



Didaktinen matematiikka?

Olli Martio

Professori

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Tieteessä tapahtuu -lehden palstoilla on käyty keskustelua matematiikasta ja matematiikan opetuksesta [8], [6]. Keskustelua on syytä jatkaa.

Didaktiikan ja matematiikan määritelmistä

Didaktiikka on määriteltävissä opetusoppina. Järkevät ihmiset ymmärtävät tämän opiksi, jolla pyritään edesauttamaan oppimista. Koska kulttuurievoluution keskeinen voima on oppiminen, on alalla ponnisteltu koko ihmiskunnan historian ajan. Opetuksen tehokas järjestäminen on sivistisyhteiskunnan edellytys. Opetuksen kehittämisessä riittää viljelysarkaa. Valitettavasti kynöt ovat joskus johtaneet paremmin kesannolle kuin uudelle kasvulle soveliaaksi maaperäksi.

Matematiikan voi määritellä kuten filosofi Oswald Spengler: matematiikka on sitä, mitä matemaatikot tekevät. Tämä sopii muihinkin tieteisiin, sillä tiedettä ei ole ilman tutkimusta, eikä tutkimusta ilman ihmisiä.

Käytännön tasolla matematiikan luokittelu ei ole vaikeaa. Kansainvälisessä luokittelussa [4] matematiikka on jaettu noin 50 pääryhmään ja nämä edelleen aliryhmiin. Tyypillisesti matemaattinen tieteellinen julkaisu kuuluu 2 - 3 ryhmään, jopa eri pääryhmiin. Poikkitieteellisyys on matematiikassa pikemmin sääntö kuin

poikkeus. Nykyisin raja sovelletun ja puhtaan matematiikan välillä on hämärtynyt, ja tätä rajanvetoa käytään muualla kuin alan tutkijoiden piirissä. Didaktinen matematiikka ei ole matematiikan osa-alue. Kansainvälisesti käytetty termi on "Mathematics education".

Matematiikan tutkimus ei aina kohdistu relevantteihin kohteisiin. Sama pätee kaikkiin tieteisiin, sillä relevanttisuus määritellään tämän päivän suhdanteiden mukaan. Matemaattinen tutkimus on kuitenkin vähemmän aikasidonnaista kuin usean muun tieteen, esimerkiksi politiikan ja tulevaisuuden tutkimus. Muutaman tuhannen vuoden takaiset matematiikan tulokset, kuten suorakulmaista kolmiota koskeva Pythagoraan lause, muodostavat edelleen ihmiskunnan kulttuuriperinnön kivijalan. Pythagoraan keksimä kulmakivi ja muut perustuksen kivet hiertävät edelleen matematiikan opetuksessa.

Matematiikan kouluopetuksesta

Matematiikan kouluopetuksessa on koettu useita murroksia viime vuosisadan jälkipuoliskolla. Artikkelin [8] kirjoittajat muistelevat 1960-70 lukujen vaihteessa käytyä keskustelua "uudesta matematiikasta". Suomalainen tulkinta uudesta matematiikasta joukkoviivoineen

on alkanut kadota historian hämärään. Sen sijaan artikkelissa ei puututa myöhempiin, monin tavoin oleellisempiin, muutoksiin matematiikan opetuksessa ja oppimäärissä. Oppimääriä on ”uuden matematiikan”-skisman jälkeen muutettu parikin kertaa, ja uudet ovat jälleen tulossa. Kansainvälisesti ottaen suomalaiset koulujen oppimäärät eivät ole huonoimmasta päästä. Parantamisen tarvetta kuitenkin on.

Artikkelissa [8] hyökätään perinteisen laskemisen opettamista vastaan. Perusteluna on, että kukaan ei nykyään suorita mekaanisia laskuja, vaan nämä ovat siirtyneet laskimille ja tietokoneille. On totta, että harva enää laskee päässään tai paperilla viisinumeroisia lukuja yhteen. Sen sijaan päässä suoritettujen laskujen $2 + 9$, $109 - 11$ ja $(1/2)(1/3)$ tarve ei ole vähentynyt.

Perinteisen laskemisen opetteluun tarkoitus ei ole valmentautua mekaanisiin laskutehtäviin. Tarkoituksena on perehtyä lukujen suuruussuhteisiin ja laskutoimitusten ominaisuuksiin. Palkan lisäyksen vaikutus on eri kuin palkan vähennyksen. Laskutoimitukset, yhteenlasku, vähentäminen, kertominen ja jakaminen, eivät edusta mustia laatikoita (= laskimia), joiden inputina ovat luvut ja vastauksina uusia lukuja. Tämän kirjoittajalle opetettiin likimääräinen kertolasku laskutikkua käyttäen. Laskutikusta ei ole ollut allekirjoittaneelle muuta hyötyä, kuin että se on edelleen hyvä viivoitin. Laskutikun metodi, logaritmin käyttö, on kuitenkin jäänyt mieleen. Mitähän jää mieleen lukuja laskimessa kertovalle?

Artikkelin [8] kirjoittajilta on jäänyt huomaamatta, että laskemisen opettelu kouluissa on jo radikaalisesti vähentynyt. Laskimia käytetään kouluissa erittäin paljon. Myös tietokoneet ovat astuneet kuvaan. Lajaan TIMMS 1999 [3] selvityksen mukaan tietokoneiden ja laskimien tiheys on Suomen kouluissa huipputasolla verrattuna muuhun maailmaan. Laskimien ja tietokoneiden mahdollisuudet mekaanisessa laskemisessa on otettava opetuksessa huomioon, mutta niiden ei pidä antaa aiheuttaa numerosokeutta. Ensiksi on opittava ymmärtämään laskutoimitukset, ja vasta sitten otettava koneet avuksi.

Laskimien käyttö opetuksessa on myös johtanut pahempaan vammoihin kuin numerosokeuteen. Tyypillisenä esimerkkinä oli kevään 2003 matematiikan ylioppilaskirjoituksen tehtävä, jossa funktio $\ln - x$ ilmestyi kokelaitten koepaperille nollassa jatkuvana funktiona, koska graafisen laskimen näyttöruutu niin todisti. Oppilailla ei ollut konkreettista kuvaa logaritmfunktion kulusta. Jos on laskettava lausekkeen arvo, niin se lasketaan mekaanisesti laskimella sen sijaan, että lauseke ensin saatettaisiin muotoon, jossa laskeminen olisi yksinkertaista. Sijoituksessa monimutkaiseen lausekkeeseen tulee helposti virheitä. Koska tietokone ei tee erehdyksiä, luullaan vastausta oikeaksi. Lausekkeiden sieventämisen taito on romahtanut, vaikka opetteluun olisi periaatteessa enemmän aikaa käytettävissä.

Ongelmanratkaisu

Vallitseva trendi koulujen matematiikan opetuksessa on nin sanottu ongelmanratkaisu. Tämä on takapiruna useissa viimeisissä koulujen matematiikan oppisuunnitelmissa. Erityisesti sen painoarvo on ollut suuri peruskoulussa ja lukion lyhyen matematiikan kursseissa. Trendi on kansainvälinen ja levinnyt Suomeen 1970-luvulla lähinnä Saksasta. Kasvatustieteilijät ovat mainostaneet ongelmanratkaisun hyväksi tekevää vaikutusta matematiikan opetuksessa.

Ongelmanratkaisun ideana on, että matematiikan opetuksen pitää perustua käytännön ongelmiin. Matematiikan opetukselle on annettu vain välinearvo. Tämä on johtanut esimerkiksi talousmatematiikan kurssiin lukion lyhyessä matematiikassa. Matematiikkaa tarkastellaan korkoprosenttien, osake- ja valuuttakurssien maailmasta lähtien. Valitettavasti kaikessa järkevässä ja rationaalisessa työskentelyssä pitää ensiksi olla työkalut ja harjaannus niiden käyttöön. Muuten syntyy susikappaleita. Korkeakoulut ja ammattikorkeakoulut ovat huomanneet, että susikappaleiden tuotannossa on kouluissa päästy hyviin tuloksiin erityisesti lyhyen matematiikan kursseilla [7]. Myös pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa suorittaneiden keskuudessa on niitä, joille kaava

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

on hepreaa. Nykyisin laskimet, tietokoneista puhumattakaan, suorittavat helposti laskutoimituksia myös symboleilla. Käyttö valitettavasti edellyttää, että laskimia osataan käyttää oikein ja että tiedetään minkälaisiin tuloksiin tähdätään. Ensimmäinen vaatimus edellyttää lausekkeiden sisällön ymmärtämistä ja jälkimmäinen taas matematiikassa harjaantunutta silmää.

Koulu on elämää varten. Matematiikan tunneilla nykyisin ratkaistavat ongelmat eivät välttämättä ole niitä, joista on hyötyä myöhemmin. Ei yhteiskuntaopin tunneillakaan opetella täyttämään työttömyysavustusten hakukaavakkeita, sillä kun tarve tulee vastaan, ovat kaavakkeet jo muuttuneet. Ongelmanratkaisu on osa matematiikan kouluopinnoista, mutta ei pääasia. Siihen keskittyminen vie huomion matemaattisten käsitteiden täsmälliseltä määrittelyltä ja teorioiden rakentamiselta. Pythagoraan lauseella on pidempi käytännön kantavuus kuin osinkolaskuilla. Ongelmanratkaisun tarkoitus on matematiikan kouluopinnoissa konkretisoida käsitteitä ja teoriaa sekä osoittaa sovelluksien rikkaus. Nykyisessä painotuksessa on parantamisen varaa. Ennen kaikkea luonnontieteet ja tekniikka tulevat kärsimään, jos nykyinen trendi jatkuu.

Opettajankoulutuksesta

Artikkelissa [8] suositellaan, että opettajankoulutuksessa keskityttäisiin aineenhallinnan osalta perusasioihin. Suomen yliopistoissa matematiikan aineenopettajan koulutuksessa keskitytään juuri tähän. Artikkelin tekijät kaappaavat opettavaisena esimerkkinä yhtälöä $x + x = 1$ kunnassa \mathbb{Z}_2 . Jokainen yliopistollisen algebran peruskurssin suorittanut ymmärtää tehtävän. Reaalilukujen kunnassa \mathbb{R} vastaava yhtälö on $0 \cdot x = 1$. Tällainen yhtälö tuottaa koululaisille vaikeuksia, koska sillä ei ole ratkaisuja. Yliopistokursseilla \mathbb{Z}_2 kelpaa esimerkiksi yksinkertaisimmasta mahdollisesta kunnasta. Kunnan käyttöarvo koulussa on nolla. Yhtälöiden ratkaisemiseen ei ole olemassa mitään aksiomaattista metodologiaa, on vain erilaisia lähestymistietoja. Sama pätee probleemoiden ratkaisemiseen yleensä.

Aineenopettajan koulutuksessa didaktinen puoli otetaan ainelaitoksilla nykyisin huomioon erilaisilla seminaarityyppisillä kursseilla, joissa luodaan yhteyksiä kouluissa opetettavan materiaalin ja yliopistotasosten matematiikan kurssien välillä. Käsitys, että yliopistokurssit tarjoaisivat jotain sellaista matematiikkaa, josta puuttuvat yhteydet kouluissa opetettavaan matematiikkaan, on väärä. Seminaarityyppinen toiminta panostaa näiden yhteyksien korostamiseen käytännön tasolla. Opettajankoulutuslaitoksilla annetaan myös tähän kuuluvaa opetusta. Hyviä kokemuksia on esimerkiksi kokeneen normaalikoulun opettajan pitämästä kurssista koululaisille vaikeista matematiikan käsitteistä.

Artikkelin [8] kirjoittajat suosittelivat viipalekuvion käyttämistä lukujonon raja-arvon havainnollistamisessa. Tietääkseni tämä havainnollinen menetelmä esitetään kaikilla korkeakoulujen matematiikan peruskursseilla Suomessa ja kokemukseni mukaan myös ulkomailla. Tämän kirjoittaja suositteli menettelyn käyttämistä funktion raja-arvon ja jatkuvuuden käsittelyyn kouluissa [2]. Yliopistokursseilla tämä on arkipäivää. Tältä osin didaktinen matematiikka on jo toteutettu yliopisto-opetuksessa. Sen sijaan se ei ole levinnyt koulukirjoihin siinä määrin kuin olisi toivottavaa.

Opettajankoulutuksen tarkoitus on, että tulevat matematiikan opettajat imevät matematiikan taitojaan yliopistollisilta kursseilta. Yliopistokurssit muuttuvat aina nopeammin kuin koulukurssit, sillä niitä eivät onneksi sido oppisuunnitelmat. Toivoa sopii, että koulujen matematiikan opettajat käyttävät omaa järkeään huolimatta uusista normatiivisista oppimääristä.

Matematiikan kieli ja didaktiikka

Artikkelissa [8] kritisoidaan matematiikkaa epämääräisten symbolien ja sopimusten käytöstä. Eiköhän ma-

temaattinen kieli sittenkin ole ole ihmisten käyttämistä kielistä eräs parhaiten normitetuista ja ymmärrettävistä. Eri maissa käytetyt murteet eivät paljoa poikkea toisistaan. Luulot matematiikan arvosidonnaisuudesta ja kommunikaatiokuiluista käyttäjien välillä johtuvat lähinnä matematiikan osaamattomuudesta. Opettajille, ja myös koululaisille, matematiikka ilmenee valitettavan usein valmiiksi annettuna solidina kokonaisuutena. Tämä ei sinänsä ole paha asia, sillä monet perusasioista ovat vanhoja ja varsin pitkälle pureskeltuja. Niiden opettaminen ja oppiminen ei nykyisin ole kuitenkaan helpompaa kuin aikaisemmin. Pythagoraan lauseen voi keksiä leikkimällä palikoilla, mutta kolmion sivuille piirrettyjen neliöiden pinta-aloja koskeva Pythagoraan väittäjä hahmottuu parhaiten paperille. Kehitystä on tapahtunut: Pythagoras todennäköisesti piirsi kuvion hiekalle. Ymmärtäminen ei tule pelkäämään siitä, että palaset loksahavat kohdalleen.

Didaktikkojen erehdys on, että he luulevat tietävänsä, mitä kouluissa pitää opettaa. Opettamisen ja oppimisen asiantuntemus ei tähän riitä. Luulo matemaattisen tutkimuksen staattisuudesta on virheellinen. Toisaalta matematiikan opetuksessa on vallinnut perinteinen linja. Suuret poikkeamat koulujen ja korkeakoulujen opetuksessa ovat johtaneet katastrofeihin. Matematiikan ymmärtäminen ei ole mahdollista ilman solidia perustusta ja siihen liittyvän ajattelun harjoittelua.

Luonnontieteiden opetuksessa on siirrytty kuvailevaan suuntaan. Esimerkiksi kvarkit ja transistorit ovat perusolemukseltaan niin monimutkaisia, että niiden ymmärtäminen käytettävissä olevilla fysiikan oppitunneilla on mahdotonta. Nykyisessä matematiikan opetuksessa piilee vastaava vaara. Kuvaileva opetus johtaa helposti siihen, että toisen asteen yhtälön ratkaisukaava ja transistorin kuva oppikirjassa ovat samanlaisia; kumastakaan oppilas ei ymmärrä mitään.

Eräänä didaktisen matematiikan ydinajatuksena artikkelin [8] kirjoittajat pitävät matemaattisten symbolien täsmällistä määrittelyä. Symbolit ovat toisarvoisia, käsitteet ovat tärkeitä ja niiden täsmällisessä määrittelyssä on vielä paljon tekemistä koulukursseilla. Koulujen oppikirjojen pahimmat erehdykset ja väärät painotukset löytyvät juuri näistä asioista ja johtuvat useimmiten siitä, että oppikirjojen tekijät eivät itse ole ymmärtäneet asiaa. Tässä ei didaktiikka auta.

Didaktiikan johtavana pyrkimyksenä tulee olla opetuksen parantaminen. Matematiikan opetuksessa edistysaskeleet ovat olleet pieniä. Didaktiikan alan tutkimusraporteista on vaikea löytää tieteelliset kriteeriot täytettäviä riittävän pitkällä aikajaksolla tehtyjä tutkimuksia matematiikan opetuksen vaikuttavuudesta. Raportit ovat yleensä tiedotteita uusista kokeiluista, katso esimerkiksi [5], mutta kokeilujen todelliset vaikutukset jäävät epäselviksi. Pitkän aikavälin testit lähinnä

teknillisten korkeakoulujen uusien opiskelijoiden matematiikan osaamisesta osoittavat laskevaa trendiä. Vastaaavat tiedot ammattikorkeakouluista ovat hälyttäviä. Heikkeniviin opetustuloksiin ei riitä selitykseksi, että nykyisin paljon suurempi osuus ikäluokista pyrkii matematiikkaa käyttävään koulutukseen [1]. Didaktiikalla riittää tehtäväkenttää epäoleellisissa asioissa pyörimisen sijaan. Kriittistä keskustelua kouluissa opetetavasta matematiikasta, oppimääristä ja oppikirjoista käydään Suomessa vähän. Keskustelun pitäisi lisäksi tavoittaa nykyiset matematiikan opettajat.

Viitteet

[1] Martio, O., Osataanko matematiikkaa?, Solmu 3/2001, <http://solmu.math.helsinki.fi>, 28–29.

[2] Martio, O., Järkeä analyysin opetukseen, Dimensio 5/98, 33–38.

[3] Mullis, I., Martin, M. et al., TIMMS 1999, International Mathematics Report, International Study Center, Lynch School of Education, Boston Collage, 2000.

[4] Mathematics Subject Classification (MSC 1991), ZBL, Mathematics Abstracts, 1991.

[5] Program and abstracts, 20th Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association, Helsingin yliopisto, Yliopistopaino, 2003.

[6] Seppälä, M., Laskutaito ja numeroiden lukutaito edelleen tarpeen, Tieteessä tapahtuu 1 (2004), 54.

[7] Tarvainen, K., Opettaja, vaadi perusalgebran osaaminen, Dimensio 5/2003, 34–37.

[8] Tossavainen, T., Sorvali, T., Matematiikka, koulu-matematiikka ja didaktinen matematiikka, Tieteessä tapahtuu 8 (2004), 30–35.

Artikkeli on julkaistu *Tieteessä tapahtuu* -lehden numerossa 2/2004, 42–45 ja se julkaistaan Solmussa *Tieteessä tapahtuu* -lehden luvalla.