Sándor Pálfy:

Värisauvojen käyttö matematiikan opetuksessa

A színesrúd-készlet felhasználása a matematikatanításban; Továbbképzési anyag matematikából 1. A munkaeszközökről
Szerk.: C. Neményi Eszter, Radnainé Szendrei Julianna
Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1976.

Tekstin julkaisuluvasta Solmussa kiitämme seuraavia:
Miklós Pálfy, Sándor Pálfy ja rouva S. Pálfy.

1. Tutustuminen väreihin

1. Eriväristen sauvojen näyttäminen opettajan ohjeen mukaisesti.
Ohje voi olla suullinen, esimerkiksi: *Nostakaa vaaleapunainen sauva, punainen sauva, jne.* Tehtävä on mielenkiintoisempi, jos paperista leikataan taululle asetettavia sauvojen värisiä suurennettuja levyjä. Ohje annetaan niiden avulla, esim. asetamme yhden levyn taululle ja oppilaat laittavat pulpetille sitä vastaavan sauvan.

2. Arvoituspeli
Opettaja piilottaa yhden sauvan niin, etteivät oppilaat näe minkä värinen se on. Kysymys on, minkä värinen sauva on piilotettu. Oppilaat asettavat yhden sauvan pulpetille (arvaus) – Kuinka moni ratkaisi tehtävän oikein?
Voimme vähentää vastauksien määrää, esim. kerromme, että piilotettu sauva ei ole punainen, eikä viininpunainen; sauva siis on keltainen tai sininen (keltainen tai oranssi, vaalean– tai tummansininen). Näin tehtävän ratkaisuksi ei riitä pelkkä arvaus.
Peliä voi pelata myös niin, että piilotetaan kaksi sauvaa ja samalla oppilaat asettavat kaksi sauvaa pulpetille. Näytämme kaksi piilotettua

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

sauvaa ja kysymme, montako sauvaa heillä on oikein. (Onko oppilailla samanlainen sauva kuin se, jota näytettiin. Voi olla 1, 2, tai ei yhtään oikein.)
Voidaan jatkaa useamman sauvan avulla (4-5) ja tehdä taulukko, kuinka monella oli 1, 2, ... oikein.
Tehtävän ratkaisemiseen vaaditaan tarkempaa päättelyä, jos ratkaisusta annetaan enemmän tietoa. Kysymme esim. näin: *Olen piilottanut kaksi sauvaa, jotka eivät aikaisemmin olleet piilotettuna. Minkävärisiä ne voivat olla?*
Nyt yksi on samanlainen kuin jo aikaisemmin piilotettu, mutta toinen ei ole. Minkävärisiä sauvat voivat olla?
Nyt olen piilottanut kaksi samanväristä sauvaa kuin ne, jotka olivat aikaisemmin esillä. Minkävarisiä ne voivat olla?

3. kyllä-ei-peli ja sen valmennus

Piilotamme yhden sauvan. Oppilaiden tulee arvata, minkävärinen se voi olla. Oppilas sanoo yhden värin, vastaus on kyllä tai ei. Kuka keksii sauvan värin?
Oppilailla on enemmän mahdollisuuksia havaintoihin ja päätelmiin, jos esim. kun piilotamme kolmannen sauvan, sanomme: *Nyt piilotan sauvan, jollainen ei ole ollut vielä piilotettuna.* Tai vähennämme vaihtoehtoja: *Nyt piilotan sellaisen, joka oli jo kerran piilotettuna, jne.*

4. Järjestäminen värien mukaisesti

Oppilaiden tehtävänä järjestää värisauvat niin, että samanväriset ovat samassa joukossa, esim. kaikki punaiset, kaikki valkoiset, jne ovat omassa joukossaan. Jos pulpetille on asetettu paperi sauvojen alle, voidaan niiden ympäri piirtää kynällä. (Tämä on joukon käsitteen valmennusta.) Voimme antaa myös nimiä joukoille, esim. punaiset, mustat, jne.

5. Järjestäminen oman valinnan mukaan

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

Oppilaille annetaan tehtäväksi järjestää värisauvojaan mielensä mukaan: esimerkiksi toiset erottavat niitä värien mukaisesti, toiset jarjestävät niin, että jokaisessa joukossa on kaikenlaisia värejä, toiset ehkä järjestävät niin, että yhdessä joukossa on vaaleapunaisia, viininpunaisia ja punaisia, toisessa joukossa vaaleasinisiä ja tummasinisiä jne. Tärkeintä on, että järjestäminen tapahtuu jonkin säännön mukaan. Tällainen työskentely on tärkeää, jotta oppilaat voisivat työskennellä myös itsenäisesti, ilman opettajan ohjausta.

6. Kahden tai useamman erivärisen sauvan näyttäminen samanaikaisesti

Esim. *Ota oikeaan käteen tummansininen sauva, vasempaan käteen punainen. Näytä samanaikaisesti valkoinen ja musta. Vasemassa kädessä on punainen ja valkoinen, oikeassa kädessä on keltainen ja oranssi jne.*

7. Paperin väritys sauvan värin mukaisesti

Oppilaat asettavat jonkin, esimerkiksi mustan sauvan paperille ja piirtävät sen reunoja seuraten sauvan ympäri. Suorakulmio väritetään sauvan värin mukaisesti.

8. Eriväristen sauvojen yhdistäminen

Oppilaat laittavat erivärisiä sauvoja paperille (sekaisin) ja ohjeen mukaisesti yhdistävät niitä viivalla. Esimerkiksi punainen ja vaaleasininen, viininpunainen ja keltainen, valkoinen, musta ja violetti.

9. Äänetön leikki

Näytämme erivärisiä sauvoja. Oppilaat laittavat samanvärisiä sauvoja peräkkäin pulpetille, niistä tulee ”juna”. Kun juna on valmis, oppilaat kertovat minkävärisiä vaunut ovat. (Kuten aina, heidän pitää luetella myös päinvastaisessa järjestyksessä.) Oppilaat voivat rakentaa junia myös mielensä mukaan ja luetella niiden värejä.

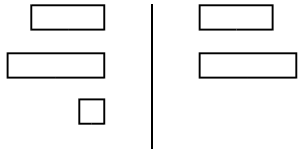
10. Junien rakentaminen yhdestä, kahdesta tai kolmesta erivärisestä sauvasta, esimerkiksi valkoisesta ja vaaleasinisestä; tai kaikki vaunut

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

ovat vain punaisia; tai sääntö on, että peräkkäin ei voi olla samanvärisiä vaunuja.

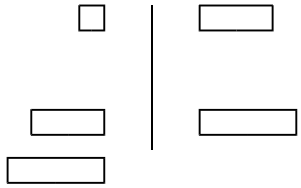
11. Sääntöpelien valmennus

- Piirrämme taululle viivan ja sen molemmille puolille asetamme yhden, esimerkiksi vaaleapunaisen sauvan, niiden alle taas molemmille puolille esimerkiksi punaisen sauvan, sitten vain vasemmalle puolelle yhden sauvan, esimerkiksi viininpunaisen, ja oppilaat jatkavat asettamista. *Sääntö: molemmilla puolilla on samanvärinen sauva.*

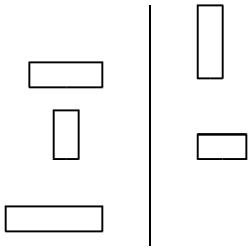


- Peli on vaikeampi jos viivan molemmilla puolella on eriväri nen sauva, mutta toisessa rivissä vasemmalla puolella on samanlainen sauva kuin ensimmäisen rivin oikealla puolella.

Esimerkiksi:



- Voimme muuttaa sääntöä niin, että oikealla puolella on samanvärinen sauva, mutta sen sijainti on erilainen, sitä käännetään 90° tai 45° asteella.



- Asetetaan taululle valkoinen, vaaleapunainen ja vaaleasininen sauva vierekkäin, sitten taas valkoinen (oppilaat asettavat samanvärisiä sauvoja pulpetille). Oppilaiden tulee jatkaa jonoa. Jos he eivät huomaa toistoa, asetetaan yksi vaaleapunainen sauva taululle toiston

mukaisesti. Näin oppilaat osaavat jatkaa jonon rakentamista säännön mukaisesti.

- Voimme valmistaa erilaisia jonoja värijärjestyksessä ja myös oppilaat voivat keksiä sääntöjä. Näytetään esimerkkejä. Yksinkertaisuuden vuoksi sauvoista kirjoitetaan vain alkukirjain.

  v v v ...

  v vp v ...

  v vp vs v vp vs ...

  v o o v o o...

  p p vp vp k k p p

  vnp v v v vnp v v v ... jne.

(v-valkoinen, vp- vaaleapunainen, vs-vaaleasininen, o-oranssi, p-punainen, k-keltainen, vnp-viininpunainen, ts-tummasininen, m-musta)

Voimme asettaa sauvat niinkin, että sääntö on vain osittainen eikä määrää koko jonoa. Esimerkissä *a* tarkoittaa minkäväristä sauvaa tahansa.

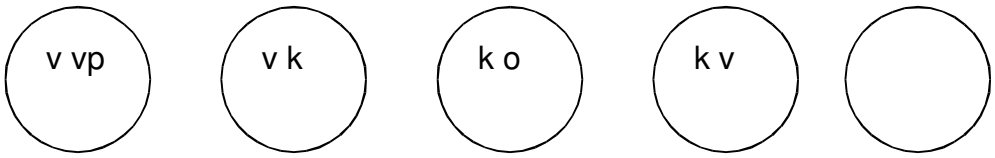
vp a vp a vp a ...

v a a v a a v ...

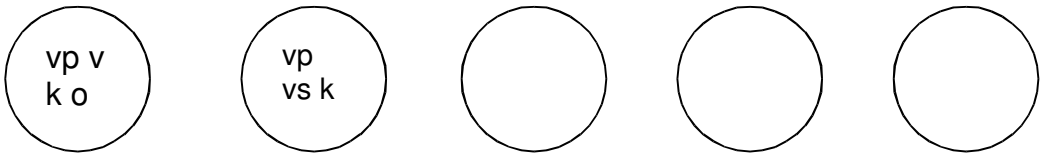
a k a k a k ... jne.

- Joukkojen muodostaminen: taululle piirretään 3-4 ympyrää (oppilaat piirtävät paperille). Asetetaan toiseen ympyrään kaksi vaaleasinistä sauvaa ja myös toiseen kaksi vaaleasinistä sauvaa. Oppilaiden tehtävänä on jatkaa ja asettaa sauvat muihin ympyröihin (säännön mukaisesti). Myöhemmin tehtävää voi mutkistaa niin, että seuraavaan ympyrään asetetaan enemmän tai vähemmän samanvärisiä sauvoja; tai seuraava joukko voi poiketa edellisestä niin, että sijoitetaan toisen sauvan tilalle toisenvärinen sauva. Esimerkiksi:

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

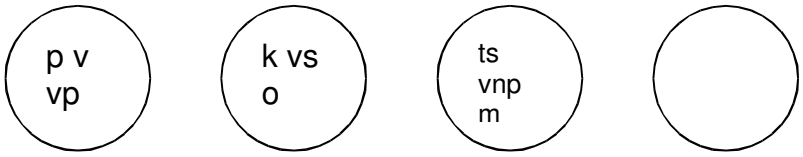


jne.



jne.

Sääntö voi olla myös, että seuraavassa joukossa on aina sauva, jonka väristä ei ollut edellisissä joukoissa, esimerkiksi:



jne.

Tavoite mainituissa esimerkeissä:

- Tutustuminen siihen, tuntevatko oppilaat värit, onko joku osittain värisokea.
- Harvoin käytössä olevien värien opettaminen (esimerkiksi oranssi, viininpunainen, jne.).
- Myöhemmin esiintyvien matemaattisten käsitteiden valmistelu (esimerkiksi joukko, jono, funktio, relaatio, jne.).
- Totuttaminen siihen, että ohjeet pitää toteuttaa yksiselitteisesti.
- Kasvattaminen omaperäisyyteen, kiinnostuksen herättäminen matematiikkaa kohtaan ja ajattelun kehittäminen.

II. Vertailu suuruuden mukaan

1. Mikä on suurempi, pienempi tai yhtä suuri?

- Oppilaat asettavat kaksi sauvaa pulpetille ja heidän tulee sanoa, kumpi on pidempi. Kahden sauvan väliin asetetaan sopiva paperille kirjoitettu

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

merkki: <, > tai =. On hyvä, jos opettaja ratkaisee tehtävän myös taululla.

- Näytämme yhden sauvan (asetamme saman taululle) ja laitamme tämän viereen yhden merkin. Esimerkiksi:

Oppilaat asettavat saman sauvan ja merkin pulpetille, sitten tulee asettaa merkin viereen sopiva sauva. Jos on useita sopivia sauvoja, kuten vasemman puoleisessa esimerkissä, kannustetaan oppilaita etsimään useita ratkaisuja tai kaikki ratkaisut (tietenkin samanlaista sauvaa voi käyttää vain kerran). Sauvoja, jotka ovat ratkaisuja, kerätään samaan joukkoon. Lopuksi voimme piirtää viivan niiden ympäri.

- Oppilaat asettavat suurempi-, pienempi- tai yhtä suuri kuin -merkkejä pulpetille. He laittavat sauvoja merkkien molemmille puolelle niin, että tuloksena on oikeita ratkaisuja merkkien mukaisesti. Jälleen kannustetaan oppilaita etsimään mahdollisimman monia ratkaisuja.

- Sauvojen luokittelu värien mukaan: oppilaat asettavat esimerkiksi mustat sauvat pulpetille (niitä voidaan laittaa päällekkäin). Niistä oikealle asetetaan sauvat, jotka ovat pidempiä (lyhempiä) kuin mustat ja mustista vasemmalle sauvat, jotka ovat niitä lyhempiä (pidempiä). Voidaan jatkaa luokitusta niin, että esimerkiksi toiseen joukkoon kerätään vaaleasiniset, toiseen joukkoon mustat ja kolmanteen joukkoon ne, jotka ovat pidempiä kuin vaaleasiniset ja lyhempiä kuin mustat.

2. Erilaisia vertailuja

- Sauvat ovat peräkkäin ja niiden väliin tulee kirjoittaa *pienempi kuin, suurempi kuin ja yhtäsuuri* -merkkejä, vastaten niiden pituusvertailua.

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

- Eri suunnassa olevien sauvojen vertailu pituuden mukaan:

- Tulee etsiä merkkeihin sopivia sauvoja:

< < < jne.

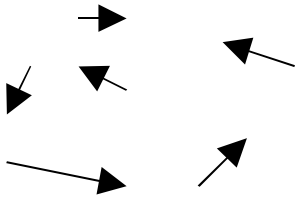
3. Vertailupelejä:

- Asetetaan sauvoja paperille. Tehtävänä on piirtää nuolia sauvojen välille. Nuolen kärki osoittaa lyhemmästä pidempään päin (tai voi olla päinvastoinkin).

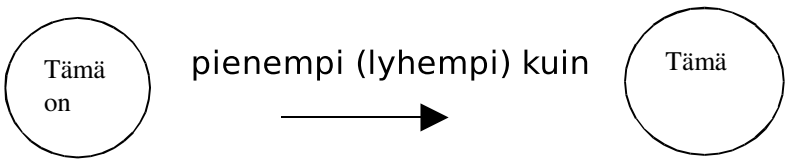
Esimerkiksi:

- Piirretään taululle nuolia. Oppilaiden tehtävänä on asettaa niitä vastaten sauvoja pulpetille.

Esimerkiksi:



Nuolen merkityksen voi kuvata näin:



© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

Tai: pienempi (lyhempi) ⟶ suurempi (pidempi)

- Jos oppilaat tuntevat jo lukuja, voi tehtävää muuttaa. Paperilla olevia sauvoja yhdistetään nuolilla niin, että nuolen kärki osoittaa sauvaa, joka on yksi tai kaksi, jne. yksikköä pidempi (lyhyempi).

Jos oppilaat sauvoja valintessaan ottavat laatikosta suljetuin silmin kourallisen sauvoja ja työskentelevät niiden kanssa, voidaan välttää se, että oppilaat katsovat toistensa ratkaisuja. Kaikki työskentelevät omatoimisesti.

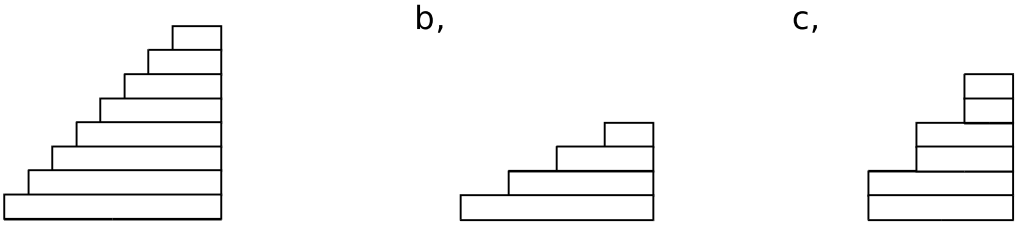
4. Kyllä-ei-pelin valmennus:

Piilotetaan yksi sauva, oppilaat eivät näe sitä. He voivat kysyä vain, mitä sauvaa pidempi tai lyhyempi se on. Esimerkiksi: *Onko se vaaleapunaista pidempi? Onko se sinipunaista lyhempi? Onko sen pituus punaisen pituutta pienempi? jne.* Vastataan kyllä tai ei. Oppilaiden pitää keksiä, mikä sauva on vastausten mukainen. (Tämä ei ole enää arvausta.)

5. Portaiden rakentaminen sauvoista:

Voidaan rakentaa erilaisia portaita riippuen siitä, miten korkea yksi askelma on tai mihin suuntaan porrasta rakennetaan. Esimerkiksi:

a, b, c,



6. Enemmän, vähemmän tai yhtä monta?

- Oppilaat jakavat kahteen joukkoon kumpaankin samanvärisiä sauvoja, alussa vain muutamia. (Toinen kasa voi tarkoittaa poikia, toinen kasa tyttöjä.)

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

Järjestetään sauvoja pareittain kunnes toisesta joukosta sauvat loppuvat. (Järjestäminen pareittain tapahtuu niin, että molemmista kasoista otetaan yksi sauva.)
Kummassa kasassa oli enemmän sauvoja? (Siinä, johon jäi ainakin yksi sauva pareihin järjestämisen jälkeen.) Kun tämä on todettu, oppilaat asettavat sopivan merkin joukkojen välille.

- Paperille piirretään kauas toisistaan 2-3 ympyrää. Kehotetaan oppilaita ottamaan laatikostaan kourallinen valkoisia kuutioita. Yksi kuutio sijoitetaan vuoron perään kuhunkin ympyrään niin kauan, että kuutiot loppuvat. Jakamisen jälkeen vertaillaan ympyröitä pareittain ja tutkitaan kustakin parista, kummassa on enemmän kuutioita vai onko niitä yhtä monta. Merkit asetetaan tämän mukaisesti.

- Oppilaat laittavat paperille kaksi kasaa samanvärisiä sauvoja kauas toisistaan. He järjestetävät ne pareittain niin, että sauvat yhdistetään viivoin, yksi kummastakin kasasta. Viivojen piirtämisen jälkeen (vastaavuus) oppilaat toteavat, kummassa kasassa on enemmän sauvoja, vai onko molemmissa yhtä monta. Tämän jälkeen he kirjoittavat sopivan merkin kasojen välille.

- Voimme vaikeuttaa tehtävää niin, että toiseen kasaan otetaan kuutioita ja toiseen esimerkiksi punaisia sauvoja, ja yhdistetään niitä viivoilla. Tämän tehtävän voi tehdä lapsille läheisemällä tavalla niin, että pidetään kuutioita vaikka koirina ja punaisia sauvoja koirankoppena. Etsimme vastauksia tällaisiin kysymyksiin: *Onko kaikilla koirilla koirankoppi? Onko kaikissa koirankopeissa koira? Kumpia on enemmän?*

7. Muut sääntöpelit

- Piirrämme taululle pystysuoran viivan ja asetamme värisauvan sen vasemmalle puolelle. Oikealle puolelle laitamme pidemmän tai lyhemmän sauvan, riippien siitä, mikä on sääntö. Sääntöä vastaavasti

laitamme seuraavallekin riville kaksi sauvaa. Oppilaat jatkavat kolmatta riviä.

Opettajan tehdessä tehtävää taululle käyttävät oppilaat omia värisauvojaan ja valitsevat itse niitä. Vasta kun kaikki jo tietävät ”salaisuuden”, eli säännön, saavat oppilaat kertoa sen. Esimerkiksi: *Oikealla puolella oleva sauva on aina pitempi. Sauvan vasemmalla puolella on aina lyhempi sauva.*

- Sääntö on, että viivan molemmille puolille tulee yhtä monta sauvaa. Alussa pelataan samanvärisillä sauvoilla, sitten vaikeutetaan tehtävää niin, että sauvat ovat eripituisia. Esimerkiksi vasemmalle puolelle tulee yksi pieni kuutio, oikealle puolelle yksi keltainen sauva. Tai vasemmalle puolelle tulee kolme vaaleapunaista, oikealle puolelle kolme oranssia sauvaa.

Tuntien tavoite on:

- vahvistaa pienempi, suurempi (vähemmän, enemmän) ja yhtäsuuri (yhtä monta) -käsitteitä ja opettaa niiden merkitystä;
- valmentaa matemaattisia taitoja leikillisesti;
- tehdä matematiikka suosituksi;
- kehittää ajattelua.

III. Lukukäsityksen valmennus

1. Inventaarion laatiminen sauvoista

- Oppilaat piirtävät paperille yhtä monta viivaa kuin heillä on punaisia tai sinipunaisia jne. sauvoja laatikoissaan. (He ottavat laatikosta opettajan ohjeen mukaan sauvoja yksi kerrallaan, panevat niitä pulpetille ja aina ottamisen jälkeen piirtävät yhden viivan paperille.)

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

- Kahden tai useamman erivärisistä sauvoista tehdyn luettelon jälkeen voimme antaa oppilaille tehtäväksi päättää, mitä sauvoja on enemmän.

Tehtävän voi ratkaista niin, että oppilaat laittavat pöydällä olevista sauvoista laatikkoon peräkkäin yhden valkoisen ja mustan, tai yhden punaisen ja keltaisen, jne. Vähiten on sitä väriä, joka loppuu ensin.

- Oppilaat voivat päättää suoraan luettelosta, mitä sauvoja on eniten. Esimerkiksi oppilaat merkitsevät kustakin joukosta yhden viivan ja jatkavat näin niin kauan kuin mahdollista. Siinä, mistä viivat loppuvat ensiksi, on vähiten sauvoja.

2. Luku, laskemisen ratkaisuna:

- Asetetaan kuutioita pulpetille ja lasketaan samaan aikaan niiden lukumäärää. Lopuksi kuutioiden viereen asetetaan sopiva lukukortti.

- Näytämme lukukortin ja oppilaiden tulee laittaa pulpetille lukukorttia vastaava määrä kuutioita.

- Oppilaat jakavat laskematta esimerkiksi kaikki valkoiset kuutiot 5-6:een joukkoon. Sitten he laskevat, kuinka monta kuutiota on kussakin joukossa ja laittavat joukkojen viereen siihen sopivan lukukortin. Voimme tehdä tehtävän niinkin, että asetetaan pulpetille 3-4 lukukorttia ja niiden viereen tulee asettaa yhtä monta värisauvaa kuin lukukortit näyttävät.

- Oppilaat laittavat paperille 4-5 joukkoa kuutioita ja paperin toiselle puolelle lukukortteja. Heidän tulee yhdistää viivalla joukot ja niitä vastaavat lukukortit.

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

3. Luku mittauksen tuloksena

Näillä tunneilla oppilaat saavat tehtäviä, joissa heidän tulee mitata pidemmän sauvan pituus lyhemmillä sauvoilla (joka on yksikkö). Alussa valitaan valkoinen kuutio yksiköksi, myöhemmin voimme valita myös toisen sauvan yksiköksi, esimerkiksi vaaleapunaisen, punaisen, jne.

- Oppilaat laittavat pulpetille yhden sauvan, esimerkiksi mustan. Sen viereen he asettavat niin monta valkoista kuutiota, että niiden pituus on yhteensä yhtäsuuri kuin mustan sauvan pituus. Sauvoista voi lukea vastauksia kysymyksiin:

  Kuinka monta kuutiota käytettiin laskemiseen? (Oppilaat laskevat.)
  Kuinka monta valkoista kuutiota musta sauva on? (Seitsemän.)
  Mikä mustan nimi on? (Seitsemän.)
  Ottakaa lukukortti, joka näyttää, kuinka monta valkoista musta on!

- *Laskekaa oranssin sauvan pituus vaaleapunaisilla sauvoilla!* Tällä kertaa kysymykset ovat esimerkiksi:

  Kuinka monta vaaleapunaista tarvittiin?
  Jos vaaleapunainen on yksi, mikä oranssi on?
  Mikä on oranssin nimi?
  Näyttäkää sopiva lukukortti!

(Voimme kysyä ennen murtolukujen opettamista: Jos vaaleapunainen on yksi, kuinka monta valkoinen on? Puoli.)

- Erilaisia mittauksia, esimerkiksi oppilaiden tehtävänä on määrittää montako punaista sauvaa sopii peräkkäin vihkon sivun korkeuteen, tai montako oranssia sauvaa mahtuu pulpetin leveyteen.

4. Ositus; maton teko; yhteys lukuihin

Oppilaat asettavat yhden sauvan pulpetille ja laskevat sauvan pituuden erilaisilla, lyhyemmillä sauvoilla. Vieräkkäin olevat sauvat muistuttavat moniväristä mattoa; siksi sanotaan, että se on ”maton tekoa”.

Tehtävien vaikeustaso voi vaihdella riippuen oppilaiden taidoista ja kyvyistä. Esimerkiksi jos sauva on pitkä, voi tehtävän ratkaista useilla

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

tavoilla. On helpompi ratkaista tehtävä oman valinnan mukaisilla sauvoilla kuin annetuilla sauvoilla. Alussa käytetään lyhyempiä sauvoja.

- Sanomme oppilaille, että heidän on asetettava jokin, esimerkiksi violetti, sauva laatikon kannelle. Heidän on laskettava sen pituus useilla tavoilla, käyttäen lyhyempiä sauvoja.

- ”Maton teon” mahdollisuuksia on paljon. Näin voi saada kokemusta myös jaollisuudesta, kertolaskusta ja lukuteoriasta, jos tehtävässä käytetty sauva on pitkä ja samassa rivissä voi olla vain samanvärisiä sauvoja.

- Lisäehtona on esimerkiksi, että samassa rivissä voidaan käyttää kahta eriväristä sauvaa. Oppilaiden itsenäisen työn jälkeen kerrotaan kokemuksista. Voimme odottaa tällaisia toteamuksia:
    - Violetti on yhtä pitkä kuin yksi punainen ja yksi vaaleanpunainen, tai yksi vaaleanpunainen ja yksi punainen, tai vaaleanpunainen ja vaaleanpunainen ja vaaleanpunainen, tai kolme kertaa vaaleanpunainen, jne. (Oppilaat lukevat ratkaisuja matostaan.)
    - Vaaleansinisen voi laskea vain kolmella eri tavalla.
    - Keltaisen (sauva vastaa alkulukua) voi laskea vain valkoisilla kuutioilla, on vain yksi ratkaisu.
    - Violetin (kuusi) voi laskea monilla eri tavoilla niin, että samassa jonossa on vain samanvärisiä sauvoja. (Valkoisia, vaaleanpunaisia, vaaleansinisiä – nämä vastaavat kuuden jakajia.)

Jos oppilaat osaavat jo kirjoittaa lukuja ja yhteen- ja vähennyslaskun merkkejä, on ”maton teon” jälkeen kirjallinen tehtävä: vihkoon kirjoitetaan matematiikan kielellä, mitä on ratkaistu. (Taitavammat oppilaat voivat kirjoittaa enemmän ja hitaammat oppilaat voivat kirjoittaa kykynsä mukaan.)

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

Esimerkiksi:

6 = 5 + 1

6 = 1 + 5

6 = 2 + 4

6 = 4 + 2 jne.

6 = 1 + 2 + 3

Tai näin:

6
5 + 1
1 + 5
2 + 4
4 + 2 jne.

(Voidaan kehua oppilaita, jotka ”tekevät mattoja” systemaattisesti, tai jotka löytävät kaikki ratkaisut.)

Voidaan harjoitella myös näin:

- *Ota ensin käteesi yksi sauva ja sitten kaksi sauvaa toiseen käteen niin, että kaksi sauvaa ovat yhdessä yhtä pitkät kuin sauva toisessa kädessäsi.*
- *Ota keltainen sauva toiseen käteen, sitten ota kaksi sauvaa toiseen käteen niin, että kaksi sauvaa yhdessä ovat pidemmät kuin keltainen (joka on toisessa kädessäsi).*
- *Ottakaa kolme sauvaa laatikosta silmät suljettuna. Pisin tulee oikeaan käteen ja toiset kaksi vasempaan käteen. Silmät pidetään vieläkin suljettuina. Kertokaa, ovatko kaksi sauvaa vasemmassa kädessä yhteensä lyhyemmät, pidemmät vai yhtä pitkät kuin sauva oikeassa kädessä.*

Vertailujen jälkeen voimme kysyä, kenellä kaksi sauvaa olivat yhtä pitkät kuin kolmas, jne. Voimme myös tehdä taulukon erilaisista tuloksista.

Tällaiset kokemukset eivät ainoastaan vahvista epäyhtälön ja yhtälön käsitettä, vaan ne valmistavat oppilaita ymmärtämään taulukon

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

laatimista. Ne valmistavat myös kombinatoriikan ja todennäköisyyslaskennan tehtäviin.

Tuntien tavoite on:

- auttaa lukukäsitteen kehittymistä
- ”maton teko” vahvistaa lukukäsitetta ja valmistaa laskutoimituksia
- kokemuksien kerääminen asioista, jotka tulevat esiin myöhemmin (esimerkiksi jaollisuus, monikerta, alkuluku, jne.)
- itsenäistä tietojen hankintaa auttavien taitojen kehittäminen.

IV. Laskutoimitukset

1. Yhteenlasku ja vähennyslasku

- Valkoinen on tässä yksikkö. Oppilaat asettavat pulpetille kaksi tai useampia sauvoja peräkkäin. Heidän tulee etsiä sauva, jonka pituus on yhtä pitkä kuin pulpetilla olevien sauvojen pituus yhteensä. Kun ratkaisu löydetään, oppilaat lukevat sauvoista esimerkiksi: punainen ja vaaleansininen ja valkoinen ovat yhteensä yhtä pitkät kuin tummanpunainen. Oppilaat kertovat havainnoistaan myös matematiikan kielellä: neljä ja kolme ja yksi on kahdeksan. Sitten he kirjoittavat vihkoon: 4 + 3 + 1 = 8.

- Täydentäminen sauvoilla: oppilaat asettavat pulpetille yhden sauvan, esimerkiksi punaisen ja sen viereen lyhyemmän, esimerkiksi vaaleanpunaisen, tai pidemmän, esimerkiksi violetin. Tehtävänä on asettaa lyhyemmän sauvan viereen toinen sauva niin, että kaksi riviä ovat yhtä pitkät. Kaikki oppilaat näyttävät, millaisella sauvalla täydensivät lyhyemmän.

Voidaan myös sallia täydentäminen useammilla sauvoilla. Tällöin oppilaat voivat näyttää useampia sauvoja, esimerkiksi kahden asemesta 1 + 1, neljän asemesta 2 + 2, jne.

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

Myös tässä tapauksessa kerrotaan kokemuksista, esimerkiksi:
Punaisen viereen piti panna keltainen, yhdessä ne ovat yhtä pitkiä kuin tummansininen.
Oppilaat myös täydentävät:

4 + □ = 9,

4 + 5 = 9 jne.

Tällaisia tehtäviä voi esittää eri tavoilla. Esimerkiksi: Ajattelen erästä sauvaa (lukua). Jos laitan sen viereen punaisen, niin yhdessä ne ovat yhtä pitkiä kuin violetti. Mitä sauvaa ajattelen?

- Vähennyslasku sauvoilla: Lähtökohtana on yhteenlaskutehtävä, esimerkiksi kysytään luokalta, montako punainen ja vaaleansinisen ovat yhdessä (4+3). Oppilaat asettavat pulpetille nämä kaksi sauvaa ja niiden viereen vastaavan sauvan (mustan). Tämän jälkeen he ottavat pois yhden sauvan, esimerkiksi punaisen, ja jäljelle jääneistä sauvoista he lukevat tuloksen ja vastaavat kysymyksiin:

  Paljonko jää, kun vähennetään seitsemästä kolme? Paljonko jää, kun vähennetään seitsemästä neljä? Paljonko jää, kun vähennetään seitsemästä neljä, sitten kolme? Ajattelen erästä lukua. Sain sen tulokseksi, kun vähensin seitsemästä kolme. Mikä luku se on?

  Aluksi kerrotaan sanallisesti, sitten kirjoitetaan laskutoimituksilla, esimerkiksi:

  7 – 3 = 4

  7 – 4 = 3 jne.

2. Kertolasku ja jakolasku

- Tehtävänä on ”maton tekeminen” yhden sauvan viereen. Nyt käytetään samanvärisiä lyhyempiä sauvoja. Oppilaat toteavat esimerkiksi, että violetti on yhtä pitkä kuin vaaleansininen ja vaaleansininen (kaksi kertaa vaaleansininen) tai vaaleanpunainen ja vaaleanpunainen ja vaaleanpunainen (kolme kertaa vaaleanpunainen).

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

Tuloksia kirjoitetaan vihkoon:

$6 = 3 + 3 = 2 \cdot 3$

$6 = 2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$

$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \cdot 1$

- ”Matot”, jotka tehtiin kertolaskun ymmärtämiseksi, heijastavat myös jakolaskun ydintä. Kertolaskun opettamisen aikana kysyttiin, montako lyhyempää sauvaa tarvitaan, jotta ne olisivat yhdessä yhtä pitkiä kuin yksi pidempi sauva. Nyt kysytään, montako lyhyempää sauvaa pidempi sauva sisältää, tai montako kertaa lyhyempi (esimerkiksi keltainen) sisältyy pidempään (esimerkiksi oranssiin). Tuloksia kerrotaan sanallisesti ja kirjoitetaan matematiikan kielellä.

- Jakojäännöksellisen jakolaskun ymmärtämiseksi voidaan myös käyttää ”maton tekemistä”. Ehtona on, että tehtävän voi ratkaista vain samanvärisillä sauvoilla. Osa pitkästä sauvasta jää peittämättä. (Tämän osan voi peittää kuutioilla). Esimerkiksi jos laitetaan vaaleanpunaisia (2) sauvoja tummansinisen (9) viereen, voidaan niitä laittaa vain neljä. Voimme lukea, että tummansinisessä (9) on neljä vaaleanpunaista (2) ja lisäksi yksi valkoinen (1).

- Ositusjakolasku. Käytetään värisauvaa, jolla on jakaja, siis jolla jakamisen jälkeen ei jää jakojäännöstä. Esimerkiksi oranssi ja keltainen, viininpunainen, punainen ja vaaleanpunainen. ”Maton teon” jälkeen voimme lukea, moneenko yhtäsuureen osaan pitempi sauva on jaettu. Esimerkiksi viininpunaisen puolikas on punainen, sen puolikas on vaaleanpunainen, eli 8:n puolikas on 4, 4:n puolikas on 2. Jos jaetaan 8 kahteen osaan, saamme 4, jos jaetaan 8 neljään yhtäsuureen osaan, saamme 2, jne.

<u>Tuntien tavoite on:</u>

- hankkia kokemuksia laskutoimitusten ymmärtämiseksi,
- tunnistaa yhtäläisyyksiä laskutoimituksien välillä,
- tehdä havaintoja laskutoimitusten ominaisuuksista,
- kehittää loogista ajattelua.

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

V. Muita (Esimerkkejä)

1. Yhtälöiden ratkaiseminen sauvoilla:

Nuorille oppilaille voidaan antaa myös tehtäviä, joissa tulee käyttää annettua ehtoa ja keksiä ajateltu luku tai sauva. Esimerkiksi: *ajattelen erästä lukua (sauvaa), lisään siihen 3 (vaaleansininen) ja näin saan 10 (oranssi). Mikä luku se on?*

Oppilaat voidaan totuttaa siihen, että samaan aikaan, kun kerromme tehtävän, he laittavat pulpetille sauvan, jonka olen lisännyt ajateltuun lukuun. Sitten he asettavat sen viereen sauvan, jonka saamme tulokseksi, kun olemme lisänneet 3.

Ajateltu luku	vaaleansininen
oranssi	

Tämän jälkeen oppilaat etsivät vaaleansinisen vierestä puuttuvan sauvan (musta). Se vastaa ajateltua lukua.

Toinen esimerkki: Ajattelen erästä lukua. Jos vähennän tästä neljä, saan viisi. Mikä on ajateltu luku?

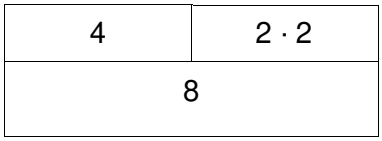
Tehtävän ratkaisu sauvoilla: Oppilaat asettavat pulpetille punaisen sauvan (4) (joka oli vähennetty ajatellusta luvusta) ja laittavat keltaisen (5) sen viereen (tämä jäi vähentämisen jälkeen). Sitten etsitään sauva, josta 4 oli vähennetty (tummansininen).

Myös vaikeampia tehtäviä voi ratkaista sauvoilla. Esimerkiksi: Ajattelen erästä lukua. Sen kaksinkertainen määrä on 4 ja nelinkertaistus on 8. Mikä on ajateltu luku?

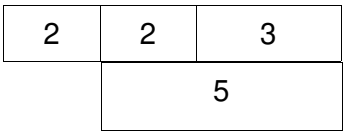
Tässä tapauksessa ratkaisu alkaa niin, että oppilaat asettavat lukua neljä vastaavan sauvan pulpetille ja sen alle kahdeksaisen sauvan. Sitten he

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

etsivät, millä kahdella sauvalla voi täyttää puuttuvan sauvan paikan, eli mikä kaksi sauvaa tulevat nelosen viereen.



Vielä toinen esimerkki: Ajattelen erästä lukua. Sen puolikkaaseen lisätään kolme ja niin saadaan viisi. Mikä on ajateltu luku?
Tehtävän ratkaisu sauvoilla: Oppilaat laittavat kolmossauvan alle viitossauvan, sitten he lukevat, mihin lukuun on lisätty kolme ja etsivät, minkä luvun puolikas se on:



Voidaan antaa myös sellaisia tehtäviä, joissa sauvoja on laitettu valmiiksi pulpetille ja oppilaat keksivät itse niistä tehtäviä. Sauvoja voidaan käyttää myös tehtävien ratkaisujen tarkastamiseen. Jos oppilaille on omatoiminen tehtävä, halutaan tietää kuinka monella on oikea ratkaisu. Pyydämme oppilaita (kun kaikki ovat valmiit) näyttämään tehtävän ratkaisua vastaavan sauvan. Näemme heti, kenellä on oikea, kenellä väärä ratkaisu.

2. Yksinkertaisia kombinatoriikan tehtäviä:

- *”Maton tekeminen” valitun sauvan viereen, etsien kaikki mahdolliset ratkaisut.*
- *Lippujen laatiminen kolmesta erivärisestä sauvasta. Montako mahdollisuutta on kolmiväristen lippujen laatimiseen?*
- *Kolmesta, neljästä, jne. erivärisestä sauvasta valitaan kaksi sauvaa. Montako eri mahdollisuutta on valita kaksi sauvaa niin, ettei valita kahdesti samoja sauvoja?*

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

3. Sääntöpelit:

Tunnettuihin peleihin voidaan lisätä laskutoimituksia koskevia sääntöjä. Esimerkiksi sääntönä voi olla:

- *oikealla puolella on sauva, joka on kahdella pidempi,*
- *vasemmalla puolella oleva sauva on oikealla puolella olevan sauvan puolikas,*
- *oikealla puolella oleva sauva on pituudeltaan yhtä pidempi kuin kaksi kertaa vasemmalla puolella oleva sauva.*

4. Geometria:

- *Paperin reunan ympäri kierretään värisauvoilla. Lasketaan, montako sauvaa käytettiin ”aitaan”. (Mikä on ympärysmitta?)*
- *Piirrämme suorakaiteen paperille ja peitämme sen aukoitta valkoisilla kuutioilla. Montako kuutiota tarvittiin peittämään suorakaide. Montako tarvitsisimme, jos käyttäisimme vaaleanpunaisia sauvoja?*
- *Pieneen laatikkoon (esimerkiksi tulitikkulaatikkoon) laitetaan kuutioita. Oppilaiden tulee laskea, montako kuutiota tarvittiin.*

Voimme antaa tehtävän myös niin, että oppilaat tekevät laatikon, joka sisältää 24 kuutiota, tai piirtävät suorakaiteen, joka voidaan peittää 24:llä kuutiolla.

5. Tutustuminen murtolukuihin

Kaikki tehtävät, jotka tulivat esiin kerto- ja jakolaskun opettamisen yhteydessä, sopivat myös murtolukukäsitteen pohjustukseen.

Esimerkiksi:

- *Montako vaaleansinistä sauvaa mahtuu punaiseen?*
- *Monesko osa punaisesta vaaleanpunainen on?*
- *Monesko osa tummansinisestä vaaleansininen on?*
- *Näytä punaisen puolikas, neljäsosa.*

Murtoluvun laventamista ja supistamista voidaan pohjustaa havaintojen avulla. Kun ”tehdään mattoja”, huomataan, että esimerkiksi 10:n

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi

viidesosa (vaaleanpunainen) on yhtä suuri kuin 10:n kaksi kymmenesosaa (kaksi valkoista).
”Maton tekemisen” avulla oppilaat voivat vastata myös tällaisiin kysymyksiin: paljonko on 10:n kaksi viidesosaa, neljä viidesosaa. Kumpi on suurempi, 4:n kolme neljäsosaa, vai 9:n kolmasosa?

Tuntien tavoite on:

- Kokemuksien hankkiminen myöhemmin esiin tulevista matematiikan käsitteistä,
- laskutoimisten harjoittelu,
- oppilaiden ajattelun kehittäminen.

© Matematiikkalehti Solmu. ISSN 1458-8048 (Verkkolehti).
http://solmu.math.helsinki.fi