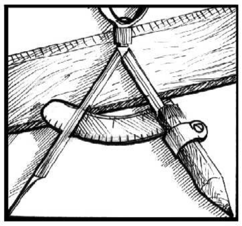


$\sin(18^\circ)$ kolmella tavalla

Jerry Segercrantz
Professori emeritus
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu
jerry.segercrantz@hut.fi

Johdanto

Niin sanotut muistikolmiot (kulmat 45°, 45°, 90° tai 30°, 60°, 90°) lienevät tuttuja useimmille lukiolaisille. Niistähän saadaan heti mm. kaavat $\sin(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$, $\sin(30^\circ) = 1/2$ ja $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$. Sinin vähennys- ja yhteenlaskukaavojen avulla saadaan helposti lausekkeet myös luvuille $\sin(15^\circ)$ ja $\sin(75^\circ)$:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \sin(15^\circ) &= \sin(45^\circ - 30^\circ)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\
(2)\quad \sin(75^\circ) &= \sin(45^\circ + 30^\circ)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}
$$

Herää kysymys: Onko olemassa muita kokonaisasteisia teräviä kulmia, joiden sinit voidaan esittää "yksinkertaisina" lausekkeina? Osoittautuu, että tällaisia löytyy. Voidaan esimerkiksi näyttää, että

$$
(3)\qquad \sin(18^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.
$$

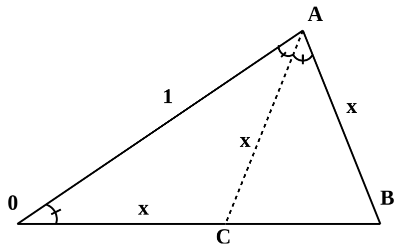
Miten kaava (3) johdetaan? Voidaan valita joko geometrinen tai algebrallinen lähestymistapa.

Geometrinen menetelmä

Geometrinen menetelmä perustuu kuvion 1 tasakylkiseen kolmioon OAB, jossa kulma AOB on 36° ja muut kaksi kulmaa 72°. Kuvioon on lisätty myös kulman BAO puolittaja, joka jakaa kolmion kahteen uuteen tasakylkiseen kolmioon. Oletamme, että sivujen OA ja OB pituus on 1. Sivun AB pituutta on merkitty x:llä. Sivuilla AC ja OC on sama pituus x, kuten helposti nähdään. Kolmio ABC on selvästi yhdenmuotoinen lähtökolmion OAB kanssa, joten

$$
\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}.
$$

Ratkaisemalla x:n suhteen saadaan $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Negatiivinen vaihtoehto voidaan tietenkin sulkea pois, joten $x = (\sqrt{5}-1)/2$. Tästä kaava (3) seuraa varsin suoraan tarkastelemalla suorakulmaista kolmiota OMA, missä M on janan AB keskipiste.



Kuva 1.

Lyhyesti kompleksiluvuista

Kaavan (3) algebrallinen johto perustuu kompleksilukujen käyttöön, joten aluksi aivan lyhyesti ja pintapuolisesti muutama sana kompleksiluvuista niille, joille ne ovat outoja ja tuntemattomia. Yleinen kompleksiluku voidaan esittää muodossa $a+bi$, missä a ja b ovat reaalisia ja i on erikoinen kompleksiluku, ns. imaginaariyksikkö, jolle pätee $i^2 = -1$ (myös: $\sqrt{-1} = i$). Havainnollisesti voidaan kuvitella kompleksiluvun $z = a+bi$ vastaavan xy-tason pistettä (a, b). Lukua a kutsutaan z:n *reaaliosaksi*, merkitään $\mathrm{Re}(z)$, ja lukua b puolestaan z:n *imaginaariosaksi*, merkitään $\mathrm{Im}(z)$. Kompleksiluvuilla voidaan tehdä neljä peruslaskutoimitusta $+$, $-$, $\cdot$, $/$, jolloin kaikki tavalliset laskusäännöt ovat voimassa. Aina tarvittaessa on syytä käyttää äsken mainittua kaavaa $i^2 = -1$. Luvun $z = a+bi$ *liittoluku* $\bar{z}$ on luku $a-bi$. Luku $\sqrt{a^2+b^2}$ on z:n pituus $|z|$. Helposti todetaan yhteydet $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ sekä $\mathrm{Re}(z) = (z+\bar{z})/2$.

Algebrallinen menetelmä

Kompleksiyhtälöllä $z^5 = 1$ eli

$$z^5 - 1 = 0 \tag{4}$$

on viisi ratkaisua eli juurta, jotka sijaitsevat tasavälisesti kompleksitason yksikköympyrällä (kts. kuva 2). Tämä seuraa kompleksilukujen juurenoton teoriasta, joka sisältyy kaikkiin kompleksilukujen alkeiden peruskursseihin. Yksi juuri on luonnollisesti 1. Juuret yhtyvät siis erään säännöllisen viisikulmion kärkiin. Olkoon z_1 tason 1. neljänneksessä sijaitseva juuri. Luvun z_1 napakulma (= kulma, jonka ko. kompleksiluku muodostaa positiivisen x-akselin eli reaaliakselin kanssa) on ilmeisesti 72°. Koska z_1 toteuttaa yhtälön (4) ja

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1),$$

niin voimme päätellä, että

$$z_1^4 + z_1^3 + z_1^2 + z_1 + 1 = 0. \tag{5}$$

Siirrymme nyt yhtälön (5) ratkaisemiseen. Otamme käyttöön apumuuttujan

$$w = z_1 + \frac{1}{z_1}, \tag{6}$$

jolle pätee

$$w^2 + w - 1 = 0 \tag{7}$$

yhtälön (5) ansiosta. Tarkista!

Toisen asten yhtälöllä (7) on kaksi juurta: $w_1 = (\sqrt{5}-1)/2$ ja $w_2 = (-\sqrt{5}-1)/2$. Saatuamme näin w:n esille (tosin kaksikäsitteisenä), voimme laskea z_1:n arvon yhtälöä (6) hyväksi käyttämällä. Neljännen asteen yhtälön (5) ratkaiseminen on näin palautettu kahden peräkkäisen toisen asteen yhtälön ratkaisemiseen. Tutkitaan asiaa hieman lähemmin. Kun käytetään yhtälössä (6) arvoa w_2, saadaan luvulle z_1 arvot

$$\begin{aligned}&\frac{-\sqrt{5}-1}{4} \pm \sqrt{\text{negatiivinen luku}}\\ &\qquad = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} \pm i \cdot (\text{reaaliluku}),\end{aligned}$$

(tarkista!), siis kaksi kompleksilukua, joilla on yhteinen negatiivinen reaaliosa. Tämä ei käy, sillä sopimuksen mukaan z_1 sijaitsee imaginaariakselin oikealla puolella. On siis käytettävä w:n arvoa w_1, mikä antaa

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm \sqrt{\text{negatiivinen luku}}\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i \cdot (\text{reaaliluku}),\end{aligned}$$

Näemme siis, että luvun z_1 reaaliosa $\mathrm{Re}(z_1)$ on $(\sqrt{5}-1)/4$. Toisaalta kuvion 2 perusteella $\mathrm{Re}(z_1) = \cos(72°) = \sin(90° - 72°) = \sin(18°)$. Näin on algebrallinen ratkaisu saatu päätökseen.

Esitämme lopuksi vielä vaihtoehtoisen päättelytavan, joka ei nojaudu melkoista kekseliäisyyttä vaativaan sijoitukseen (6). Yllä sanotusta (kts. kuva 2) voidaan päätellä että polynomin

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \tag{8}$$

nollakohdat ovat z_1, z_1^2, $\bar{z}_1$ ja $\bar{z}_1^2$, joten ko. polynomi voidaan esittää myös muodossa $(z-z_1)(z-z_1^2)(z-\bar{z}_1)(z-\bar{z}_1^2)$ eli

$$\begin{aligned}z^4 &- (z_1 + \bar{z}_1 + z_1^2 + \bar{z}_1^2)z^3\\ &+ (z_1 + \bar{z}_1 + z_1^3 + \bar{z_1}^3 + 2)z^2\\ &+ (z_1 + \bar{z}_1 + z_1^2 + \bar{z}_1^2)z + 1\end{aligned} \tag{9}$$

(tässä on käytetty mm. kaavaa $z_1\bar{z}_1 = |z_1|^2 = 1$). Vertaamalla lausekkeiden (9) ja (8) z^3-termien kertoimia todetaan, että $-(z_1 + \bar{z}_1 + z_1^2 + \bar{z}_1^2) = 1$ eli, ottamalla käyttöön lyhennykset $\alpha = \mathrm{Re}(z_1) = (z_1+\bar{z}_1)/2$ ja $\beta = \mathrm{Re}(z_1^2) = (z_1^2 + \bar{z}_1^2)/2$,

$$2\alpha + 2\beta = -1. \tag{10}$$

Samaan tapaan jatkamalla saadaan z^2-termien kertoimia vertaamalla, että

$$z_1 + \bar{z}_1 + z_1^3 + \bar{z}_1^3 + 2 = 1 \quad \text{eli} \quad z_1 + \bar{z}_1 + z_1^3 + \bar{z}_1^3 = -1.$$

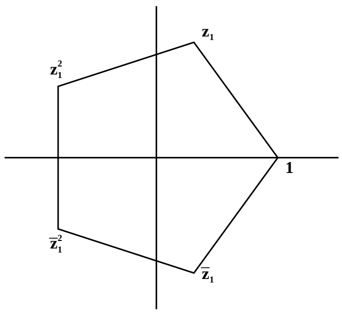
Toisaalta $4\alpha\beta = (z_1 + \bar{z}_1)(z_1^2 + \bar{z}_1^2) = z_1 + \bar{z}_1 + z_1^3 + \bar{z}_1^3$, joten

$$4\alpha\beta = -1. \tag{11}$$

Eliminoimalla β yhtälöistä (10) ja (11) saadaan lopuksi

$$\alpha = \mathrm{Re}(z_1) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Miinusmerkki juuren edessä voidaan jälleen sulkea pois z_1:n sijainnin perusteella.



Kuva 2.

Epilogi

Kulmien 18° ja 15° (kts. johdanto) sineille on edellä saatu juurilausekeet. Kulman $3° = 18° - 15°$ sinin lauseke voidaan nyt helposti löytää sinin vähennyslaskukaavan avulla, kunhan vielä muistetaan tuttu kaava $\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}$. Tulos on

$$\sin(3°) = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16}.$$

Sinin yhteenlaskukaavaa käyttämällä voidaan tämän jälkeen johtaa kaikkien kulman 3° kokonaisten monikertojen sinit: $6° = 3° + 3°$, $9° = 6° + 3°$ jne. Vastaavanlaisten lausekkeiden löytäminen luvuille $\sin(1°)$ ja $\sin(2°)$ ei sen sijaan ole mahdollista.

Kirjallisuutta:

Courant ja Robbins: What is Mathematics?, Oxford University Press, 1978

Stillwell: Elements of Algebra, Springer, 1994.