Solmu

Matematiikkalehti
2/2004

http://solmu.math.helsinki.fi/

Solmu 2/2004

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

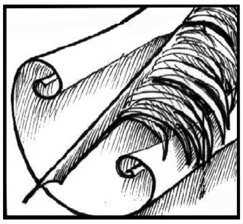
http://solmu.math.helsinki.fi/

Numeroon 3/2004 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään syyskuun 2004 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa sekä Suomen Kulttuurirahastoa.

Kansi: Otteita matematiikan verkkosanakirjasta, `http://thesaurus.maths.org`.

Sisällys



Matematiikka on osa perussivistystä ja luo pohjan jatko-opinnoille

Halusin ostaa kaupasta kaksi tölkkiä virvoitusjuomaa. Kuuden tölkin pakkaus maksoi 1,50 dollaria. Seurauksena aiheutin kassalla toimivalle nuorelle naiselle ongelman. Hän otti taskulaskimen esiin ja ryhtyi vaativan laskutoimituksen kimppuun. Muutaman minuutin uurastuksen jälkeen hän sai tehtävän ratkaistuksi ja sanoi: ”3 dollaria ja 25 senttiä, olkaa hyvä”. Ilmoitin, että laskutoimitus kyllä onnistui, mutta että tulos oli väärä. Hän ei ymmärtänyt mitä tarkoitin ja näytti laskimen näytöltä saamaansa tulosta. Pienen neuvonpidon jälkeen hän kutsui esimiehensä paikalle, joka huolellisen ja pitkän harkinnan jälkeen sai laskimella hinnaksi 50 senttiä ja pääsimme kaikkia osapuolia tyydyttävään ratkaisuun. Tämä tapahtui 19 vuotta sitten Floridassa. Vastaavanlainen tilanne voisi toistua nykyisin myös Suomessa. Tietokoneiden ja laskinten käyttö sekä matematiikan opiskelun ohentuminen nuorisoikäluokissa vähentävät laskutaitoa ja päättelykykyä.

Matematiikan laajan oppimäärän kirjoittajien määrä ylioppilaskirjoituksissa yliopistojen opiskelupaikkoihin verrattuna on jo selkeästi liian alhainen. Karkeasti arvioituna noin puolet yliopistojen opiskelupaikoista edellyttää matematiikan ja eksaktien luonnontieteiden perusteiden hallintaa. Keväällä 2003 pitkän matematiikan kirjoitti 32 % (pakollisena 15 %) abiturienteista. Tyttöjen osuus edelliseen vuoteen verrattuna nousi 43 %:iin, ja heistä 34 % suoritti kokeen pakollisena. Kevään 2003 ylioppilaskokelaista 67 % kirjoitti pitkän tai lyhyen matematiikan kokeen pakollisena tai ylimääräisenä kokeena. Matematiikan kirjoittajien suhteellinen määrä on pysynyt viime vuosina samansuuruisena. Vuosittain suuri osa uusista ylioppilaista, erityisesti tytöistä, sulkee itseltään opiskelumahdollisuuden yliopistoissa lukuisiin tieteenaloihin, koska he eivät ole kirjoittaneet pitkää tai lyhyttä matematiikkaa. Tämän vuoksi rima tekniikan ja eksaktien luonnontieteiden opiskelupaikan saamiseksi on jo laskenut liian alhaalle. Opiskelemaan pääsee liian heikoin pohjatiedoin ja liian alhaisella motivaatiolla. Vastaavasti esim. humanistisella ja kasvatustieteellisellä koulutusalalla opiskelupaikka avautuu vain pienelle osalle hakijoista. Niinpä avoimen yliopiston tyypillinen opiskelija on nykyisin nuori nainen, joka ei ole päässyt yliopistoon haluamalleen alalle ja joka ei ole kirjoittanut matematiikkaa ylioppilaskirjoituksissa.

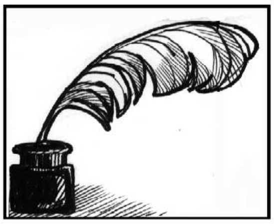
OULUN YLIOPISTO

Ylioppilastutkinnon rakennekokeilukouluissa matematiikan kirjoittajia on noin 88 % kokelaista. Suuntaus on hyvä ja jos rakenneuudistus todella lisää matematiikan opiskelua lukioissa ja kirjoittamista ylioppilastutkinnossa, se vähentää painetta vaatimuksille matematiikan asettamista pakolliseksi ylioppilastutkinnossa. Onkin aiheellista tutkia sitä, ovatko rakennekokeilussa olevat koulut sellaisia, joihin hakeutuu matemaattisesti suuntautuneita oppilaita tavallista enemmän ja osallistuisivatko he matematiikan kokeeseen ilman rakennekokeiluakin. Mikäli rakenneuudistus ei tuo pysyvää lisäystä matematiikan kirjoittajien lukumäärään, on perusteltua sisällyttää matematiikka pakollisena kokeena ylioppilaskirjoituksiin. Toisaalta lyhyen matematiikan alkupään tehtävät eivät ole niin vaikeita, etteikö niistä jokainen abiturientti kunnialla selviytyisi, jos vain vähän viitsii nähdä vaivaa sen eteen.

Matematiikan opiskelu koulussa on fysiikkaa ja kemiaa vielä tärkeämpää, sillä luonnontieteiden menestyksellinen opiskelu ja ymmärtäminen edellyttävät matematiikan hallintaa. Biologikaan ei selviä tutkinnostaan ilman matematiikan taitoja. Matematiikan opiskelu ei ole myöskään rasitteena humanisteille tai yhteiskuntatieteilijöille, sillä matematiikka kehittää loogista ajattelua ja päättelykykyä sekä ongelmanratkaisutaitoa. Näitä taitoja tarvitaan kaikilla elämän aloilla.

Lauri Lajunen
Rehtori
Oulun yliopisto

Pääkirjoitus



Matematiikkaleiri kesäkuussa 2004 Helsingin Kumpulassa

Helsingin yliopistoon perustettu Matemaattis-luonnontieteellisen tiedekunnan alainen LUMA-keskus avattiin 28.2.2004. Keskuksen tarkoituksena on tukea biologian, fysiikan, kemian, maantieteen, matematiikan ja tietotekniikan opetusta peruskoulussa ja lukiossa. Keskuksen toimenkuvaan kuuluvat myös näiden oppiaineiden opettajien koulutuksen tukeminen sekä laajempi yhteiskunnallinen yhteistyö. Matematiikan osalta keskuksen kouluyhteistyöhenkilö on Saara Lehto Matematiikan ja tilastotieteen laitokselta.

LUMA-keskuksen puitteissa järjestetään kesäkuussa 2004 matematiikkaleiri, joka on suunnattu 9–12 -vuotiaille lapsille. Matematiikkaleirejä on aikaisemmin järjestetty mm. Unkarissa ja Oulussa. Nyt järjestettävä leiri on lajissaan ensimmäinen Helsingissä, vaikka leirejä on aikaisemmin järjestetty ainakin luonnontieteissä.

Leirin ideoijat, Marja Hytönen ja Suvi Vanhatalo, ovat opintojen loppuvaiheessa olevia matematiikan aineenopettajaopiskelijoita. Tarkoituksena on esittää matematiikka lapsille luovana ajatteluna mekaanisen laskemisen sijasta. Luonnontiedeleirien toimintatapoja ei voikaan suoraan kopioida, koska matematiikka on tieteenä hyvin erilainen. Lähtökohtana on ajatus, että matemaattiset ilmiöt ovat pään sisällä, eivät paperilla tai ympäröivässä luonnossa.

Matematiikan tekemisessä olennaisinta on ajatteleminen ja ideoiden välittäminen. Puhuttu ja kirjoitettu kieli tai matemaattiset symbolit eivät kuitenkaan aina ole lapsille (tai edes aikuisille) luonnollinen tapa matematiikasta keskustelemiseen. Lapsi ajattelee toimimalla, ja siksi matemaattiset käsitteet ja ideat pitää esittää konkreettisina ja toiminnallisina.

Leiri järjestetään matemaattis-luonnontieteellisen tiedekunnan tiloissa Helsingin Kumpulassa 14.–18.6.2004 Lisää tietoa leiristä kiinnostuneille löytyy LUMA-keskuksen www-sivulta, `http://www.helsinki.fi/luma/`.

Antti Rasila

Toimitussihteerin palsta

Monikielinen koulutason matematiikan verkkosanakirja

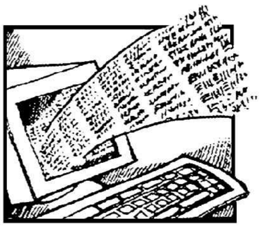
Marjatta Näätänen
Dosentti
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

EU:n Socrates Minerva -projekti, monikielinen matematiikan verkkosanakirja tarjoaa koululaisille ja opettajille mahdollisuuden "surffailla" matematiikan käsitteiden parissa; matematiikan käsitteisiin voi tutustua vuorovaikutteisesti verkkoselaimen avulla. Sanakirjan kieliä ovat suomen lisäksi englanti, liettua, puola, slovakki, tanska ja unkari. Myös espanja on tulossa mukaan.

Toivomme, että sanakirja tulisi monipuoliseen käyttöön, aina itseopiskelusta luokkahuoneeseen asti. Suomen ulkopuolella asuville suomenkielisille se tarjoaa mahdollisuuden oman kielen käyttöön matematiikan käsitteiden opiskelussa. Sanakirjassa mukana olevien muiden kielten matemaattisen käsitekielen oppimiseen, vaihto-oppilaille tai maahanmuuttajille siitä on toivottavasti myös hyötyä.

Kaikenlaiset kokemukset ovat meille arvokkaita ja parannus- sekä korjausehdotukset tervetulleita; työssä on valtavasti erilaisia yksityiskohtia ja paranneltavaa todennäköisesti riittää tulevaisuudessakin. Palautetta voi lähettää osoitteella `marjatta.naatanen@helsinki.fi`. Ohjeet sanakirjan käyttöön ovat verkkosivulla `http://solmu.math.helsinki.fi/sanakirja/` ja teknisissä ongelmissa voi kysyä neuvoa Antti Rasilalta, `antti.rasila@helsinki.fi`.

Eri maiden matematiikan opetustyyli vaihtelee, siksi tekstit eivät ole aina toistensa suoria käännöksiä. Sanakirja on linkitetty matematiikkalehti Solmuun ja Simo K. Kivelän korkeamman tason matematiikan sanakirjaan. Sanakirja löytyy siis matematiikkalehti Solmun kautta osoitteesta `http://solmu.math.helsinki.fi`.



Ohjeita sanakirjan käyttäjälle

Miten pääsen alkuun?

Linkki sanakirjaan löytyy Solmun kotisivulta, `http://solmu.math.helsinki.fi/sanakirja/`. Selaileminen kannattaa aloittaa kohdasta aakkosellinen hakemisto, johon linkki löytyy pääsivun oikeasta ylälaidasta. Sanakirjasta löytyvää tekniikkaa voi helpoimmin kokeilla kuvagallerioista, joihin on koottu sanakirjasta löytyvät kuvat ja animaatiot. Jotakin tiettyä käsitettä hakiessa kannattaa käyttää sanakirjan hakutoimintoa. Sanakirjassa voi edetä käsitteestä toiseen myös käyttäen käsitepuita tai käsitteiden riippuvuussuhteita kuvaavia linkkejä. Käsitepuiden katseleminen edellyttää kuitenkin Java-tuen asentamista.

Matemaattisten merkkien katseleminen

Sanakirjassa käytetään MathML-kieltä matemaattisten kaavojen esittämiseen. MathML-kaavojen katseluun voi käyttää joko Internet Explorer 6 -selainta Windowsissa tai Mozillaa (myös FireFox), joka toimii myös muissa järjestelmissä. Koska sanakirjassa käytetty tekniikka on uutta, käyttämiseen vaaditaan selainohjelman uusin versio. Internet Exploreria käytettäessä tarvitaan ilmainen Design Science MathPlayer -plugin, joka on ladattavissa sivulta `http://www.dessci.com/en/products/mathplayer/`. Vapaasti levitettävä Mozilla-selain `http://www.mozilla.org` tukee MathML:ää suoraan, joten sitä käytettäessä erillistä pluginia ei tarvita. Mozillaa käytettäessä kannattaa kuitenkin ladata MathML-fontit. Kun katselet MathML-sivua Mozillalla, selain kehottaa lataamaan MathML-fontit Mozilla MathML -sivulta. Seuraa sivulta löytyviä ohjeita. Tarvitsemasi fontit riippuvat käyttämäsi tietokoneen tyypistä (Windows, Linux, Macintosh).

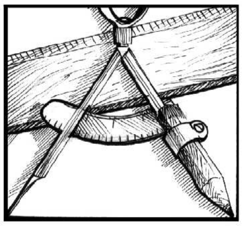
Käsitepuut ja Java

Käsitepuun katseluun tarvitaan Sunin ilmainen Javaplugin (`http://www.java.com`). Java on asennettava erikseen, vaikka käyttäisit Internet Exploreria, jossa on esiasennettu Microsoftin toimittama Java-tuki. Javan asentaminen tarvitaan myös ristisanatehtävien käyttämiseen (toistaiseksi vain englanninkielisessä versiossa).

Animaatiot ja interaktiiviset kuvat

Jotkin animaatiot vaativat lisäpluginien, kuten Flash, Shockwawe, Java3d ja VRML asentamista. Näiden asentaminen ei ole sanakirjan käytön kannalta välttämätöntä, mutta animaatioita ei voi tietenkään katsella ilman sopivaa ohjelmaa. Näiden pluginien asentaminen sujuu seuraamalla selaimen antamia ohjeita.

Antti Rasila, email: antti.rasila@helsinki.fi



$\sin(18°)$ kolmella tavalla

Jerry Segercrantz
Professori emeritus
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu
`jerry.segercrantz@hut.fi`

Johdanto

Niin sanotut muistikolmiot (kulmat 45°, 45°, 90° tai 30°, 60°, 90°) lienevät tuttuja useimmille lukiolaisille. Niistähän saadaan heti mm. kaavat $\sin(45°) = 1/\sqrt{2}$, $\sin(30°) = 1/2$ ja $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$. Sinin vähennys- ja yhteenlaskukaavojen avulla saadaan helposti lausekkeet myös luvuille $\sin(15°)$ ja $\sin(75°)$:

$$\begin{aligned}
(1)\quad \sin(15°) &= \sin(45° - 30°) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\
(2)\quad \sin(75°) &= \sin(45° + 30°) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Herää kysymys: Onko olemassa muita kokonaisasteisia teräviä kulmia, joiden sinit voidaan esittää ”yksinkertaisina” lausekkeina? Osoittautuu, että tällaisia löytyy. Voidaan esimerkiksi näyttää, että

$$(3)\qquad \sin(18°) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

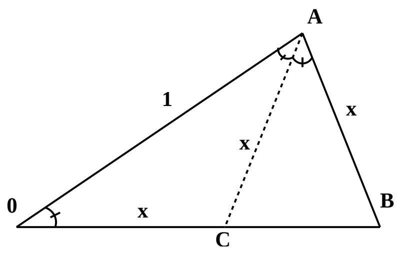
Miten kaava (3) johdetaan? Voidaan valita joko geometrinen tai algebrallinen lähestymistapa.

Geometrinen menetelmä

Geometrinen menetelmä perustuu kuvion 1 tasakylkiseen kolmioon OAB, jossa kulma AOB on 36° ja muut kaksi kulmaa 72°. Kuvioon on lisätty myös kulman BAO puolittaja, joka jakaa kolmion kahteen uuteen tasakylkiseen kolmioon. Oletamme, että sivujen OA ja OB pituus on 1. Sivun AB pituutta on merkitty x:llä. Sivuilla AC ja OC on sama pituus x, kuten helposti nähdään. Kolmio ABC on selvästi yhdenmuotoinen lähtökolmion OAB kanssa, joten

$$\frac{x}{1 - x} = \frac{1}{x}.$$

Ratkaisemalla x:n suhteen saadaan $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Negatiivinen vaihtoehto voidaan tietenkin sulkea pois, joten $x = (\sqrt{5}-1)/2$. Tästä kaava (3) seuraa varsin suoraan tarkastelemalla suorakulmaista kolmiota OMA, missä M on janan AB keskipiste.



KUVA 1.

Lyhyesti kompleksiluvuista

Kaavan (3) algebrallinen johto perustuu kompleksilukujen käyttöön, joten aluksi aivan lyhyesti ja pintapuolisesti muutama sana kompleksiluvuista niille, joille ne ovat outoja ja tuntemattomia. Yleinen kompleksiluku voidaan esittää muodossa $a+bi$, missä a ja b ovat reaalisia ja i on erikoinen kompleksiluku, ns. imaginaariyksikkö, jolle pätee $i^2 = -1$ (myös: $\sqrt{-1} = i$). Havainnollisesti voidaan kuvitella kompleksiluvun $z = a+bi$ vastaavan xy-tason pistettä (a, b). Lukua a kutsutaan z:n *reaaliosaksi*, merkitään $\mathrm{Re}(z)$, ja lukua b puolestaan z:n *imaginaariosaksi*, merkitään $\mathrm{Im}(z)$. Kompleksiluvuilla voidaan tehdä neljä peruslaskutoimitusta $+$, $-$, $\cdot$, $/$, jolloin kaikki tavalliset laskusäännöt ovat voimassa. Aina tarvittaessa on syytä käyttää äsken mainittua kaavaa $i^2 = -1$. Luvun $z = a+bi$ *liittoluku* $\bar{z}$ on luku $a-bi$. Luku $\sqrt{a^2+b^2}$ on z:n pituus $|z|$. Helposti todetaan yhteydet $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ sekä $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$.

Algebrallinen menetelmä

Kompleksiyhtälöllä $z^5 = 1$ eli

(4) $$z^5 - 1 = 0$$

on viisi ratkaisua eli juurta, jotka sijaitsevat tasavälisesti kompleksitason yksikköympyrällä (kts. kuva 2). Tämä seuraa kompleksilukujen juurenoton teoriasta, joka sisältyy kaikkiin kompleksilukujen alkeiden peruskursseihin. Yksi juuri on luonnollisesti 1. Juuret yhtyvät siis erään säännöllisen viisikulmion kärkiin. Olkoon z_1 tason 1. neljänneksessä sijaitseva juuri. Luvun z_1 napakulma (= kulma, jonka ko. kompleksiluku muodostaa positiivisen x-akselin eli reaaliakselin kanssa) on ilmeisesti $72°$. Koska z_1 toteuttaa yhtälön (4) ja

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1),$$

niin voimme päätellä, että

(5) $$z_1^4 + z_1^3 + z_1^2 + z_1 + 1 = 0.$$

Siirrymme nyt yhtälön (5) ratkaisemiseen. Otamme käyttöön apumuuttujan

(6) $$w = z_1 + \frac{1}{z_1},$$

jolle pätee

(7) $$w^2 + w - 1 = 0$$

yhtälön (5) ansiosta. Tarkista!

Toisen asten yhtälöllä (7) on kaksi juurta: $w_1 = (\sqrt{5} - 1)/2$ ja $w_2 = (-\sqrt{5} - 1)/2$. Saatuamme näin w:n esille (tosin kaksikäsitteisenä), voimme laskea z_1:n arvon yhtälöä (6) hyväksi käyttämällä. Neljännen asteen yhtälön (5) ratkaiseminen on näin palautettu kahden peräkkäisen toisen asteen yhtälön ratkaisemiseen. Tutkitaan asiaa hieman lähemmin. Kun käytetään yhtälössä (6) arvoa w_2, saadaan luvulle z_1 arvot

$$\begin{aligned}&\frac{-\sqrt{5}-1}{4} \pm \sqrt{\text{negatiivinen luku}}\\ &\qquad = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} \pm i \cdot (\text{reaaliluku}),\end{aligned}$$

(tarkista!), siis kaksi kompleksilukua, joilla on yhteinen negatiivinen reaaliosa. Tämä ei käy, sillä sopimuksen mukaan z_1 sijaitsee imaginaariakselin oikealla puolella. On siis käytettävä w:n arvoa w_1, mikä antaa

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm \sqrt{\text{negatiivinen luku}}\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i \cdot (\text{reaaliluku}),\end{aligned}$$

Näemme siis, että luvun z_1 reaaliosa $\mathrm{Re}(z_1)$ on $(\sqrt{5}-1)/4$. Toisaalta kuvion 2 perusteella $\mathrm{Re}(z_1) = \cos(72°) = \sin(90° - 72°) = \sin(18°)$. Näin on algebrallinen ratkaisu saatu päätökseen.

Esitämme lopuksi vielä vaihtoehtoisen päättelytavan, joka ei nojaudu melkoista kekseliäisyyttä vaativaan sijoitukseen (6). Yllä sanotusta (kts. kuva 2) voidaan päätellä että polynomin

(8) $$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

nollakohdat ovat z_1, z_1^2, $\bar{z}_1$ ja $\bar{z}_1^2$, joten ko. polynomi voidaan esittää myös muodossa $(z - z_1)(z - z_1^2)(z - \bar{z}_1)(z - \bar{z}_1^2)$ eli

(9) $$\begin{aligned}z^4 &- (z_1 + \bar{z}_1 + z_1^2 + \bar{z}_1^2)z^3\\ &+ (z_1 + \bar{z}_1 + z_1^3 + \bar{z}_1{}^3 + 2)z^2\\ &\qquad + (z_1 + \bar{z}_1 + z_1^2 + \bar{z}_1^2)z + 1\end{aligned}$$

(tässä on käytetty mm. kaavaa $z_1\bar{z}_1 = |z_1|^2 = 1$). Vertaamalla lausekkeiden (9) ja (8) z^3-termien kertoimia todetaan, että $-(z_1 + \bar{z}_1 + z_1^2 + \bar{z}_1^2) = 1$ eli, ottamalla käyttöön lyhennykset $\alpha = \mathrm{Re}(z_1) = (z_1 + \bar{z}_1)/2$ ja $\beta = \mathrm{Re}(z_1^2) = (z_1^2 + \bar{z}_1^2)/2$,

(10) $$2\alpha + 2\beta = -1.$$

Samaan tapaan jatkamalla saadaan z^2-termien kertoimia vertaamalla, että

$$z_1 + \bar{z}_1 + z_1^3 + \bar{z}_1^3 + 2 = 1 \quad \text{eli} \quad z_1 + \bar{z}_1 + z_1^3 + \bar{z}_1^3 = -1.$$

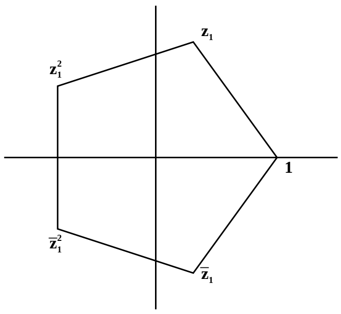
Toisaalta $4\alpha\beta = (z_1 + \bar{z}_1)(z_1^2 + \bar{z}_1^2) = z_1 + \bar{z}_1 + z_1^3 + \bar{z}_1^3$, joten

$$4\alpha\beta = -1. \tag{11}$$

Eliminoimalla β yhtälöistä (10) ja (11) saadaan lopuksi

$$\alpha = \mathrm{Re}(z_1) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Miinusmerkki juuren edessä voidaan jälleen sulkea pois z_1:n sijainnin perusteella.



Kuva 2.

Epilogi

Kulmien 18° ja 15° (kts. johdanto) sineille on edellä saatu juurilausekeet. Kulman $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$ sinin lauseke voidaan nyt helposti löytää sinin vähennyslaskukaavan avulla, kunhan vielä muistetaan tuttu kaava $\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}$. Tulos on

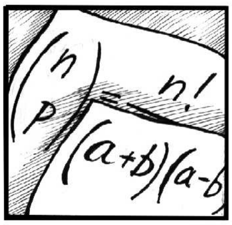
$$\sin(3^\circ) = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16}.$$

Sinin yhteenlaskukaavaa käyttämällä voidaan tämän jälkeen johtaa kaikkien kulman 3° kokonaisten monikertojen sinit: $6^\circ = 3^\circ + 3^\circ$, $9^\circ = 6^\circ + 3^\circ$ jne. Vastaavanlaisten lausekkeiden löytäminen luvuille $\sin(1^\circ)$ ja $\sin(2^\circ)$ ei sen sijaan ole mahdollista.

Kirjallisuutta:

Courant ja Robbins: What is Mathematics?, Oxford University Press, 1978

Stillwell: Elements of Algebra, Springer, 1994.

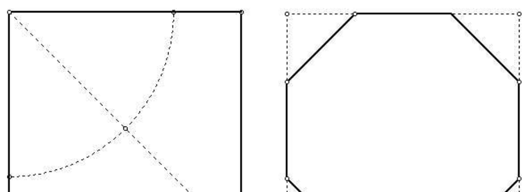


Solmun tehtäviä

Solmun tämänkertaiset neljä tehtävää ovat vaatimustasoltaan peruskoulun yläluokillekin sopivia. Tehtävien ratkaisut julkaistaan Solmun seuraavassa numerossa.

1. Olkoon $S_1 = 1$, $S_2 = 2+3$, $S_3 = 4+5+6, \ldots$. Laske S_{17}.

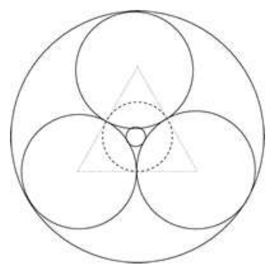
2. Keskiaikaiset kivenhakkaajat käyttivät tätä metodia rakentaessaan tarkkoja kahdeksankulmioita annetun neliön sisälle. Avaa harppisi niin, että sen säde on puolet neliön halkaisijasta. Piirrä ympyrän kaari siten, että sen keskipiste on neliön kulmassa. Merkitse ne kaksi kohtaa, jotka leikkaavat neliön sivut. Tee sama kaikille neliön kulmille, jolloin saat 8 pistettä, jotka ovat kahdeksankulmion kulmia. Onko syntyvä kahdeksankulmio täysin säännöllinen kahdeksankulmio? Todista.



3. Osoita, että jos kolme alkulukua, kaikki suurempia kuin 3, muodostavat aritmeettisen lukujonon, niin jonon peräkkäisten lukujen erotus on jaollinen kuudella. Esitä joitakin esimerkkejä kolmesta alkuluvusta koostuvasta aritmeettisestä lukujonosta, jotka sisältävät luvun kolme, ja näytä, että jokaisessa tapauksessa jonon peräkkäisten lukujen erotus ei ole jaollinen kuudella.

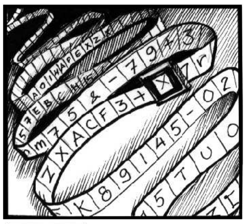
Vihje. Osoita ensin, että peräkkäisten lukujen erotuksen on oltava parillinen, ja sitten, että sen on oltava jaollinen kolmella. Ajattele mahdollisia jakojäännöksiä, kun keskimmäinen luku jaetaan kolmella. Pohdi kahta tapausta.

4. Ota kolme yksikköympyrää, jotka koskettavat toisiaan. Muodosta kolme ympyrää C_1, C_2 ja C_3, joiden säteet ovat r_1, r_2 ja r_3, kuten kuvassa alapuolella. Ympyrät, jotka ovat tangenttina kaikille kolmelle yksikköympyrälle, ovat C_1 ja C_3, joista C_1 on pienempi. Ympyrä, joka menee yksikköympyröiden tangenttien kolmen pisteen läpi, on C_2. Etsi säteet r_1, r_2 ja r_3 ja näytä, että $r_1 r_3 = r_2^2$.



Vihje. Piirrä suorat ympyröiden keskipisteiden läpi. Kirjoita ja ratkaise joitakin yksinkertaisia yhtälöitä, joissa säteet esiintyvät. Muista käyttää tarkkoja arvoja neliöjuurissa (irrationaalilukuja).

Lähde: *NRICH*, University of Cambridge, `http://nrich.maths.org`.



Numeerista matematiikkaa Python-kielellä

Antti Rasila
Tutkija
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Johdanto

Edellisessä Solmun numerossa käsiteltiin yksinkertaisten ohjelmien kirjoittamista Python-kielellä. Tässä osassa on tarkoitus edetä varsinaisiin numeerisen matematiikan ongelmiin ja niihin liittyviin matemaattisiin ohjelmointitehtäviin. Käsiteltävät ongelmat keskittyvät differentiaali- ja integraalilaskennan peruskursseilla esiintyviin yhden muuttujan reaaliarvoisiin funktioihin. Aikomuksena on jatkaa kirjoitusta myöhemmin tässä käsittelemättä jäävistä aiheista, kuten numeerisesta lineaarialgebrasta ja visualisoinnista. Aluksi esitellään muutamia tavallisia menetelmiä funktion nollakohdan etsimiseksi.

Välinpuolitusmenetelmä

Välinpuolitusmenetelmän idea on yksinkertainen ja geometrisestikin ilmeinen. Menetelmä perustuu seuraavaan Bolzanon lauseena tunnettuun tulokseen:

Lause. [Myr, s. 91] Olkoon funktio f suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva ja $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (tai $f(a) > 0$, $f(b) < 0$). Tällöin on olemassa ainakin yksi välin piste z, jossa $f(z) = 0$.

Lähtökohtana siis on annettu väli $[a, b]$, $a < b$ ja jatkuva funktio f, jonka nollakohtaa etsitään ja jolla on erimerkkiset arvot välin päätepisteissä. Tutkitaan nyt pistettä $c = (a+b)/2$. Saadaan joko $f(c) < 0$, $f(c) > 0$ tai $f(c) = 0$. Viimeisessä tapauksessa nollakohta[1] on löytynyt ja voidaan lopettaa. Koska f:llä on annetun välin päätepisteissä erimerkkiset arvot joko $f(a)$ tai $f(b)$ on erimerkkinen $f(c)$:n kanssa. Saadaan siis, että joko väli $[a, c]$ tai $[c, b]$ toteuttaa Bolzanon lauseen ehdot funktiolle f; sovelletaan samaa menettelyä tähän. Koska annettu funktio f on jatkuva, päästään toistamalla mielivaltaisen lähelle funktion oikeaa nollakohtaa.

```
# Valinpuolitusmenetelma
from math import *
import sys
# funktio, jota tarkastellaan
def fun(x): return cos(x)-2*x
n=20                    # puolitusten lkm
a,b=-8.0,10.0           # aloituspisteet
# tarkastetaan funktion arvojen etumerkit
```

[1] Koska liukulukua ei pidä verrata suoraan nollaan, yhtälö $f(c) = 0$ on tulkittava epäyhtälöksi `abs(f(c))<eps`, missä `eps` riippuu koneen laskentatarkkuudesta.

```
if (fun(a)<0) & (fun(b)>0): m=1.0
elif (fun(a)>0) & (fun(b)<0): m=-1.0
else: sys.exit(1)    # virhe, poistutaan
print "askel     piste        funktion arvo"
for i in range(n):
        c=(a+b)/2
        if m*fun(c)<=0: a=c
        else: b=c
        print "%4d%14.6f%14.6f"%(i,c,fun(c))
```

Tuloste:

```
askel     piste         funktion arvo
   0       1.000000     -1.459698
   1      -3.500000      6.063543
   2      -1.250000      2.815322
   3      -0.125000      1.242198
   4       0.437500      0.030814
   5       0.718750     -0.684871
   6       0.578125     -0.318761
...
  16       0.450272     -0.000214
  17       0.450203     -0.000047
  18       0.450169      0.000037
  19       0.450186     -0.000005
```

Kiintopisteiteraatio

Tarkastellaan funktiota $F(x) = x - f(x)$. Yhtälön $f(x) = 0$ ratkaiseminen voidaan tulkita F:n avulla yhtälön $F(x) = x$ ratkaisemiseksi. Tämän yhtälön ratkaisuja kutsutaan funktion F kiintopisteiksi.

Aloitetaan jostakin välin $[a, b]$ pisteestä x_0. Määritellään nyt funktion F iterointien jono $x_0, x_1, \ldots$ kaavalla $x_{i+1} = F(x_i)$. Tunnetusta Banachin kiintopistelauseesta (todistettu esim. [MNV, s. 169]) seuraa, että tämä jono suppenee kohden funktion kiintopistettä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. $F([a, b]) \subset [a, b]$,
2. $|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|$ jollakin $L < 1$ kaikille $x, y \in [a, b]$.

Käsiteltävissä esimerkeissä iteraation suppenemista voi tutkia valitsemalla $L = \max\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$.

```
# Kiintopisteiteraatio
from math import *
from whrandom import *
# funktio
def fun(x): return cos(x)
# iteroitava funktio
def iterf(x): return x-fun(x)
# aloituspiste
x=20.0*random()
n=10  # iterointien lkm
print "askel  piste    funktion arvo"
for i in range(n):
        x=iterf(x)
        print "%4d%10.6g%14.6g"%(i,x,fun(x))
```

Tuloste:

```
askel  piste    funktion arvo
   0   10.6745     -0.315614
   1   10.9901    -0.00548963
   2   10.9956    -2.7573e-08
   3   10.9956  -4.28612e-16
   4   10.9956  -4.28612e-16
   5   10.9956  -4.28612e-16
   6   10.9956  -4.28612e-16
   7   10.9956  -4.28612e-16
   8   10.9956  -4.28612e-16
   9   10.9956  -4.28612e-16
```

Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä, jota myös kutsutaan Newtonin ja Raphsonin menetelmäksi, on tunnetuimpia menetelmiä yhden reaalimuuttujan yhtälön juuren löytämiseksi. Menetelmässä tarvitaan tietoa sekä funktiosta $f(x)$ että sen derivaatasta $f'(x)$.

Menetelmän ideana on, että funktiota approksimoidaan sen tangentilla pisteessä x_i, ja etsitään piste, jossa tangenttisuora leikkaa x-akselin. Tämän pisteen x-koordinaatti valitaan seuraavaksi tarkastelupisteeksi x_{i+1}. Iteraatio perustuu funktion f Taylorin sarjaan, joka antaa seuraavaan yhtälön pisteen x ympäristössä:

$$f(x + \delta) \approx f(x) + f'(x)\delta + \frac{f''(x)}{2}\delta^2 + \ldots$$

Riittävän pienillä δ:n arvoilla, tämä johtaa seuraavaan approksimaatiokaavaan yhtälön $f(x + \delta) = 0$ ratkaisulle:

$$\delta \approx -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Soveltamalla kaavaa toistuvasti saadaan parempia approksimaatioita ratkaisulle. Menetelmän ongelmana on, että jos iteraatio osuu funktion derivaatan nollakohtaan (lokaali maksimi tai minimi), iteraatioaskelta ei voida ottaa. Geometrisesti tämä tarkoittaa, että funktion tangentti tarkasteltavassa pisteessä ei leikkaa x-akselia. Tämän ongelman ratkaisemiseen on olemassa menetelmiä, joita ei kuitenkaan käsitellä tässä.

```
# Newtonin menetelma
from whrandom import *
from math import *
import sys
# funktio
def fun(x): return cos(x)-2.0*x
# derivaatta
def deriv(x): return -sin(x)-2.0
n=8        # askelten lkm
```

```
x=10.0*(random()-0.5) # aloituspiste
print "askel    piste    funktion arvo"
for i in range(n):
        if abs(deriv(x))<1e-8: sys.exit(1)
        x=x-fun(x)/deriv(x)
        print "%4d%12.5g%14.5g"%(i,x,fun(x))
```

Tuloste:

```
askel    piste    funktion arvo
   0     -1.5681         3.1389
   1      1.5708        -3.1416
   2      0.5236       -0.18117
   3     0.45113     -0.0023048
   4     0.45018    -4.0287e-07
   5     0.45018    -1.2212e-14
   6     0.45018    -1.1102e-16
   7     0.45018              0
```

Numeerinen derivaatta

Edellä käsitellyn Newtonin menetelmän heikkous on, että menetelmän soveltamiseen vaaditaan tietoa kulloinkin käsiteltävän funktion derivaatasta. Tämä ei ole ongelma, jos funktio on annettu helposti käsiteltävällä kaavalla. Saattaa kuitenkin olla, että ratkaistavassa ongelmassa esiintyvä funktio on sellainen, että sillä ei ole mitään varsinaista kaavaa, vaan tietoa on ainoastaan funktion saamista arvoista. Tällaisen ongelman ratkaisuun voidaan soveltaa numeerista derivointia. Numeerisen derivoinnin käyttäminen helpottaa myös ohjelmoijan työtä, koska derivaattaa ei tarvitse laskea symbolisesti ja uudelleenkirjoitettavaa koodia on siten vähemmän.

Tarkastelemalla suoraan erotusosamäärää pienillä h:n arvoilla saadaan seuraava karkea esitys numeeriselle derivaatalle pisteessä x_0.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

missä h on jokin pieni luku, esim. $h = 10^{-8}$. Parempaan tarkkuuteen päästään esimerkiksi viiden pisteen approksimaatiokaavalla [AS, 25.3.6], jota ei kuitenkaan esitellä tässä[2].

```
# Numeerinen derivointi: numder.py
# yksinkertainen toteutus
from math import *
# funktion f derivaatta pisteessa x
def numdf(f,x):
        dx = 1e-8     # pieni luku
        return (f(x+dx)-f(x))/dx
```

Testiohjelma:

```
# Numeerinen derivointi: testiohjelma
from math import *
from numder import *
# funktio
def f(x): return sin(x)
# symbolisesti laskettu derivaatta
def dfunc(x): return cos(x)
# paaohjelma alkaa
print "piste derivaatta  num.deriv.   virhe"
for j in range(10):
        x=0.1*j
        print "%4.1f%10.6f%12.6f%14.6e"%\
         (x,numdf(f,x),dfunc(x),numdf(f,x)-dfunc(x))
```

Tuloste:

```
piste derivaatta  num.deriv.   virhe
 0.0  1.000000    1.000000  0.000000e+00
 0.1  0.995004    0.995004 -1.061836e-10
 0.2  0.980067    0.980067  5.238188e-11
 0.3  0.955336    0.955336 -1.429860e-09
 0.4  0.921061    0.921061 -5.412757e-09
 0.5  0.877583    0.877583  2.850324e-10
 0.6  0.825336    0.825336 -3.944140e-09
 0.7  0.764842    0.764842  2.297794e-09
 0.8  0.696707    0.696707  5.195307e-09
 0.9  0.621610    0.621610 -4.768086e-09
```

Seuraava ohjelma käyttää numeerista derivointia yhtälön juuren hakuun Newtonin menetelmällä.

```
# Newtonin menetelma numeerisella
# derivoinnilla
from whrandom import *
from math import *
from numder import *
import sys
# funktio
def fun(x): return cos(x)-2.0*x
n=8        # askelten lkm
x=10.0*(random()-0.5) # aloituspiste
print "askel    piste    funktion arvo"
for i in range(n):
        if abs(numdf(fun,x)<1e-8: sys.exit(1)
        x=x-fun(x)/numdf(fun,x)
        print "%4d%12.5g%14.5g"%(i,x,fun(x))
```

Tuloste:

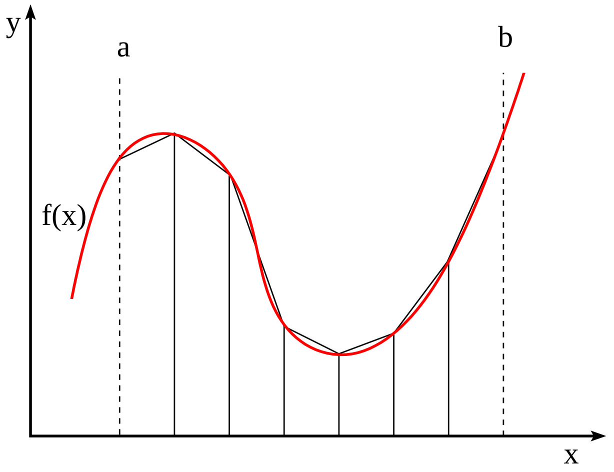
```
askel    piste    funktion arvo
   0      1.4697        -2.8384
   1     0.52193       -0.17699
   2     0.45109     -0.0022036
   3     0.45018    -3.6831e-07
   4     0.45018    -1.0658e-14
   5     0.45018              0
   6     0.45018              0
   7     0.45018              0
```

[2] Viiden pisteen kaavan toteutus on annettu www-sivulta löytyvässä esimerkkiohjelmassa, jonka nimi on `numder2.py`.

Numeerinen integrointi

Derivaatan tapaan myös funktion määrätty integraali jollakin välillä $[a, b]$ voidaan laskea numeerisesti. Tähän on käytettävissä useita menetelmiä, joista tässä esiteltävä on kaikkein yksinkertaisin.

Ajatus on, että väli $[a, b]$ jaetaan n:ään (yleensä, mutta ei välttämättä yhtäpitkään) väliin. Funktion paloittain lineaarinen approksimointi erikseen kullakin näistä väleistä johtaa integraalille esitykseen summana puolisuunnikkaan muotoisten alueiden pinta-aloista.



Kaavana tämä voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i)/2,$$

missä $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ ovat jakopisteet välille $[a, b]$, $x_1 = a$, $x_n = b$ ja $y_i = f(x_i)$. Tämän kaavan, jota kutsutaan puolisuunnikaskaavaksi, antaman arvon voi helposti laskea ohjelmalla.

```
# Numeerinen integrointi
from math import *
# integroitava funktio
def fun(x): return sin(x)
# integrointivali
a,b=0.0,pi
n=1000          # jakopisteiden lkm
h=(b-a)/(n-1.0) # jakovalin pituus
s=0.0
for k in range(n-1):
        s=s+fun(a+(k+1)*h)+fun(a+k*h)
s=s*h/2.0
tarkka=cos(a)-cos(b)
print "tarkka         numeerinen       virhe"
print "%12.6e%14.6e%14.6e"%(tarkka,s,abs(s-tarkka))
```

Tuloste:

```
tarkka         numeerinen       virhe
2.000000e+00  1.999998e+00  1.648229e-06
```

Linkkejä

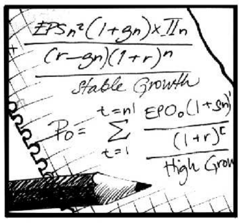
- Pythonin kotisivu
  `http://www.python.org/`
- Antti Laaksonen: Johdatus Python-ohjelmointiin
  `http://www.ohjelmointiputka.net/opas.php?tunnus=python`
- Beginner's Guide to Python
  `http://www.python.org/topics/learn/`
- Python Tutorial by Guido van Rossum
  `http://docs.python.org/tut/tut.html`
- Python ja tieteellinen laskenta (erilaisia laajennuksia Python-kieleen)
  `http://www.python.org/topics/scicomp/`
- Python-kielestä ohjelmoinnin kouluopetuksessa
  `http://www.seapig.org/PythonInSchools`
- Toinen artikkeli samasta aiheesta
  `http://www.4dsolutions.net/ocn/overcome.html`
- Sivusto ohjelmoinnin kouluopetuksesta tytöille. (sivustolla keskitytään pääasiassa pedagokiikkaan, mutta käytettävä opetuskieli on Python)
  `http://www.seapig.org/GirlProgrammers`
- Python in the Mathematics Curriculum by Kirby Urner (artikkeli Python-kielen käytöstä matematiikan opetuksessa)
  `http://www.python.org/pycon/dc2004/papers/15/`

Viitteet

[AS] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, New York, Dover, 1965. Tämä kirja on saatavissa myös verkosta: `http://jove.prohosting.com/~skripty/`

[Myr] Lauri Myrberg: *Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1*, Helsinki, Kirjayhtymä, 1977.

[MNV] Matti Mäkelä, Olavi Nevanlinna, Juhani Virkkunen: *Numeerinen matematiikka*, Helsinki, Gaudeamus, 1982.



Sattuman matematiikkaa III

Kolmogorovin aksioomat ja frekvenssitulkinta

Tommi Sottinen
Tutkija
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université de Paris VI

Solmun numerossa 2/2002 aloitettiin todennäköisyyslaskentaa käsittelevä kirjoitussarja. Osassa I käsiteltiin todennäköisyyslaskennan historiaa ja muutamia todennäköisyyden tulkintoja: klassista, frekventististä ja geometrista. Osassa II (Solmu 1/2003) esitettiin modernin todennäköisyyslaskennan perusta: Kolmogorovin [2] aksioomat.

Tässä kirjoitussarjan kolmannessa osassa emme mene tarinassa eteenpäin vaan syvemmälle. Osoitamme, että Kolmogovin aksioomat ovat siinä mielessä sopiva matemaattinen malli todennäköisyyslaskennalle, että frekvenssitulkinta voidaan johtaa niistä. (On itsestään selvää, että klassinen ja geometrinen tulkinta seuraavat Kolmogorovin aksioomista.)

Kolmogorovin aksioomat

Kertaamme lyhyesti kirjoitussarjan osassa II esitetyt aksioomat, eli kolmikon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Ω on *perusjoukko*, josta kohtalon jumalatar, Lady Fortuna, valitsee satunnaiskokeen tuloksen ω.

$\mathcal{F}$ on kokoelma Ω:n osajoukkoja, joka on suljettu numeroituvan monien joukko-operaatioiden suhteen (siis $\mathcal{F}$ on σ-algebra, ks. osa II). Kutsumme $\mathcal{F}$:n jäseniä *tapahtumiksi*. Välttämättä kaikki Ω:n osajoukot eivät siis ole tapahtumia. Syy tähän valitettavaan seikkaan löytyy mittateorian syvistä vesistä. Emme käsittele tätä aihetta enempää. Lukija voi lohduttautua sillä, että käytännössä on vaikeaa keksiä osajoukkoa, joka ei ole tapahtuma.

$\mathbf{P}$ on *todennäköisyys*, siis kuvaus tapahtumajoukolta $\mathcal{F}$ reaalilukujoukolle $\mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdot

(TN_1) $\mathbf{P}(A) \geq 0$ kaikilla tapahtumilla A,

(TN_2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

(TN_3) jos $A_1, A_2, \ldots$ ovat tapahtumia, joista korkeintaan yksi voi sattua kerrallaan, niin

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)\,.$$

Kohdat (TN_1) ja (TN_2) ovat luonnollisia. Kohta (TN_3), *täysadditiivisuus*, on vähemmän viaton. Siitä seuraa esimerkiksi, ettemme voi valita luonnollista lukua umpimähkään (siis siten, että jokaisella luvulla on yhtä suuri todennäköisyys tulla valituksi). Jokainen varmasti hyväksyy, että todennäköisyys on *additiivinen*:

(TN$_3'$) jos tapahtumat A_1 ja A_2 eivät voi molemmat sattua samalla kertaa, niin

$$\mathbf{P}\big(A_1 \cup A_2\big) \;=\; \mathbf{P}\big(A_1\big) + \mathbf{P}\big(A_2\big).$$

Jos lisäksi hyväksymme, että todennäköisyys on *jatkuva*:

(TN$_3''$) jos tapahtumien jono $A_1, A_2, \ldots$ on laskeva, toisin sanoen $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, niin

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(A_n\big),$$

niin joudumme hyväksymään täysadditiivisuuden. Nimittäin (TN$_3'$) yhdessä (TN$_3''$):n kanssa on yhtäpitävä (TN$_3$):n kanssa. Emme perustele tätä tässä, vaikkakaan perustelu ei ole erityisen hankala. Joka tapauksessa additiivisuus täydessä muodossaan on välttämätön frekvenssitulkinnan kannalta.

Huomautamme lopuksi, että täysadditiivisuudesta seuraa, että olivatpa joukot $A_1, A_2, \ldots$ erillisiä tai eivät, niin joka tapauksessa

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \;\le\; \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)\,. \tag{1}$$

Epäyhtälön (1) oikealla puolella on liikaa joukkojen $A_1, A_2, \ldots$ mahdolliset päällekkäisyydet. Kahden joukon tapauksessa tämä päällekkäisyys on helppo nähdä:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2)\\ &\le \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2).\end{aligned}$$

Toistokoe: riippumattomien toistojen satunnaiskoe

Frekvenssitulkinnassa on kyse *toistokokeesta*, eli yhdestä ja samasta satunnaiskokeesta, jota toistetaan loputtomasti. Tällöin Ω:n alkiot ovat jonoja

$$\omega \;=\; (\omega_1, \omega_2, \ldots)\,.$$

Tässä ω_i on se alkio, jonka Lady Fortuna valitsee toistossa i. Lisäksi toistot ovat *riippumatomia*: jos A ja B ovat tapahtumia, jotka määräytyvät erillisten toistokertojen perusteella, niin

$$\mathbf{P}\big(A \cap B\big) \;= \mathbf{P}\big(A\big)\mathbf{P}\big(B\big).$$

Toistokokeella ei siis ole muistia: aikaisemmat tapahtumat eivät vaikuta tulevien tapahtumien todennäköisyyksiin.

Tyypillinen esimerkki toistokokeesta on kolikon heitto. Jos kolikko on joka heitolla samanlainen, se ei siis esimerkiksi kulu heitossa, niin toistot ovat riippumattomia.

Olkoon nyt A jokin yksittäiseen satunnaiskokeeseen liittyvä tapahtuma. Esimerkiksi kolikon heitossa se voisi olla ”kolikko laskeutuu klaavapuoli ylöspäin”. Koska kyse on toistokokeesta, merkitsemme

$$A_i \;=\; \{A \text{ sattuu toistossa } i\}\,.$$

Tapahtuma A_i riippuu ω:sta vain koordinaatin ω_i kautta. Siten A_i:t ovat riippumattomia.

Frekvenssitulkinta ja binomimuuttuja

Olkoon n luonnollinen luku. Tapahtuman A *frekvenssi*

$$\begin{aligned}F_n[A] &= \#\big\{i\,:\,A_i, i \le n\big\}\\ &= \big\{\text{niiden } i \le n \text{ lukumäärä, joilla } A_i\big\}\\ &= \big\{\text{niiden toistojen } i \le n \text{ lukumäärä,}\\ &\qquad \text{joilla } A_i \text{ sattuu}\big\}\end{aligned}$$

ja sen *suhteellinen frekvenssi*

$$f_n[A] \;=\; \frac{F_n[A]}{n}.$$

Jos $f_n[A]$ suppenee jossakin mielessä kohti jotain lukua p, niin tällöin *tulkitsemme*, että $p = \mathbf{P}(A)$.

Koska tapahtuma A on jatkossa aina sama, niin kirjoitamme lyhyesti $F_n = F_n[A]$ ja $f_n = f_n[A]$.

Käsittelemme nyt hieman suppenemista

$$f_n \;\to\; p. \tag{2}$$

Ongelma tämän suppenemisen ymmärtämisessä on se, että f_n ei ole mikään kiinteä luku. Se on *satunnaismuuttuja*, eli funktio perusjoukolta Ω reaaliluvuille $\mathbb{R}$.

Kiinnittämällä $\omega \in \Omega$ voimme tarkastella tavallista reaalilukujonojen suppenemista ja yrittää osoittaa esimerkiksi, että

$$f_n(\omega) \;\to\; p \qquad \text{kaikilla } \omega \in \Omega.$$

Tämä siis vastaa funktioiden pisteittäistä suppenemista. Emme kuitenkaan voi toivoa mitään näin hienoa tulosta. Tämän näemme tarkastelemalla kolikon heittoa. Olkoon A_i tapahtuma ”i:nnellä heitolla tulee klaava”. Jos $\omega = (\text{klaava}, \text{klaava}, \ldots)$, niin $f_n(\omega) = 1$. Toisaalta jos $\omega = (\text{kruuna}, \text{kruuna}, \ldots)$, niin $f_n(\omega) = 0$.

Määrittelemme suppenemisen (2) seuraavassa osiossa kahdella eri tavalla. Sitä ennen käsittelemme satunnaismuuttujia F_n ja f_n.

Oletamme nyt, että tapahtumilla A_i on todennäköisyys Kolmogorovin aksiomaattisessa mielessä. Merkitsemme $p = \mathbf{P}(A_i)$. Tässä $\mathbf{P}$ on todennäköisyys jonoavaruudessa Ω, vaikkakin itse tapahtuma liittyy vain yksittäiseen toistoon i. Tällöin F_n siis laskee ”onnistuneiden” tapahtumien lukumäärän n:n toiston sarjassa, kun yksittäisen ”onnistumisen” todennäköisyys on p. Satunnaismuuttuja F_n saa siis jonkin arvon joukosta $\{0, 1, \ldots, n\}$. Etsimme nyt satunnaismuuttujan F_n *jakauman*, toisin sanoen kuvauksen

$$k \;\mapsto\; \mathbf{P}\big(F_n = k\big).$$

Tarkastelkaamme tapahtumaa $\{F_n = k\}$. Tällöin siis A on sattunut k kertaa ja jäänyt sattumatta $n - k$ kertaa. Näin voi käydä mm. silloin, kun A sattuu aluksi k kertaa ”putkeen”, eli tapahtumat A_1, A_2, …, A_k sattuvat, ja tämän jälkeen ei A enää satu, eli tapahtumat A^c_{k+1}, A^c_{k+2}, …, A^c_n sattuvat. Koska $\mathbf{P}(A_i) = p$, niin $\mathbf{P}(A^c_i) = 1-p$. Siten juuri kuvatun tapahtuman todennäköisyys on riippumattomuuden nojalla

$$p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \tag{3}$$

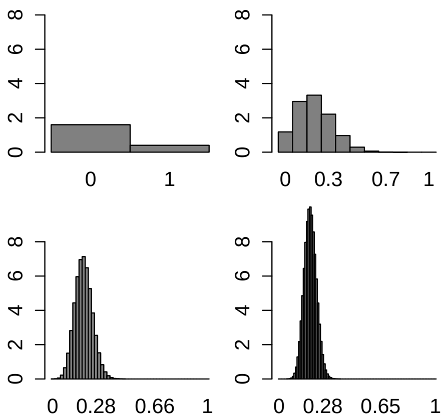
Yleisesti ottaen ”onnistumisien” A_i ei tarvitse tapahtua aluksi ”putkeen”, vaan ne voivat tapahtua missä tahansa kohtaa n:ssä toistossa. Kuitenkin jokaisen yksittäisen n toiston tapahtuman, jossa on k kappaletta ”onnistumisia”, todennäköisyys on (3). Näitä yksittäisiä tapahtumia on, kuten kirjoitussarjan osassa I todettiin,

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

eri kappaletta. Siten, aksiooman (TN_3) nojalla,

$$\mathbf{P}(F_n = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Sanomme, että F_n on *binomijakautunut* parametrein n ja p, ja käytämme merkintää $F_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.



Kuva 1. Satunnaismuuttujan $f_n = F_n/n$ jakauma, kun $p = 0{,}2$ ja $n = 1, 10, 50, 100$.

Suurten lukujen lait

Tarkastelemme, missä mielessä raja-arvo (2), ja siten frekvenssitulkinta, voidaan ymmärtää. Jo aikaisemmin huomasimme, että funktioiden pisteittäinen suppeneminen on liian vahva käsite tässä yhteydessä.

Heikon suurten lukujen lain tapauksessa ymmärrämme suppenemisen $f_n \to p$ niin, että

$$\mathbf{P}\big(|f_n - p| \geq \varepsilon\big) \;\to\; 0 \tag{4}$$

millä tahansa luvulla $\varepsilon > 0$. Suppeneminen kaavassa (4) tarkoittaa tietysti tavallista reaalilukujonon suppenemista. Heikko suurten lukujen laki tarkoittaa siis sitä, että *todennäköisyys sille, että f_n poikkeaa luvusta p menee kohti nollaa, kun n kasvaa.* Sanomme myös, että f_n suppenee kohti lukua p *stokastisesti.*

Vahva suurten lukujen laki on lähellä funktioiden pisteittäistä suppenemista: ymmärrämme suppenemisen $f_n \to p$ niin, että

$$\mathbf{P}(f_n \to p) \;=\; \mathbf{P}\big(\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \to p\}\big) \;=\; 1. \tag{5}$$

Kyse on siis siitä, että *funktiot f_n suppenevat pisteittäin kohti lukua p paitsi ehkä jossakin poikkeuksellisessa pistejoukossa, jonka todennäköisyys on nolla.* Tällöin sanomme myös, että f_n suppenee kohti lukua p *melkein varmasti.*

Ensimmäisen version suurten lukujen laeista todisti Jakob Bernoulli [1]. Hänen kunniakseen satunnaiskoetta, jossa on kaksi tulosmahdolisuutta, kutsutaan *Bernoulli-kokeeksi* ja siten $\mathrm{Bin}(1, p)$-jakautuneesta satunnaismuuttujasta käytetään myös nimitystä *Bernoulli-muuttuja.*

Mainittokoon vielä, että kirjoittajan mielestä nimitys ”suurten lukujen laki” ei ole erityisen onnistunut. Parempi nimitys olisi ”loputtomien toistojen laki”. Onneton nimitys lienee Siméon Poisson’n peruja.

Suurten lukujen lakien perustelu

Tämä on kirjoituksen tekninen osio, sen matemaattinen pihvi. Todennäköisyyslaskennan teoriasta vähemmän kiinnostunut lukija halunnee siirtyä suoraan osioon ”Varoituksen sanoja”.

Heikko tapaus

Tehtävänämme on löytää sellainen yläraja

$$r(n, \varepsilon) \;\geq\; \mathbf{P}\big(|f_n - p| \geq \varepsilon\big)\,, \tag{6}$$

että $r(n,\varepsilon) \to 0$ kaikilla positiivisilla ε. Tämä ei itse asiassa ole erityisen vaikeaa. Ennakoimme kuitenkin vahvan tapauksen ja etsimme sellaisen ylärajan, joka suppenee riittävän nopeasti. Tämä on jo hieman hankalaa. Käytämme luennoissa [3] esitettyä tekniikkaa.

Tarkastelemme aluksi tapahtumassa

$$\big\{|f_n - p| \geq \varepsilon\big\} \;=\; \big\{|F_n - np| \geq n\varepsilon\big\}$$

itseisarvon positiivista puolta. Olkoon $r \geq 1$ ja $a \in (p, \varepsilon + p]$ sellainen luku, että $an \in \mathbb{N}$ (tällainen luku löytyy, kunhan n on riittävän iso). Koska F_n on $\mathrm{Bin}(n,p)$-jakautunut, niin

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(F_n \geq (\varepsilon+p)n\big) \\
&\quad\leq\; \mathbf{P}\big(F_n \geq an\big) \\
&\quad=\; \sum_{k=an}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&\quad=\; \frac{1}{r^{an}} \sum_{k=an}^{n} \binom{n}{k} r^m p^k (1-p)^{n-k} \\
&\quad\leq\; \frac{1}{r^{an}} \sum_{k=an}^{n} \binom{n}{k} (rp)^k (1-p)^{n-k} \\
&\quad\leq\; \frac{1}{r^{an}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (rp)^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Binomiteoreeman, siis sen joka kertoo miten sulut avataan, nojalla

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (rp)^k (1-p)^{n-k} \;=\; \big(rp + (1-p)\big)^n.$$

Siten

$$\text{(7)} \qquad \mathbf{P}\big(F_n \geq an\big) \;\leq\; \frac{1}{r^{an}} \big(rp - (1-p)\big)^n.$$

Epäyhtälön (7) vasen puoli ei riipu parametrin $r \geq 1$ valinnasta. Etsimme siten optimaalisen arvon r:lle. Optimikohta löytyy tavalliseen tapaan derivoimalla. Jätämme nämä työläät, mutta suoraviivaiset yksityiskohdat lukijalle. Toteamme vain, että minimikohta on

$$r_{\min} \;=\; \frac{1-p}{p} \cdot \frac{a}{1-a} \;>\; 1.$$

Sijoittamalla $r_{\min}$:n kaavaan (7) saamme ylärajan

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(f_n - p \geq \varepsilon\big) &\;\leq\; C_{a,p}\,(r_{\min})^{-an} \\
&\;=\; g_+(n,\varepsilon).
\end{aligned}$$

Tässä on tärkeää, että yläraja $g_+(n,\varepsilon)$ suppenee kohti nollaa eksponentiaalista vauhtia.

Tarkastelemme nyt itseisarvon negatiivista puolta. Vaihtamalla onnistumiset epäonnistumisiksi huomaamme, että satunnaismuuttuja $n - F_n$ on binomijakautunut parametrein n ja $1-p$. Koska

$$\{-F_n \geq na\} \;=\; \{n - F_n \geq (1-a)n\},$$

niin voimme päätellä, kuten edellä, että

$$\mathbf{P}\big(f_n - p \leq -\varepsilon\big) \;\leq\; g_-(n,\varepsilon),$$

missä $g_-(n,\varepsilon)$ suppenee nollaan eksponentiaalista vauhtia.

Yhdistämällä saadut ylärajat olemme todistaneet heikon suurten lukujen lain. Voimme nimittäin valita ylärajaksi (6)

$$g(r,\varepsilon) \;=\; g_+(r,\varepsilon) + g_-(r,\varepsilon).$$

Vahva tapaus

Käytämme eksponentiaalista ylärajaa (6) ja seuraavaa tulosta.

Borel–Cantellin lemma. *Olkoot $A_1, A_2, \ldots$ sellaisia tapahtumia, että sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

suppenee. Tällöin A_n sattuu, melkein varmasti, vain äärellisen monella indeksillä n. Toisin sanoen

$$\mathbf{P}\big(A_n \text{ äärettömän usein}\big) \;=\; 0.$$

Tässä $\{A_n \text{ äärettömän usein}\}$ on niiden $\omega \in \Omega$ joukko, joilla $\omega \in A_n$ äärettömän usealla ideksillä n.

Perustelemme nyt Borel–Cantellin lemman. Merkitsemme aluksi

$$B_n \;=\; \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

Toisin sanoen $B_n = \{A_i \text{ jollakin } i \geq n\}$. Siten

$$\big\{A_n \text{ äärettömän usein}\big\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Joukot B_n ovat laskevia: $B_{n+1} \subset B_n$. Siten todennäköisyyden jatkuvuudesta (aksiooma (TN_3'')) seuraa, että

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

Toisaalta epäyhtälöstä (1) seuraa, että

$$\mathbf{P}(B_n) \;\leq\; \sum_{i=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Lemman väite seuraa kokoamalla yllä luettelemamme (epä)yhtälöt:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(A_n \text{ äärettömän usein}\big) \\
&= \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vahva suurten lukujen laki seuraa nyt suoraan Borel–Cantellin lemmasta. Nimittäin, jos

$$A_{n,k} \;=\; \big\{ |f_n - p| \;\ge\; \tfrac{1}{k} \big\},$$

niin $f_n \not\to p$ tarkoittaa, että $A_{n,k}$ sattuu jollakin $k \in \mathbb{N}$ äärettömän usein. Siis

$$\{f_n \not\to p\} \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{ A_{n,k} \text{ äärettömän usein} \Big\}.$$

Toisaalta ylärajan (6) nojalla $\mathbf{P}(A_{n,k}) \;\le\; g\big(n, \frac{1}{k}\big)$, missä $\big(g(n,1/k)\big)_{n=1}^{\infty}$ suppenee sarjana. Siten, Borel–Cantellin lemman nojalla,

$$\mathbf{P}(A_{n,k} \text{ äärettömän usein}) = 0.$$

Lopulta väite seuraa epäyhtälöstä (1):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(f_n \not\to p) &= \mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \big\{A_{n,k} \text{ äärettömän usein}\big\}\Big) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_{n,k} \text{ äärettömän usein}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vahva suurten lukujen laki seurasi siis siitä, että kaikilla $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(|f_n - p| \ge \varepsilon\big) \;<\; \infty. \tag{8}$$

Satunnaismuuttujajono, joka toteuttaa ehdon (8), suppenee kohti lukua p *nopeasti.* Esitettyjen kolmen suppenemisen välinen suhde on:

$$\begin{gathered}
\text{nopea} \\
\Downarrow \\
\text{melkein varma} \\
\Downarrow \\
\text{stokastinen.}
\end{gathered}$$

Nämä implikaatiot ovat siinä mielessä aitoja, ettei niitä voida kääntää.

Varoituksen sanoja

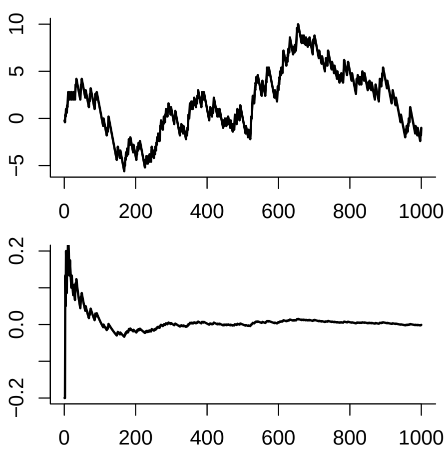
Frekvensitulkinnan mukaan *suhteellinen erotus*

$$|f_n - p| \;=\; \frac{|F_n - np|}{n}$$

suppenee kohti nollaa, kun n kasvaa. Absoluuttisen *erotuksen* tapauksessa kuitenkin

$$|F_n - np| \;\to\; \infty,$$

vieläpä niin että $F_n - np$ saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja. Todennäköisyys ei siis ole mikään kuminauha, jonka kohtalo pakottaa kohti keskiarvoa. Se ei vastaa näkemystä ”kosmisesta oikeudenmukaisuudesta”, jonka mukaan onnistumisien jälkeen on seurattava epäonnistumisia ja että jokainen on keskimäärin yhtä hyvä. Kohtalo voi toki muistaa aikaisemmat epäonnistumiset, mutta satunnainen riippumaton toistokoe ei niitä muista.



Kuva 2. Simuloidut polut $F_n - np$ ja $f_n - p$, kun $p = 0{,}2$ ja $n = 1, \ldots, 1000$.

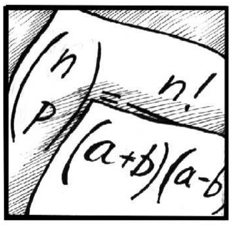
Jos siis pelaat rulettia ja olet havainnut 9 punaista ja 1 mustan, niin ei kannata ruveta pelaamaan mustaa sen takia, että ”pitäähän niitä mustiakin tulla, kun on tullut niin paljon punaisia”. Itse asiassa nyt kannattaa pelata punaista! Syyn tähän kerromme seuraavissa kirjoituksissa.

Viitteet

[1] Bernoulli, Jakob: *Ars Conjectandi,* Basel, 1713.

[2] Kolmogorov, Andrei Nikolaevitš: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Berlin, 1933.

[3] Nummelin, Esa: *Todennäköisyysteoria,* Luennot, Helsingin yliopisto, Matematiikan laitos, 2003.



Saippuakalvoista

Pekka Alestalo
Opettava tutkija
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Solmun numerossa 3/2003 kirjoitin ketjukäyrästä eli katenaarista, joka esittää päistään kiinnitetyn narun muotoa. Ketjukäyrän yhtälöksi saatiin

$$y = f(x) = \frac{1}{a}\cosh(a(x - x_0)) + C,$$

missä vakiot a, x_0 ja C riippuvat tilanteen geometriasta ja hyperbolinen kosini määritellään kaavalla

$$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}).$$

Kirjoituksen alkuosassa päädyttiin tulokseen, jonka mukaan katenaarin muoto määräytyy siitä funktiosta $f(x)$, joka annetuilla ehdoilla minimoi lausekkeen

$$J[f] = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Tässä x_1 ja x_2 ovat kiinnityspisteiden x-koordinaatit.

Toisaalta yllä oleva lauseke muistuttaa myös sellaisen pyörähdyskappaleen pinta-alaa, joka syntyy, kun käyrä $y = f(x)$, $x_1 \le x \le x_2$, pyörähtää x-akselin ympäri. Vain kerroin 2π puuttuu, mutta se ei vaikuta lausekkeen minimointiin. Tämän vuoksi katenaari antaa myös muodon sellaiselle pyörähdyspinnalle, jonka pääty-ympyrät on annettu ja pinnan pinta-ala on pienin mahdollinen. Tämä on voimassa ainakin silloin, kun ympyrät ovat suhteellisen lähellä toisiaan; jos ympyröitä vedetään kauemmaksi toisistaan, tulee jossain vaiheessa vastaan sellainen tilanne, että minimiarvona on vain pääty-ympyröiden yhteenlaskettu pinta-ala, jota ei kuitenkaan saavuteta minkään pyörähdyskappaleen pinta-alana. Tämän kuvitteleminen on hyvää aivovoimistelua!

Tilannetta voidaan havainnollistaa saippuakalvojen avulla. Otetaan kaksi ympyränmuotoista rautalankasilmukkaa, ja upotetaan ne saippualiuokseen. Pienen harjoittelun jälkeen silmukat onnistuu nostamaan liuoksesta yhdessä niin, että niiden väliin jää putkimainen saippuakalvo. Asetetaan silmukat niin, että kunkin silmukan määräämä taso on kohtisuorassa silmukoiden keskipisteiden kautta kulkevaa suoraa vastaan. Minkä muotoiseksi saippuakalvo asettuu?

Vastaus on: Saippuakalvon muodon määrää katenaaria vastaava pyörähdyskappale! Tämä voidaan perustella suhteellisen helposti ajattelemalla tilannetta fysikaalisesti. Samalla tavalla kuin jännitettyyn jouseen on varastoituneena potentiaalienergiaa, sisältää myös saippuakalvo (tai esimerkiksi muovikalvo kuten ilmapallo) sen pintajännitykseen liittyvää potentiaalienergiaa. Osoittautuu, että tämän jännitysenergian määrä on (tietyissä rajoissa) suoraan verrannollinen kalvon pinta-alaan, ja koska systeemien tasapainotilat vastaavat yleensä energiaminimiä, niin saippuakalvokin pyrkii minimoimaan oman pinta-alansa! Tämän seurauksena sen muotoa kuvaa katenaari.

Reunoiltaan pingotettuaja kalvoja kutsutaan tämän vuoksi minimipinnoiksi. Niiden teoriaan liittyy paljon mielenkiintoista matematiikkaa, mutta ehkäpä tämä riittää tältä erää.

Didaktinen matematiikka?

Olli Martio
Professori
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Tieteessä tapahtuu -lehden palstoilla on käyty keskustelua matematiikasta ja matematiikan opetuksesta [8], [6]. Keskustelua on syytä jatkaa.

Didaktiikan ja matematiikan määritelmistä

Didaktiikka on määriteltävissä opetusoppina. Järkevät ihmiset ymmärtävät tämän opiksi, jolla pyritään edesauttamaan oppimista. Koska kulttuurievoluution keskeinen voima on oppiminen, on alalla ponnisteltu koko ihmiskunnan historian ajan. Opetuksen tehokas järjestäminen on sivistysyhteiskunnan edellytys. Opetuksen kehittämisessä riittää viljelysarkaa. Valitettavasti kynnöt ovat joskus johtaneet paremmin kesannolle kuin uudelle kasvulle soveliaaksi maaperäksi.

Matematiikan voi määritellä kuten filosofi Oswald Spengler: matematiikka on sitä, mitä matemaatikot tekevät. Tämä sopii muihinkin tieteisiin, sillä tiedettä ei ole ilman tutkimusta, eikä tutkimusta ilman ihmisiä.

Käytännön tasolla matematiikan luokittelu ei ole vaikeaa. Kansainvälisessä luokittelussa [4] matematiikka on jaettu noin 50 pääryhmään ja nämä edelleen aliryhmiin. Tyypillisesti matemaattinen tieteellinen julkaisu kuuluu 2 - 3 ryhmään, jopa eri pääryhmiin. Poikkitieteellisyys on matematiikassa pikemmin sääntö kuin poikkeus. Nykyisin raja sovelletun ja puhtaan matematiikan välillä on hämärtynyt, ja tätä rajanvetoa käydään muualla kuin alan tutkijoiden piirissä. Didaktinen matematiikka ei ole matematiikan osa-alue. Kansainvälisesti käytetty termi on ”Mathematics education”.

Matematiikan tutkimus ei aina kohdistu relevantteihin kohteisiin. Sama pätee kaikkiin tieteisiin, sillä relevanttisuus määritellään tämän päivän suhdanteiden mukaan. Matemaattinen tutkimus on kuitenkin vähemmän aikasidonnaista kuin usean muun tieteen, esimerkiksi politiikan ja tulevaisuuden tutkimus. Muutaman tuhannen vuoden takaiset matematiikan tulokset, kuten suorakulmaista kolmiota koskeva Pythagoraan lause, muodostavat edelleen ihmiskunnan kulttuuriperinnön kivijalan. Pythagoraan keksimä kulmakivi ja muut perustuksen kivet hiertävät edelleen matematiikan opetuksessa.

Matematiikan kouluopetuksesta

Matematiikan kouluopetuksessa on koettu useita murroksia viime vuosisadan jälkipuoliskolla. Artikkelin [8] kirjoittajat muistelevat 1960-70 lukujen vaihteessa käytyä keskustelua ”uudesta matematiikasta”. Suomalainen tulkinta uudesta matematiikasta joukkoviivoineen on alkanut kadota historian hämärään. Sen sijaan artikkelissa ei puututa myöhempiin, monin tavoin oleellisempiin, muutoksiin matematiikan opetuksessa ja oppimäärissä. Oppimääriä on "uuden matematiikan"-skisman jälkeen muutettu parikin kertaa, ja uudet ovat jälleen tulossa. Kansainvälisesti ottaen suomalaiset koulujen oppimäärät eivät ole huonoimmasta päästä. Parantamisen tarvetta kuitenkin on.

Artikkelissa [8] hyökätään perinteisen laskemisen opettamista vastaan. Perusteluna on, että kukaan ei nykyään suorita mekaanisia laskuja, vaan nämä ovat siirtyneet laskimille ja tietokoneille. On totta, että harva enää laskee päässään tai paperilla viisinumeroisia lukuja yhteen. Sen sijaan päässä suoritettujen laskujen $2+9$, $109-11$ ja $(1/2)(1/3)$ tarve ei ole vähentynyt.

Perinteisen laskemisen opettelun tarkoitus ei ole valmentautua mekaanisiin laskutehtäviin. Tarkoituksena on perehtyä lukujen suuruussuhteisiin ja laskutoimitusten ominaisuuksiin. Palkan lisäyksen vaikutus on eri kuin palkan vähennyksen. Laskutoimitukset, yhteenlasku, vähentäminen, kertominen ja jakaminen, eivät edusta mustia laatikoita (= laskimia), joiden inputtina ovat luvut ja vastauksina uusia lukuja. Tämän kirjoittajalle opetettiin likimääräinen kertolasku laskutikkua käyttäen. Laskutikusta ei ole ollut allekirjoittaneelle muuta hyötyä, kuin että se on edelleen hyvä viivoitin. Laskutikun metodi, logaritmin käyttö, on kuitenkin jäänyt mieleen. Mitähän jää mieleen lukuja laskimessa kertovalle?

Artikkelin [8] kirjoittajilta on jäänyt huomaamatta, että laskemisen opettelu kouluissa on jo radikaalisesti vähentynyt. Laskimia käytetään kouluissa erittäin paljon. Myös tietokoneet ovat astuneet kuvaan. Laajan TIMMS 1999 [3] selvityksen mukaan tietokoneiden ja laskimien tiheys on Suomen kouluissa huipputasolla verrattuna muuhun maailmaan. Laskimien ja tietokoneiden mahdollisuudet mekaanisessa laskemisessa on otettava opetuksessa huomioon, mutta niiden ei pidä antaa aiheuttaa numerosokeutta. Ensiksi on opittava ymmärtämään laskutoimitukset, ja vasta sitten otettava koneet avuksi.

Laskimien käyttö opetuksessa on myös johtanut pahempiin vammoihin kuin numerosokeuteen. Tyypillisenä esimerkkinä oli kevään 2003 matematiikan ylioppilaskirjoituksen tehtävä, jossa funktio $\ln|x|$ ilmestyi kokelaitten koepaperille nollassa jatkuvana funktiona, koska graafisen laskimen näyttöruutu niin todisti. Oppilailla ei ollut konkreettista kuvaa logaritmifunktion kulusta. Jos on laskettava lausekkeen arvo, niin se lasketaan mekaanisesti laskimella sen sijaan, että lauseke ensin saatettaisiin muotoon, jossa laskeminen olisi yksinkertaista. Sijoituksessa monimutkaiseen lausekkeeseen tulee helposti virheitä. Koska tietokone ei tee erehdyksiä, luullaan vastausta oikeaksi. Lausekkeiden sieventämisen taito on romahtanut, vaikka opetteluun olisi periaatteessa enemmän aikaa käytettävissä.

Ongelmanratkaisu

Vallitseva trendi koulujen matematiikan opetuksessa on nin sanottu ongelmanratkaisu. Tämä on takapiruna useissa viimeisissä koulujen matematiikan oppisuunnitelmissa. Erityisesti sen painoarvo on ollut suuri peruskoulussa ja lukion lyhyen matematiikan kursseissa. Trendi on kansainvälinen ja levinnyt Suomeen 1970-luvulla lähinnä Saksasta. Kasvatustieteilijät ovat mainostaneet ongelmanratkaisun hyväksi tekevää vaikutusta matematiikan opetuksessa.

Ongelmaratkaisun ideana on, että matematiikan opetuksen pitää perustua käytännön ongelmiin. Matematiikan opetukselle on annettu vain välinearvo. Tämä on johtanut esimerkiksi talousmatematiikan kurssiin lukion lyhyessä matematiikassa. Matematiikkaa tarkastellaan korkoprosenttien, osake- ja valuuttakurssien maailmasta lähtien. Valitettavasti kaikessa järkevässä ja rationaalisessa työskentelyssä pitää ensiksi olla työkalut ja harjaannus niiden käyttöön. Muuten syntyy susikappaleita. Korkeakoulut ja ammattikorkeakoulut ovat huomanneet, että susikappaleiden tuotannossa on kouluissa päästy hyviin tuloksiin erityisesti lyhyen matematiikan kursseilla [7]. Myös pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa suorittaneiden keskuudessa on niitä, joille kaava

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

on hepreaa. Nykyisin laskimet, tietokoneista puhumattakaan, suorittavat helposti laskutoimituksia myös symboleilla. Käyttö valitettavasti edellyttää, että laskimia osataan käyttää oikein ja että tiedetään minkälaisiin tuloksiin tähdätään. Ensimmäinen vaatimus edellyttää lausekkeiden sisällön ymmärtämistä ja jälkimmäinen taas matematiikassa harjaantunutta silmää.

Koulu on elämää varten. Matematiikan tunneilla nykyisin ratkaistavat ongelmat eivät välttämättä ole niitä, joista on hyötyä myöhemmin. Ei yhteiskuntaopin tunneillakaan opetella täyttämään työttömyysavustusten hakukaavakkeita, sillä kun tarve tulee vastaan, ovat kaavakkeet jo muuttuneet. Ongelmanratkaisu on osa matematiikan kouluopinnoista, mutta ei pääasia. Siihen keskittyminen vie huomion matemaattisten käsitteiden täsmälliseltä määrittelyltä ja teorioiden rakentamiselta. Pythagoraan lauseella on pidempi käytännön kantavuus kuin osinkolaskuilla. Ongelmanratkaisun tarkoitus on matematiikan kouluopinnoissa konkretisoida käsitteitä ja teoriaa sekä osoittaa sovelluksien rikkaus. Nykyisessä painotuksessa on parantamisen varaa. Ennen kaikkea luonnontieteet ja tekniikka tulevat kärsimään, jos nykyinen trendi jatkuu.

Opettajankoulutuksesta

Artikkelissa [8] suositellaan, että opettajankoulutuksessa keskityttäisiin aineenhallinnan osalta perusasioihin. Suomen yliopistoissa matematiikan aineenopettajan koulutuksessa keskitytään juuri tähän. Artikkelin tekijät kauppaavat opettavaisena esimerkkinä yhtälöä $x + x = 1$ kunnassa $\mathbb{Z}_2$. Jokainen yliopistollisen algebran peruskurssin suorittanut ymmärtää tehtävän. Reaalilukujen kunnassa $\mathbb{R}$ vastaava yhtälö on $0 \cdot x = 1$. Tällainen yhtälö tuottaa koululaisille vaikeuksia, koska sillä ei ole ratkaisuja. Yliopistokursseilla $\mathbb{Z}_2$ kelpaa esimerkiksi yksinkertaisimmasta mahdollisesta kunnasta. Kunnan käyttöarvo koulussa on nolla. Yhtälöiden ratkaisemiseen ei ole olemassa mitään aksiomaattista metodia, on vain erilaisia lähestymisteitä. Sama pätee probleemoiden ratkaisemiseen yleensä.

Aineenopettajan koulutuksessa didaktinen puoli otetaan ainelaitoksilla nykyisin huomioon erilaisilla seminaarityyppisillä kursseilla, joissa luodaan yhteyksiä kouluissa opetettavan materiaalin ja yliopistotasoisten matematiikan kurssien välillä. Käsitys, että yliopistokurssit tarjoaisivat jotain sellaista matematiikkaa, josta puuttuvat yhteydet kouluissa opetettavaan matematiikkaan, on väärä. Seminaarityyppinen toiminta panostaa näiden yhteyksien korostamiseen käytännön tasolla. Opettajankoulutuslaitoksilla annetaaan myös tähän kuuluvaa opetusta. Hyviä kokemuksia on esimerkiksi kokeneen normaalikoulun opettajan pitämästä kurssista koululaisille vaikeista matematiikan käsitteistä.

Artikkelin [8] kirjoittajat suosittelevat viipalekuvion käyttämistä lukujonon raja-arvon havainnollistamisessa. Tietääkseni tämä havainnollinen menetelmä esitetään kaikilla korkeakoulujen matematiikan peruskursseilla Suomessa ja kokemukseni mukaan myös ulkomailla. Tämän kirjoittaja suositteli menettelyn käyttämistä funktion raja-arvon ja jatkuvuuden käsittelyyn kouluissa [2]. Yliopistokursseilla tämä on arkipäivää. Tältä osin didaktinen matematiikka on jo toteutettu yliopisto-opetuksessa. Sen sijaan se ei ole levinnyt koulukirjoihin siinä määrin kuin olisi toivottavaa.

Opettajankoulutuksen tarkoitus on, että tulevat matematiikan opettajat imevät matematiikan taitojaan yliopistollisilta kursseilta. Yliopistokurssit muuttuvat aina nopeammin kuin koulukurssit, sillä niitä eivät onneksi sido oppisuunnitelmat. Toivoa sopii, että koulujen matematiikan opettajat käyttävät omaa järkeään huolimatta uusista normatiivisista oppimääristä.

Matematiikan kieli ja didaktiikka

Artikkelissa [8] kritisoidaan matematiikkaa epämääräisten symbolien ja sopimusten käytöstä. Eiköhän matemaattinen kieli sittenkin ole ole ihmisten käyttämistä kielistä eräs parhaiten normitetuista ja ymmärrettävistä. Eri maissa käytetyt murteet eivät paljoa poikkea toisistaan. Luulot matematiikan arvosidonnaisuudesta ja kommunikaatiokuiluista käyttäjien välillä johtuvat lähinnä matematiikan osaamattomuudesta. Opettajille, ja myös koululaisille, matematiikka ilmenee valitettavan usein valmiiksi annettuna solidina kokonaisuutena. Tämä ei sinänsä ole paha asia, sillä monet perusasioista ovat vanhoja ja varsin pitkälle pureskeltuja. Niiden opettaminen ja oppiminen ei nykyisin ole kuitenkaan helpompaa kuin aikaisemmin. Pythagoraan lauseen voi keksiä leikkimällä palikoilla, mutta kolmion sivuille piirrettyjen neliöiden pinta-aloja koskeva Pythagoraan väittämä hahmottuu parhaiten paperille. Kehitystä on tapahtunut: Pythagoras todennäköisesti piirsi kuvion hiekalle. Ymmärtäminen ei tule pelkästään siitä, että palaset loksahtavat kohdalleen.

Didaktikkojen erehdys on, että he luulevat tietävänsä, mitä kouluissa pitää opettaa. Opettamisen ja oppimisen asiantuntevuus ei tähän riitä. Luulo matemaattisen tutkimuksen staattisuudesta on virheellinen. Toisaalta matematiikan opetuksessa on vallinnut perinteinen linja. Suuret poikkeamat koulujen ja korkeakoulujen opetuksessa ovat johtaneet katastrofeihin. Matematiikan ymmärtäminen ei ole mahdollista ilman solidia perustusta ja siihen liittyvän ajattelun harjoittelua.

Luonnontieteiden opetuksessa on siirrytty kuvailevaan suuntaan. Esimerkiksi kvarkit ja transistorit ovat perusolemukseltaan niin monimutkaisia, että niiden ymmärtäminen käytettävissä olevilla fysiikan oppitunneilla on mahdotonta. Nykyisessä matematiikan opetuksessa piilee vastaava vaara. Kuvaileva opetus johtaa helposti siihen, että toisen asteen yhtälön ratkaisukaava ja transistorin kuva oppikirjassa ovat samanlaisia; kummastakaan oppilas ei ymmärrä mitään.

Eräänä didaktisen matematiikan ydinajatuksena artikkelin [8] kirjoittajat pitävät matemaattisten symbolien täsmällistä määrittelyä. Symbolit ovat toisarvoisia, käsitteet ovat tärkeitä ja niiden täsmällisessä määrittelyssä on vielä paljon tekemistä koulukursseilla. Koulujen oppikirjojen pahimmat erehdykset ja väärät painotukset löytyvät juuri näistä asioista ja johtuvat useimmiten siitä, että oppikirjojen tekijät eivät itse ole ymmärtäneet asiaa. Tässä ei didaktiikka auta.

Didaktiikan johtavana pyrkimyksenä tulee olla opetuksen parantaminen. Matematiikan opetuksessa edistysaskeleet ovat olleet pieniä. Didaktiikan alan tutkimusraporteista on vaikea löytää tieteelliset kriteeriot täyttäviä riittävän pitkillä aikajaksoilla tehtyjä tutkimuksia matematiikan opetuksen vaikuttavuudesta. Raportit ovat yleensä tiedotteita uusista kokeiluista, katso esimerkiksi [5], mutta kokeilujen todelliset vaikutukset jäävät epäselviksi. Pitkän aikavälin testit lähinnä teknillisten korkeakoulujen uusien opiskelijoiden matematiikan osaamisesta osoittavat laskevaa trendiä. Vastaavat tiedot ammattikorkeakouluista ovat hälyttäviä. Heikkeniviin opetustuloksiin ei riitä selitykseksi, että nykyisin paljon suurempi osuus ikäluokista pyrkii matematiikkaa käyttävään koulutukseen [1]. Didaktiikalla riittää tehtäväkenttää epäoleellisissa asioissa pyörimisen sijaan. Kriittistä keskustelua kouluissa opetettavasta matematiikasta, oppimääristä ja oppikirjoista käydään Suomessa vähän. Keskustelun pitäisi lisäksi tavoittaa nykyiset matematiikan opettajat.

Viitteet

[1] Martio, O., Osataanko matematiikkaa?, Solmu 3/2001, `http://solmu.math.helsinki.fi`, 28–29.

[2] Martio, O., Järkeä analyysin opetukseen, Dimensio 5/98, 33–38.

[3] Mullis, I., Martin, M. et al., TIMMS 1999, International Mathematics Report, International Study Center, Lynch School of Education, Boston Collage, 2000.

[4] Mathematics Subject Classification (MSC 1991), ZBL, Mathematics Abstracts, 1991.

[5] Program and abstracts, 20th Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association, Helsingin yliopisto, Yliopistopaino, 2003.

[6] Seppälä, M., Laskutaito ja numeroiden lukutaito edelleen tarpeen, Tieteessä tapahtuu 1 (2004), 54.

[7] Tarvainen, K., Opettaja, vaadi perusalgebran osaaminen, Dimensio 5/2003, 34–37.

[8] Tossavainen, T., Sorvali, T., Matematiikka, koulumatematiikka ja didaktinen matematiikka, Tieteessä tapahtuu 8 (2004), 30–35.

Artikkeli on julkaistu *Tieteessä tapahtuu* -lehden numerossa 2/2004, 42–45 ja se julkaistaan Solmussa *Tieteessä tapahtuu* -lehden luvalla.

Koulutuspoliittista keskustelua Ruotsissa

Käännös: Henri Lindén

*Svenska Matematikersamfundet*in jäsenlehtisessä 15.3.2004 Thomas Weibull esitteli Ingvar Enkvistin *Feltänkt* -teosta (SNS kustantamo, 2000), jossa kirjoittaja kritisoi raskain sanoin viime vuosikymmenten vallitsevaa ideologiaa kouluissa ja koulupolitiikassa. Tämä lukemisen arvoinen kirja on nyt saanut seuraa Enkvistin uutuudesta *Skolan – ett svenskt högriskprojekt*, joka myös ansaitsee huomiota. Näkökulma laajenee ensiksimainittuun kirjaan verraten siinä mielessä, että Enkvist – itse espanjan kielen professori Lundin yliopistossa – on kutsunut muiden aineiden edustajia osallistumaan keskusteluun. Muutamia mainitakseni etnologi Jonas Frykman, jäsenlehden lukijoille tuttu Ulf Persson sekä oikeustieteen yliopistolehtori Leif Alsheimer, joka tunnetaan kunnianhimoisesta opetusprojektistaan Jönköpingin Kauppakorkeakoulun oppilaiden parissa, ovat myötävaikuttaneet kirjan syntyyn. Joka toisen luvun Enkvist on kirjoittanut itse.

Kirjan keskeinen teema on kuvaus ja kritiikki siitä, miten koulun aikaisempi päätehtävä – tiedon ja kulttuuriperinteen välittäminen – on joutunut erilaisten sosiaalisten tehtävien varjoon. Tätä kehitystä kirjoittaja kuvaa osuvasti sanalla ”päiväkotiutuminen”. 60-luvulla tai aikaisemmin syntyneille, jotka eivät aikuisessa iässä ole nähneet koulua omin silmin, voi olla järkyttävää huomata, miten pitkälle tämä kehitys on edennyt.

Eräs ruotsin koulupolitiikan keskeisistä tavoitteista sitten yksikkö- ja peruskouluun siirtymisen on ollut antaa kaikille oppilaille samat mahdollisuudet, kotioloihin tai sosiaaliseen asemaan katsomatta. Tämän saavuttamiseksi on yhä enemmän asetettu lapsen oma maailmankuva ja sosiaalinen tausta opetuksen lähtökohdaksi. Painopiste on siirtynyt tulevaisuudesta (”aikuisena tulet hyötymään englannin ja matematiikan osaamisesta”) nykyhetkeen (”olet hyvä, kun olet”). Jonas Frykman selittää omassa luvussaan, miten tämä (parhain tarkoitusperin toteutettu) muutos toimii itseään vastaan, estäen oppilasta vapautumaan taustastaan ja saavuttamaan uusia korkeampia tavoitteita. Oppilaan lisääntynyt vapaus luokkahuoneessa – ja sen mukanaan tuoma vastuu – syrjii ”ei-akateemisista” kotioloista tulevia oppilaita enemmän kuin perinteinen opetus.

Opettajankoulutus, jossa viimeisen uudistuksen jälkeen on vieläkin vähemmän tilaa aineopinnoille, kuuluu niihin asioihin, joita kirjassa kritisoidaan armotta. Enkvistin tiivistelmät virallisista dokumenteista jotka ovat ohjanneet tämän päivän opetusjärjestelmää, viettävät joskus jopa surkuhupaisaan suuntaan. Tosin tämä on useimmiten aivan perusteltua, kuten seuraavassa ruotsin eduskunnan tekemässä selvityksessä vuodelta 1999, joka asetti pohjan tämän päivän opettajankoulutukselle:

Mitä tulee saksan kielen opettajiin, huomautettiin, että olisi este rekrytoinnille vaatia esitietoja saksan kielessä *opiskelijoilta, jotka hakevat yleiseen opettajankoulutukseen. Joukossahan saattaa olla joku, joka on hyvinkin sopiva saksanopettajaksi, mutta ei ole lukenut saksaa. Pilaileeko komitea kanssamme?*

Ruotsin koululaitos ja opetusjärjestelmä kokonaisuudessaan ovat enemmän tai vähemmän vapaassa pudotuksessa. *Skolan – ett svenskt högriskprojekt* antaa tärkeän panoksensa tilanteen kartoittamiseksi, ja ehdottaa myös konkreettisia vastatoimenpiteitä. Yleensäkin kirja on (vaatimattomasta koostaan huolimatta) kultakaivos jokaiselle, joka on huolissaan kehityksestä ja haluaa löytää perusteltuja näkemyksiä sellaisen koulun puolesta, jossa tieto on taas valttia.

Alkuperäinen artikkeli on julkaistu Ruotsin matemaattisen yhdistyksen jäsentiedotteessa 15.3. 2004, 22–23.