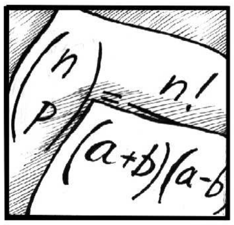


Mihin muotoon asettuu päistään kiinnitetty köysi?

Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Tarkoitukseni on esittää vastaus otsikossa mainittuu kysymykseen, joka aina silloin tällöin nousee esiin. Ongelmalla on pitkä historia: ilmeisesti ensimmäinen henkilö, joka yritti selvittää asian matemaattisin keinoin oli Galileo Galilei. Hän päätyi laskuissaan kuitenkin paraabeliin, joka on väärä vastaus. Virheen havaitsi hollantilainen Christiaan Huygens v. 1646, ja oikeaan ratkaisuun päätyivät 1600-luvun lopussa Huygens, Johan Bernoulli ja G.W. Leibniz. Kyseisen käyrän nimi on ketjukäyrä eli katenaari (*catena* = ketju), ja sen yhtälössä esiintyykin yllättäen eksponenttifunktioita.

Lähtökohta

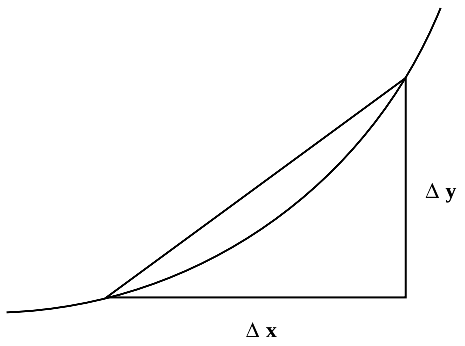
Ongelma on siis seuraava: On annettu pätkä narua, jonka pituus on ℓ, sekä ripustuspisteet $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$. Tehtävänä on määrittää sen käyrän $y = f(x)$ yhtälö, jonka muotoiseksi naru asettuu, kun sen päät kiinnitetään pisteisiin P ja Q.

Tutkitaan aluksi tähän muotoiluun sisältyviä oletuksia. Ratkaisun olemassaolon varmistamiseksi täytyy ainakin olettaa, että naru yltää pisteestä P pisteeseen Q, ts. $\ell \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Lisäksi tehtävään sisältyy ajatus siitä, että narun muoto voidaan esittää jonkin funktion kuvaajana; jos narussa olisi silmukoita tai se asettuisi osittain välin $[x_1, x_2]$ ulkopuolelle, ei sen esittäminen funktion kuvaajana olisi mahdollista. Tämän kirjoituksen lähtökohtana on kuitenkin käytännön havainto: ongelmalla on muotoa $y = f(x),\ x \in [x_1, x_2]$, oleva ratkaisu.

Jotta kysymyksestä ei tulisi liian hankalaa heti kättelyssä, oletetaan, että naru on tasapaksua ja sen pituustiheys ρ on vakio. Pituustiheyden yksikkö on kg/m ja s:n pituisen narun massa on silloin ρs.

Ensimmäinen yritys

Köyden muoto määräytyy siitä vaatimuksesta, että sen potentiaalienergia on pienin mahdollinen, joten on muodostettava potentiaalienergiaa kuvaava lauseke. Tarkastellaan sen vuoksi lyhyttä narun pätkää Δs. Sen pituutta voidaan approksimoida lausekkeella $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, missä merkinnät selviävät kuviosta.



Tämän osan massa on likimäärin muotoa

$$\rho\Delta s = \rho\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \Delta x,$$

ja sen korkeus x-akselista (potentiaalienergian nollakohta) mitattuna on $f(x)$. Narunpätkän potentiaalienergiaa approksimoi siis lauseke (muista ”mgh”)

$$(\rho\Delta s)gf(x) = g\rho f(x)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \Delta x,$$

joka on voimassa sitä tarkemmin, mitä pienempi on Δx. Kun $\Delta x \to 0$, niin lauseke $\Delta y/\Delta x$ lähestyy funktion kuvaajan kulmakerrointa pisteessä x, joka on $f'(x)$. Koko narun potentiaalienergia on tällaisten termien summa, jota rajalla $\Delta x \to 0$ vastaa integraali

$$J[f] = \int_{x_1}^{x_2} g\rho f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx.$$

Nyt voimme muotoilla ongelman pelkästään matemaattisin käsittein:

- Määritä se jatkuvasti derivoituva funktio $f\colon [x_1, x_2] \to R$, joka toteuttaa ehdot
  1. $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$,
  2. $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx = \ell$,
  3. lausekeella $J[f]$ on pienin mahdollinen arvo.

Toisessa kohdassa oleva integraali esittää funktion kuvaajan pituutta ja se voidaan johtaa samanlaisella päättelyllä kuin yllä. Kolmannessa kohdassa pienintä arvoa tarkastellaan kaikkien niiden funktioiden joukossa, jotka toteuttavat kaksi ensimmäistä ehtoa.

Tämän tyyppisiä minimointiongelmia tutkiva matematiikan haara on nimeltään variaatiolaskenta. Se tarjoaa yleisen menetelmän minimointi- ja maksimointiongelmien käsittelyyn, joka tietyssä mielessä vastaa tavallisen funktion ääriarvojen etsimistä: ne löytyvät derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä. Yleisessä tapauksessa tilanne on kuitenkin hankalampi, sillä esimerkiksi yllä lauseke J täytyy tulkita funktioksi, jonka arvot ovat reaalilukuja, mutta muuttujan paikalla voi olla mikä tahansa jatkuvasti derivoituva funktio, joka toteuttaa ehdot 1 ja 2.

Johdatus variaatiolaskennan saloihin jää kuitenkin tämän kirjoituksen ulkopuolelle, sillä, ehkä hieman yllättäen, naruongelman ratkaisu saadaankin vaihtoehtoisella tavalla tutkimalla aivan tavallisia derivaattoja!

Toinen yritys

Lähestymme ongelmaa toista kautta tutkimalla köyteen vaikuttavia voimia: jos köysi on tasapainossa, on sen kuhunkin osaan vaikuttavien voimien summa nolla. Tämä on voimassa erikseen voimien pysty- ja vaakasuorille komponenteille.

Tilanteen yksinkertaistamiseksi oletetaan narun olevan niin pitkä, että sen alin kohta on ripustuspisteiden alapuolella. Yleinen tapaus voidaan joko käsitellä samalla periaatteella erikseen tai johtaa tästä erikoistapauksesta kuvitteellisen pitemmän narun ja ylimääräisten kiinnityspisteiden avulla.

Köyden jännitysvoima vaikuttaa kussakin kohdassa köyden tangentin suuntaan, jolloin minimikohdassa jännitysvoima T_0 on vaakasuora. Valitaan xy-koordinaatisto siten, että minimikohdassa on $x = 0$. Oletetaan, että köyden muotoa kuvaa käyrä $y = f(x)$ ja lasketaan y-akselin ja käyrän pisteen $(x, f(x))$ rajoittamaan köyden palaseen vaikuttavat voimat. Olkoon T köyden jännitysvoima ja α köyden tangentin suuntakulma tässä pisteessä.

Koska köyden palanen ei liiku vaakasuorassa, on kaikkien voimien vaakakomponenttien summa nolla:

$$-T_0 + T\cos\alpha = 0.$$

Tämä yhtälö kertoo vain sen, että jännitysvoiman vaakasuora komponentti on vakio T_0 kaikissa pisteissä. Toisaalta myös pystykomponenttien summa on sekin nolla:

$$T\sin\alpha - g\rho s = 0,$$

missä s on kyseessä olevan köyden palasen pituus. Aikaisempien tarkastelujen perusteella $s = \int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\ dt$, ja koska $T\sin\alpha = T_0\tan\alpha = T_0 f'(x)$, niin saamme yhtälön

$$T_0 f'(x) = g\rho\int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\ dt.$$

Tästä yhtälöstä seuraa, että $f'(x)$ on derivoituva, sillä tämä pätee oikean puoleiselle lausekkeelle. Koska yhtälö on voimassa kaikilla muuttujan $x > 0$ arvoilla, voimme derivoida yhtälön molemmat puolet, jolloin saadaan differentiaaliyhtälö

$$f''(x) = a\sqrt{1 + f'(x)^2}, \quad a = \frac{g\rho}{T_0} = \text{ vakio} > 0.$$

Sijoitetaan yhtälöön $g(x) = f'(x)$ ja yritetään ratkaista ensin funktio $g(x)$. Yhtälö tulee muotoon $g'(x) = a\sqrt{1 + g(x)^2}$, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\frac{g'(x)}{\sqrt{1 + g(x)^2}} = a.$$

Tämä näyttää hankalalta, mutta vasen puoli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(g(x) + \sqrt{1 + g(x)^2}\,)\right), \quad \text{(tarkista derivoimalla!)}$$

jolloin voimme integroida yhtälön molemmat puolet välillä $[0, x]$ ja saamme

$$\ln(g(x) + \sqrt{1 + g(x)^2}\,) - \ln(g(0) + \sqrt{1 + g(0)^2}\,) = ax.$$

Käyttämällä tietoja $g(0) = f'(0) = 0$ (koordinaatiston valinta!) ja $\ln 1 = 0$ yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
&\ln(g(x) + \sqrt{1 + g(x)^2}\,) = ax \\
&\qquad \Leftrightarrow g(x) + \sqrt{1 + g(x)^2} = e^{ax} \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow \sqrt{1 + g(x)^2} = e^{ax} - g(x).
\end{aligned}$$

Korottamalla neliöön ja ratkaisemalla $g(x)$ saadaan

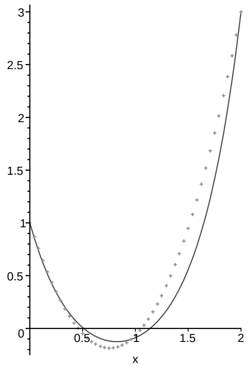
$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}),$$

joten integroimalla vielä kerran saadaan lopullinen tulos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\int (e^{ax} - e^{-ax})\,dx \\
&= \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}) + C = \frac{1}{a}\cosh(ax) + C.
\end{aligned}$$

Tässä esiintyvä funktio $\cosh t$, hyperbolinen kosini, määritellään kaavalla $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

Yleisessä tapauksessa ratkaisukäyrä on muotoa $y = \frac{1}{a}\cosh(a(x - x_0)) + C$, ja siinä esiintyvät kolme vakiota a, x_0, C määräytyvät kirjoituksen alussa esillä olleista ehdoista 1. ja 2. Käytännössä ehtoja täytyy käsitellä numeerisesti, ja esimerkiksi tapauksessa $f(0) = 1, f(2) = 3, \ell = 5$ saadaan vakioille arvot $a \approx 2{,}4$, $x_0 \approx 0{,}82$ ja $c \approx -0{,}54$.



Kuviossa yhtenäinen viiva kuvaa katenaaria ja pisteviiva puolestaan paraabelia $y = 2{,}07x^2 - 3{,}14x + 1$, joka toteuttaa samat kolme ehtoa (likimäärin).

Miksei paraabeli käy?

Paraabeli ja katenaari eivät siis ole samoja käyriä. Miksi köysi kuitenkin näyttää ainakin likimääräisesti paraabelilta?

Syy liittyy eksponenttifunktion sarjakehitelmään. Eksponenttifunktiolle on voimassa arvio

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \text{korjaustermi} \approx 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

joka on voimassa sitä tarkemmin, mitä pienempi on $|x|$. Sijoittamalla muuttujan paikalle $-x$ saadaan $e^{-x} \approx 1 + (-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 = 1 - x + \frac{1}{2}x^2$, joten hyperboliselle kosinille saadaan approksimaatio

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
&\approx \frac{1}{2}(1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2}) = 1 + \frac{1}{2}x^2.
\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa sitä, että katenaari näyttää paraabelilta sitä tarkemmin, mitä lähempänä huippua ollaan. Kauempana huipusta ero katenaarin ja paraabelin välillä tulee kuitenkin selvemmäksi.

Paraabeli on kuitenkin köysiongelman ratkaisu siinä tapauksessa, että köysi kannattaa kuormaa, josta syntyy vaakasuorassa suunnassa tasainen painojakauma. Tällainen tilanne voi syntyä esimerkiksi riippusiltojen rakenteissa, koska siltaa kannattavien vaijerien massa on mitätön itse sillan massaan verrattuna. Tässä mielessä Galilei ei ehkä sittenkään ollut aivan väärässä!