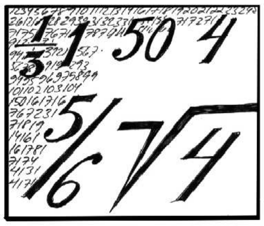

Tyhjistä joukoista

Timo Tossavainen
Lehtori
Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

On olemassa suuruudeltaan erilaisia äärettömiä joukkoja. Esimerkiksi reaalilukujen joukko on mahtavampi kuin luonnollisten lukujen joukko. Näin ollen voidaan pohtia myös sitä, tapahtuuko sama ilmiö toisessa ääripäässä eli onko olemassa mahtavuudeltaan erilaisia tyhjiä joukkoja. Tässä kirjoituksessa tarkastellaan tätä asiaa.

$$\infty \; \infty \; \infty \; \cdots \; \Rightarrow \; \varnothing \; \varnothing \; \varnothing \; \cdots ?$$

Lähes jokainen matematiikasta kiinnostunut on kuullut, että on olemassa erimahtavia äärettömyyksiä. Äärettömien joukkojen mahtavuuksien vertailu ei ole aivan triviaali asia, mutta siitä voidaan puhua ymmärrettävästi hyvin havainnollisella tasolla. Muun muassa Juha Oikkonen on viime aikoina käsitellyt äärettömyyttä monesta eri näkökulmasta Dimensiossa julkaistussa kirjoitussarjassaan [3]. Toinen hyvä suomenkielinen esitys tästä aiheesta löytyy Miguel de Guzmánin kirjasta [1].

Niiden joukkojen, joiden alkioiden lukumäärä voidaan ilmoittaa luonnollisen luvun avulla, vertailu on helpompaa. Joukko A on *mahtavampi kuin* joukko B, jos joukon A alkiomäärä on suurempi kuin joukon B. *Yhtämahtavissa* äärellisissä joukoissa on sama määrä alkioita. Erityisesti, jos epätyhjillä joukoilla A ja B on samat alkiot eli $A = B$, niin ne ovat yhtämahtavat.

Mutta onko tilanne täysin selvä tyhjien joukkojen osalta? Tyhjäksihän sanotaan jokaista sellaista joukkoa, jossa ei ole yhtään alkiota eli sen alkiomäärä on nolla. Koska nolla ja ääretön ovat läheistä sukua toisilleen – molemmat aiheuttavat aritmeettisia ongelmia, katso esim. [5] – ja toisaalta erilaisia äärettömyyksiä on rajattoman monta, voidaan ainakin *a priori* epäillä, että myös tyhjiä joukkoja olisi tässä mielessä useita erilaisia.

Jos tyhjien joukkojen tarkastelun lähtökohdaksi otetaan aksiomaattinen joukko-oppi, tarkastelemamme ongelma ratkeaa triviaalisti. Aksioomien mukaan on olemassa vain yksi tyhjä joukko, joka on kaikkien joukkojen osajoukko. Aksiomaattinen lähestymistapa joukko-oppiin ei kuitenkaan välttämättä kuulu edes jokaisen matemaatikon yleissivistykseen, vaan yleensä muun kuin joukko-opin alan matemaatikot tarkastelevat joukkoja ns. naivista näkökulmasta, jossa käsitettä joukko ei edes määritellä vaan oletetaan intuitiivisesti ymmärretyksi asiaksi. Tästä näkökulmasta tyhjien joukkojen ongelma on hieman vähemmän triviaali. Epätäydellisesti mutta jollakin tavalla valaisevasti voimme tarkastella ongelmaa lauselogiikan avulla.

Olkoon X joukko. Joukko Y on joukon X *osajoukko*, jos sen jokainen alkio on myös joukon X alkio. Tätä merkitään kirjoittamalla $Y \subset X$. Jokainen $Y \subset X$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$Y = \{x \in X :\ P(x)\}, \tag{1}$$

missä P on joukossa X määritelty ominaisuus (Valitaan esimerkiksi $P(x) =$ "$x \in Y$"). Joukossa X määritellyllä ominaisuudella tarkoitetaan ehtoa, jonka voimassaolo voidaan selvittää joukon X jokaisen alkion tapauksessa.

Sama joukko voidaan yleensä kirjoittaa muodossa (1) useamman eri ominaisuuden avulla, mutta jokainen joukossa X määritelty ominaisuus P määrää kaavan (1) kautta täsmälleen yhden joukon X osajoukon, nimittäin kaikkien niiden joukon X alkioiden x joukon, joilla on ominaisuus P eli ehtolause $P(x)$ on tosi. Joukko X voidaan kirjoittaa esimerkiksi muodoissa $\{x \in X :\ x = x\}$ ja $\{x \in X :\ x \in X\}$.

Joukkojen A ja B *yhdiste* $A \cup B$ on joukko, joka sisältää täsmälleen ne alkiot, jotka ovat joko joukon A tai joukon B tai molempien joukkojen alkioita.

Olkoot P ja Q joukossa X määriteltyjä ominaisuuksia. Tällöin joukko-opin relaatiota

$$\{x \in X :\ P(x)\} \subset \{x \in X :\ Q(x)\}$$

vastaa logiikan lause

$$\forall x \in X : P(x) \Rightarrow Q(x)$$

ja päinvastoin. Samoin ilmaisut

$$\{x \in X :\ P(x)\} = \{x \in X :\ Q(x)\}$$

ja

$$\forall x \in X : P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

ovat ekvivalentit.

Määritelmä 2. Olkoon X joukko. *Joukon X tyhjä joukko* $\emptyset_X$ on joukko

$$\{x \in X :\ x \neq x\}.$$

Pyrimme osoittamaan seuraavan lauseen.

Lause 3. Olkoot X ja Y joukkoja. Tällöin $\emptyset_X = \emptyset_Y$.

Jos Lause 3 on tosi, niin jokaisen joukon tyhjä joukko on yksi ja sama tyhjä joukko, jota merkitään symbolilla $\emptyset$. Erityisesti myös $\emptyset_\emptyset = \emptyset$. Lisäksi $\emptyset \subset X$, olipa X mikä tahansa joukko.

Lauseen 3 perustelu. Koska $\emptyset_X \subset X \subset X \cup Y$ ja $\emptyset_Y \subset Y \subset X \cup Y$, niin $\emptyset_X \subset X \cup Y$ ja $\emptyset_Y \subset X \cup Y$. Näin ollen $\emptyset_X$ ja $\emptyset_Y$ voidaan kirjoittaa muodossa (1) siten, että

$$\emptyset_X = \{x \in X \cup Y :\ x \in \emptyset_X\}$$

ja

$$\emptyset_Y = \{x \in X \cup Y :\ x \in \emptyset_Y\}.$$

Osoitetaan, että $\emptyset_X = \emptyset_{X \cup Y} = \emptyset_Y$.

Lauselogiikassa yhdistetty lause $P \Leftrightarrow Q$ on tosi täsmälleen silloin, kun lauseilla P ja Q on sama totuusarvo. Nyt joukossa $X \cup Y$ määritellyt ehdot $x \in \emptyset_X$ ja $x \in \emptyset_{X \cup Y}$ ovat epätosia kaikilla x, joten lause

$$x \in \emptyset_X \Leftrightarrow x \in \emptyset_{X \cup Y}$$

on tosi kaikilla $x \in X \cup Y$. Siis $\emptyset_X = \emptyset_{X \cup Y}$.

Vastaavasti nähdään, että $\emptyset_Y = \emptyset_{X \cup Y}$. Näin ollen $\emptyset_X = \emptyset_Y$.

Viitteet

[1] M. de Guzmán: Matemaattisia seikkailuja, Oy Finn Lectura Ab, 1990.

[2] J. Dieudonné: Foundations of modern analysis, Academic Press, 1969.

[3] J. Oikkonen: Sen seitsemän sortin ääretön, Dimensio 1,2,4,5/2002.

[4] J. Merikoski, A. Virtanen ja P. Koivisto: Diskreetti matematiikka I, Tampereen yliopisto, 1998.

[5] C. Seife: Nollan elämäkerta, WSOY, 2000.

[6] R. L. Vaught: Set Theory - An Introduction, Birkhäuser, 1995.