke (= satunnaismuuttuja)

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{nps}}$$

on normaalijakautunut odotusarvolla $\mu = 0$ ja kes-kihajonnalla $\sigma = 1$; sen arvoja voidaan siis tutkia esim. MAOL-taulukon avulla. Haluaisimme päätellä, että otannan perusteella $p \approx X/n$ on havaittujen pu-naisten pallojen suhteellinen frekvenssi, mutta normaali-jakaumaa käyttämällä voimme arvioida, kuinka luot-tettava näin saatu tulos on. Yleisesti käytetty ”luotetta-vuuden” kriteeri on 95 % luottamustaso; vaaditun nor-maalijakauman osan pitäisi kattaa 95 % kaikista mah-dollisuuksista. Jos siis haluamme väittää, että otannan tulos poikkeaa luvusta p korkeintaan a %-yksikköä 95 % luottamustasolla, niin vaatimus kuuluu:

$$P\{|X/n - p| \leq a/100\} = 0,95.$$

Ehto, jonka todennäköisyyttä tutkimme, tulee muo-toon $|X - np| \leq na/100$, josta edelleen

$$|Y| = \frac{|X - np|}{\sqrt{nps}} \leq \frac{na}{100\sqrt{nps}} = \sqrt{\frac{n}{ps}} \cdot \frac{a}{100}.$$

Koska Y noudattaa tavallista normaalijakaumaa, on ehdon $|Y| \leq t$ toteutumisen todennäköisyys muotoa $\Phi(t) - \Phi(-t) = \Phi(t) - (1 - \Phi(t)) = 2\Phi(t) - 1$, missä Φ on vanha tuttu normaalijakauman kertymäfunktio.

Laskumme alkaa nyt olla loppuvaiheessa. Yhtälöstä

$$2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{ps}} \frac{a}{100}\right) - 1 = 0,95$$

saadaan ensin

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{ps}} \frac{a}{100}\right) = 0,975,$$

jolloin taulukon perusteella

$$\sqrt{\frac{n}{ps}} \frac{a}{100} \approx 1,96 \text{ eli } a/100 \approx \frac{2\sqrt{ps}}{\sqrt{n}}.$$

Luvut p, s ovat tuntemattomia, mutta koska $ps = p(1 - p) \in [0, 1/4]$ aina, voimme varmuuden vuoksi

käyttää maksimiarvoa $ps = 1/4$, jolloin otamme huomioon pahimman mahdollisen tilanteen. Näin saamme lopulta arvion

$$a \approx \frac{100}{\sqrt{n}}. \quad (1)$$

Ja sitten vain kokeillaan: Jos $n = 2000$, niin saadaan $a \approx 2,24$ %-yksikköä. Tämä arvio on siis laskettu 95 % luottamustasolla. Se on siinä!

Tehtävä: (i) Kuinka suuri n antaa tarkkuuden $a \approx 1$ %-yksikkö (luottamustasolla 95 %)?
(ii) Kuinka suuri n antaa tarkkuuden $a \approx 2$ %-yksikköä (luottamustasolla 99 %)?

Tommi Sottinen luki kirjoituksen läpi ja oikaisi muutamman väärinkäsityksen. Kiitokset!