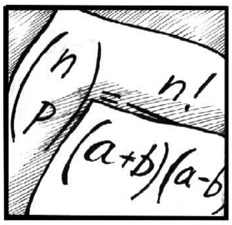

Saippuakalvoista

Pekka Alestalo
Opettava tutkija
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Solmun numerossa 3/2003 kirjoitin ketjukäyrästä eli katenaarista, joka esittää päistään kiinnitetyn narun muotoa. Ketjukäyrän yhtälöksi saatiin

$$y = f(x) = \frac{1}{a}\cosh(a(x - x_0)) + C,$$

missä vakiot a, x_0 ja C riippuvat tilanteen geometriasta ja hyperbolinen kosini määritellään kaavalla

$$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}).$$

Kirjoituksen alkuosassa päädyttiin tulokseen, jonka mukaan katenaarin muoto määräytyy siitä funktiosta $f(x)$, joka annetuilla ehdoilla minimoi lausekkeen

$$J[f] = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Tässä x_1 ja x_2 ovat kiinnityspisteiden x-koordinaatit.

Toisaalta yllä oleva lauseke muistuttaa myös sellaisen pyörähdyskappaleen pinta-alaa, joka syntyy, kun käyrä $y = f(x)$, $x_1 \le x \le x_2$, pyörähtää x-akselin ympäri. Vain kerroin 2π puuttuu, mutta se ei vaikuta lausekkeen minimointiin. Tämän vuoksi katenaari antaa myös muodon sellaiselle pyörähdyspinnalle, jonka pääty-ympyrät on annettu ja pinnan pinta-ala on pienin mahdollinen. Tämä on voimassa ainakin silloin, kun ympyrät ovat suhteellisen lähellä toisiaan; jos ympyröitä vedetään kauemmaksi toisistaan, tulee jossain vaiheessa vastaan sellainen tilanne, että minimiarvona on vain pääty-ympyröiden yhteenlaskettu pinta-ala, jota ei kuitenkaan saavuteta minkään pyörähdyskappaleen pinta-alana. Tämän kuvitteleminen on hyvää aivovoimistelua!

Tilannetta voidaan havainnollistaa saippuakalvojen avulla. Otetaan kaksi ympyränmuotoista rautalankasilmukkaa, ja upotetaan ne saippualiuokseen. Pienen harjoittelun jälkeen silmukat onnistuu nostamaan liuoksesta yhdessä niin, että niiden väliin jää putkimainen saippuakalvo. Asetetaan silmukat niin, että kunkin silmukan määräämä taso on kohtisuorassa silmukoiden keskipisteiden kautta kulkevaa suoraa vastaan. Minkä muotoiseksi saippuakalvo asettuu?

Vastaus on: Saippuakalvon muodon määrää katenaaria vastaava pyörähdyskappale! Tämä voidaan perustella suhteellisen helposti ajattelemalla tilannetta fysikaalisesti. Samalla tavalla kuin jännitettyyn jouseen on varastoituneena potentiaalienergiaa, sisältää myös saippuakalvo (tai esimerkiksi muovikalvo kuten ilmapallo) sen pintajännitykseen liittyvää potentiaalienergiaa. Osoittautuu, että tämän jännitysenergian määrä on (tietyissä rajoissa) suoraan verrannollinen kalvon pinta-alaan, ja koska systeemien tasapainotilat vastaavat yleensä energiaminimiä, niin saippuakalvokin pyrkii minimoimaan oman pinta-alansa! Tämän seurauksena sen muotoa kuvaa katenaari.

Reunoiltaan pingotettuaja kalvoja kutsutaan tämän vuoksi minimipinnoiksi. Niiden teoriaan liittyy paljon mielenkiintoista matematiikkaa, mutta ehkäpä tämä riittää tältä erää.