

Solmu

Matematiikkalehti
2/2003

<http://solmu.math.helsinki.fi/>



Solmu 2/2003

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan laitos

PL 4 (Yliopistonkatu 5)

00014 Helsingin yliopisto

<http://solmu.math.helsinki.fi/>

Päätoimittaja

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Toimitussihteerit

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Antti Rasila, tutkija, Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti *toimitus@solmu.math.helsinki.fi*

Toimituskunta:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Matti Lehtinen, dosentti, Maanpuolustuskorkeakoulu

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Virpi Kauko, tutkija, virpik@maths.jyu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, jorma.mattila@lut.fi

Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu

Jorma Merikoski, professori, jorma.merikoski@uta.fi

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto

Petri Ola, yliassistentti, petri.ola@oulu.fi

Matemaattisten tieteiden laitos, Oulun yliopisto

Kalle Ranto, assistentti, kalle.ranto@utu.fi

Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Timo Tossavainen, lehtori, timo.tossavainen@joensuu.fi

Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

Numeroon 3/2003 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 1. lokakuuta 2003 mennessä.

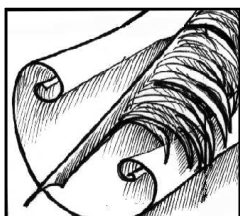
Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa sekä Suomen Kulttuurirahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilla saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus: Miljoonan taalan palkinto.....	4
Toimitussihteerin palsta: Matematiikan opintojen ja tutkinnon täydentäminen kesällä 2003 ..	5
Modulaarisista laskutaulukoista	7
Osittaisintegroinnin ihmeitä: Wallisin ja Stirlingin kaavat	12
Aineenopettajan aineenhallinnan tärkeydestä.....	16
Tehtäviä	18
Opiskelijat entistä osaamattomampia Ruotsissa	19
Tyhjistä joukoista.....	22
Verkkomateriaalien käyttö peruskoulun yläluokkien todennäköisyyslaskennan opetuksessa ..	24
Tehtävien ratkaisut	26

Kannen kuvassa on tyypillinen druidi-ornamentti.



Miljoonan taalan palkinto

Matematiikassa eletään jännittäviä aikoja. Eräs venäläinen tutkija väittää ratkaisseensa ranskalaisen Henri Poincarén n. 100 vuotta sitten asettaman ongelman, ja ellei todistuksesta löydy virheitä parin vuoden sisällä, saa ongelman ratkaisija miljoonan dollarin palkinnon!

Mistä oikeastaan on kysymys? Vuosituhannen vaihteessa amerikkalainen Clay Mathematics Institute julkaisi seitsemän ongelmaa, joiden ratkaisemisesta se lupaa maksaa miljoona dollaria kustakin. Nämä seitsemän ongelmaa ovat ehkä kuuluisimmat niistä kysymyksistä, joihin kukaan ei vielä ole pystynyt vastaamaan. On totta, että kuuluisuus tuskin on täsmällisesti määritelty käsite, mutta näiden ongelmien merkityksestä vallitsee laaja yksimielisyys.

Ongelmia on siis seitsemän, mutta valitettavasti melkein jokainen niistä vaatisi pitkähkön selityksen ja useimmat myös taustatietoja kyseisestä matematiikan alasta, joten viitataan tässä yhteydessä Clay-instituutin kotisivulle http://www.clay-math.org/Millennium_Prize_Problems/ tai suoma-

laiseen Arkhimedes-lehteen (numerot 1–4/2002), jossa on ilmestynyt muutaman sivun pituiset kuvaukset kustakin ongelmasta ja niiden taustoista.

Alussa mainitsemani venäläinen on nimeltään *Grigori Perelman*, ja Poincarén asettama ongelma koskee eräitä kolmiulotteisten avaruuksien ominaisuuksia. Ainutakaan miljoonan dollarin ongelmaa ei ole vielä ”virallisesti” ratkaistu, mutta Perelmanin tulosta pidetään ensimmäisenä vakavasti otettavana yrityksenä. Todistus on pitkä, eikä sen kaikkia välivaiheita ole vielä pystytty tarkistamaan, mutta miljoonan taalan kohtalo selviää varmasti jo tämän vuoden aikana. Kannattaa kuitenkin muistaa, että esim. *Andrew Wilesin* todistus Fermat’n lauseelle oli alunperin puutteellinen, joskin virhe pystyttiin paikkaamaan vuoden sisällä sen havaitsemisesta.

Myös Solmu-lehdessä on taas matemaattisia ongelmia, mutta niiden ratkaisemisesta emme tarjoa rahapalkintoja: vastaukset löytyvät lehden lopusta.

Pekka Alestalo

Pääkirjoitus



Matematiikan opintojen ja tutkinnon täydentäminen kesällä 2003

Ensi kesänä on eri puolilla Suomea tarjolla useita mahdollisuuksia täydentää tutkintoa tai kesken jääneitä matematiikan opintoja. Kesän aikana pidettävät kurssit parantavat erityisesti kouluissa (ehkä epäpätevinä) toimivien opettajien mahdollisuuksia osallistua opetukseen. Myös perusopiskelijoiden odotetaan olevan kiinnostuneita kesäopetuksesta – siitä huolimatta, että kesä on opiskelijoille kesätöiden ja lomailun aikaa.

Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitoksella opiskellaan perinteiseen tapaan kesällä monia kursseja tuutorryhmissä. Niihin osallistuu joka kesä myös työssäolevia opettajia. Lopulliset päätökset ensi kesän ryhmistä tehdään huhtikuun lopulla, mutta jo tässä vaiheessa ennakoilmoittautumisten perusteella luvataan kurssit

- Analyysi 2 (5 ov)
- Differentiaaliyhtälöt 1 (3 ov)
- Differentiaaliyhtälöt 2 (2 ov)
- Matriisiteoria (5 ov)
- Matemaattinen logiikka (5 ov)

Ryhmiä tulee pääasiassa kesä- ja elokuulle. Näihin ryhmiin voivat osallistua ne, joilla on opinto-oikeus

Oulun yliopiston johonkin koulutusohjelmaan tai erillisten/täydentävien opintojen suoritusoikeus matematiikan opintoihin. Lisätietoja tulee Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitoksen verkkosivuille <http://math.oulu.fi>.

Pohjois-Pohjanmaan kesäyliopisto järjestää Oulussa kurssin

- Matematiikan perusmetodit 1 (5 ov)

Lisätietoja, ks. <http://www.pohjois-pohjanmaa.fi/kesayliopisto/>.

Joensuun yliopiston matematiikan laitos järjestää kesäopetuksena kurssit

- Koulumatematiikan harjoituskurssi (1 ov)
- Matematiikkaa tietokoneilla (1 ov/2 ov)

Kurssit pidetään 28.7.–15.8.2003. Opiskelu toteutetaan pienryhmissä, joiden ohjaajina toimii laitoksen opiskelijoita. Kurssit voi sisällyttää joko matematiikan cum lauden vapaavalintaisiin opintoihin opettajalinjalta tai didaktisen matematiikan approbaturin/cum lauden koulumatematiikan erikoiskursseiksi.

Toimitussihteerin palsta

Kursseille osallistuvilta edellytetään opinto-oikeutta tutkinnon suorittamista varten Joensuun yliopistossa, erillistä opinto-oikeutta didaktisen matematiikan opintoihin tai opinto-oikeutta avoimen yliopiston kautta. Lisätietoa kursseista löytyy verkkosivulta <http://www.joensuu.fi/matematiikka/appro.html>, jolla on esitelty myös muut kesällä 2003 pidettävät didaktisen matematiikan approbaturin/cum lauden kurssit.

Jyväskylän yliopisto järjestää 13. kesäkoulun elokuussa Jyväskylässä. Edistyneemmille perustutkinto-opiskelijoille ja jatko-opiskelijoille tarkoitetut matematiikan kurssit ovat

- Questions and Methods around the Inverse Conductivity Problem (1,5 ov)
- An Introduction to Electrical Impedance Tomography (1,5 ov)

Molemmat kymmenen luentotunnin kurssit pidetään 18.–22.8.2003. Lisätietoa Jyväskylän kesäkoulusta (mm. kurssien luennoijat ja kurssikuvaukset) löytyy verkkosivulta <http://www.jyu.fi/summerschool/>.

Helsingin yliopiston matematiikan laitos järjestää kesäopetuksena kurssit

- Algebra I (5 ov)
- Opettajalinjan peruskurssi (6 ov)
- Johdatus symboliseen laskentaan (5 ov)
- Gradu-seminaari

Lisäksi järjestetään lähinnä tutkijakoulutettaville tarkoitetut tiiviskurssit

- Complex Dynamics
- Discrete Conformal Mappings

Kurssit pidetään pääasiassa toukokuun lopun ja juhannuksen sekä heinäkuun lopun ja elokuun alun välisinä aikoina. Kursseista löytyy lisätietoja (mm. luentoajat ja luennoijat) Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen verkkosivuilta <http://www.math.helsinki.fi>.

Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen kesäopetuksessa kurssien suorittajilla pitää olla opinto-oikeus tutkinnon suorittamista varten matematiikan koulutusohjelmassa tai erillisten/täydentävien opintojen suoritusoikeus matematiikan opintoihin. Lisäohjeita löytyy Helsingin yliopiston matemaattis-luonnontieteellisen tiedekunnan verkkosivuilta (lomakkeista) <http://www.helsinki.fi/ml/tdk/>.

Sekä Helsingin yliopiston että Teknillisen korkeakoulun Avoimessa yliopistossa luennoidaan kesällä kaksi matematiikan kurssia; Helsingissä valittavina ovat kurssit

- Koulumatematiikan täydennyskurssi (4 ov)
- Lineaarialgebra I (5 ov)

ja Otaniemessä kurssit

- Diskreetin matematiikan perusteet (3 ov)
- Sovelletun matematiikan tietokonetyöt (1 ov)

Avoin yliopisto-opetus on avointa kaikille iästä ja pohjakoulutuksesta riippumatta. Lisätietoja kursseista löytyy osoitteista <http://www.avoin.helsinki.fi> (HY) ja <http://www.avoin.hut.fi> (TKK). Myös Helsingin seudun kesäyliopisto järjestää matematiikan opetusta; ks. kesäyliopiston verkkosivut <http://www.kesayliopistohki.fi>.

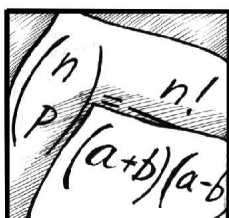
* * *

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseura järjestää kansalliset tutkimuksen päivät Helsingissä 10.-11.10.2003. Päivät ovat samalla tutkimusseuran 20-vuotisjuhlaseminaari. Tutkimuspäivien yleistema on matemaattisten aineiden opettajankoulutus. Lisäksi torstaina 9.10. on Tutkimusseuran ja Valtakunnallisen matematiikan, fysiikan ja kemian opetuksen tutkijakoulun yhteinen symposium, jonka teemana on koulutuksellinen tasa-arvo. Kaikki opettajankoulutuksesta ja matemaattisten aineiden opetuksesta sekä niiden kehittämisestä kiinnostuneet opettajat ovat tervetulleita päiville.

Tutkimuksen päiviin voi tutustua tarkemmin verkkosivulla <http://www.malux.edu.helsinki.fi/malu/tutkimus/tutkimusseura/symposium/>.

Mika Koskenoja

Toimitussihteerin palsta



Modulaarisista laskutaulukoista

Visa Latvala ja Pekka Smolander

Matematiikan laitos, Joensuun yliopisto

Johdanto

Artikkelin tarkoituksena on tutustuttaa lukija modulaariseen yhteen- ja kertolaskuun. Nämä ovat ominaisuuksiltaan reaalityökalujen yhteen- ja kertolaskun kaltaisia laskutoimituksia äärellisessä joukossa. Modulaaristen laskutoimitusten tarkasteluun on löydettävissä ainakin kaksi hyvää syytä: Ensinnäkin kyseiset laskutoimitukset ja yleisemmin äärelliset kunnat ovat keskeisessä roolissa modernissa tiedonsuojauksessa, ks. esimerkiksi [5, Luku 7]. Toiseksi modulaariset laskutaulukot ovat hyödyllisiä algebran yliopisto-opetuksen näkökulmasta, sillä ne antavat konkreettisia esimerkkejä, joiden avulla lähestyä algebrallisten struktuurien samantaisuuden eli isomorfian käsitettä. Lukiolaiselle taulukot antavat esimerkin ei-standardista laskuopista, niitä voi tutkia ilman mitään tietoa abstraktista algebrasta.

Tässä esityksessä keskitytään modulaariseen kertolaskuun sen vuoksi, että yhteenlaskutaulukoita on niiden äärimmäisen säännöllisyyden vuoksi helppo muodostaa kynällä ja paperilla. Sen sijaan jo neljää alkia suurempien kertolaskutaulukoiden muodostaminen kynällä ja paperilla alkaa olla työläs tehtävä. Tämä lienee keskeinen syy siihen, ettei ohessa esiteltäviä yleisiä kertolaskutaulukoita juuri löydy klassisista algebran oppikirjoista. Viimeisessä luvussa annetaan Maple-proseduuri, jota käyttäen laskutaulukoita voi muodostaa nappia painamalla.

Modulaaristen laskutoimitusten määritelmät

Olkoon $m \in \mathbf{N}$ luonnollinen luku. Kokonaisluvun $a \in \mathbf{Z}$ jakojäännös modulo m on ehdoista

$$a = km + r, \quad 0 \leq r < m,$$

yksikäsitteisesti määräytyvä ei-negatiivinen kokonaisluku r . Tässä luonnollisesti myös $k \in \mathbf{Z}$, ks. [5, Theorem 1.9].

Esimerkki. Luvun 15 jakojäännös modulo 7 on 1, sillä $15 = 2 \cdot 7 + 1$. Luvun 25 jakojäännös modulo 7 on 4, sillä $25 = 3 \cdot 7 + 4$.

Modulaarinen yhteen- ja kertolasku määritellään kaikkien mahdollisten jakojäännösten modulo m joukossa

$$R(m) := \{0, 1, \dots, m-1\}$$

asettamalla

$$a \oplus b := \text{luvun } a + b \text{ jakojäännös modulo } m,$$

$$a \odot b := \text{luvun } ab \text{ jakojäännös modulo } m.$$

Esimerkki. Laskemalla jakojäännökset modulo 4 todetaan, että yhteen- ja kertolaskutaulukot ovat muotoa

$\oplus$	0	1	2	3	$\odot$	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	2	3	0	1	0	1	2	3
2	2	3	0	1	2	0	2	0	2
3	3	0	1	2	3	0	3	2	1

Laskutaulukoita luetaan kuten koulusta tuttua kymmenen kertotaulua. Esimerkiksi

$$2 \oplus 3 = 1$$

eli tulos löytyy lukuun 2 liittyvän vaakarivin ja lukuun 3 liittyvän pystyrivin risteyskohdasta. Vastaavaan tapaan kertolaskutaulukosta havaitaan, että

$$2 \odot 3 = 2.$$

Edelleen yhteen- ja kertolaskutaulukot modulo 5 ovat

$\oplus$	0	1	2	3	4	$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0	1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	0	1	2	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2	3	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3	4	0	4	3	2	1

Kysymys. Millä tavalla luvun 0 esiintyminen eroaa toisistaan kertolaskutaulukoissa modulo 4 ja 5? Kyse on yleisestä ilmiöstä, joka liittyy siihen, että 5 on alkuluku, mutta 4 ei.

Edellisestä esimerkistä näkyy sääntö, jonka mukaan yhteenlaskutaulukot rakentuvat. Tässä esityksessä keskitytäänkin tarkastelemaan kertolaskutaulukoita, koska ne eivät rakennu yksinkertaisen säännön mukaisesti ja ovat siten vaikeammin esitettävissä. On kuitenkin korostettava, että yhteenlaskutaulukot ovat teoreettisesti erittäin tärkeitä. Esimerkiksi äärelliset Abelin ryhmät voidaan karakterisoida niiden avulla ([2, Theorem 10.7], tai [1, Theorem 1.22]). Toisaalta yhteen- ja kertolasku yhdessä muodostavat tärkeän esimerkin äärellisestä kunnasta tapauksessa, jossa m on alkuluku. Mainittakoon myös, että kirjallisuudessa joukon $R(m)$ yhteenlaskutaulukolle käytetään tavanomaisesti merkintöjä $(\mathbf{Z}_m, +)$ ja $(\mathbf{Z}_m, \oplus)$.

Voidaan osoittaa, että $\oplus$ ja $\odot$ ovat aina vaihdannaisia ja liitännäisiä. Nämä ominaisuudet periytyvät kokonaislukujen vastaavista ominaisuuksista ([2, Theorem 2.7]). Vaihdannaisuus näkyy taulukoissa siten, että taulukot ovat symmetrisiä päälävistäjän suhteen.

Modulaarinen kertolaskuryhmä

Kertolasku $\odot$ ei yleisesti muodosta ryhmää joukossa

$$R(m) := \{0, \dots, m-1\},$$

sillä vaikkakin 1 on neutraalialkio, niin esimerkiksi tapauksessa $m = 4$ jakojäännöksellä 2 ei ole käänteisalkiota, ts.

$$2 \odot x \neq 1$$

kaikilla $x = 0, 1, 2, 3$. Sen sijaan alkuluvun m tapauksessa $\odot$ muodostaa ryhmän joukossa $\{1, \dots, m-1\}$ (tämä perustellaan seuraavassa luvussa). Ryhmän määritelmä löytyy abstraktin algebran oppikirjoista, katso esimerkiksi [1].

Koska tarkoituksena on hyödyntää kertolaskutaulukoita äärellisten ryhmien isomorfiatarkasteluissa, rajoitetaan joukkoa $R(m)$ siten, että kertolaskun käänteisalkiovaatimus saadaan voimaan. Tämä suoritetaan siten, että joukosta $R(m)$ poimitaan taulukkoon mukaan vain ne jakojäännökset $a \in R(m)$, joille

$$\text{synt}(a, m) = 1.$$

Siis kertolaskua $\odot$ tarkastellaan joukossa

$$R^*(m) := \{a \in \{1, \dots, m\} \mid \text{synt}(a, m) = 1\}.$$

Esimerkiksi tapauksessa $m = 24$ päädytään taulukkoon

1	5	7	11	13	17	19	23
5	1	11	7	17	13	23	19
7	11	1	5	19	23	13	17
11	7	5	1	23	19	17	13
13	17	19	23	1	5	7	11
17	13	23	19	5	1	11	7
19	23	13	17	7	11	1	5
23	19	17	13	11	7	5	1

Taulukossa esitystä on yksinkertaistettu siten, että kerrottavien alkioiden vaaka- ja pystyrit samoin kuin kertolaskumerkki $\odot$ on jätetty pois. Kerrottavat alkiot esiintyvät joka tapauksessa matriisin ensimmäisellä vaaka- ja pystyriavillä koska 1 on aina mukana taulukossa ja $1 \odot a = a$ kaikilla $a \in R^*(m)$. Kertolaskun osalta käytetään jatkossa kaikkialla tätä yksinkertaistettua matriisiesitystä.

Edellisestä taulukosta huomataan, että joukon $R^*(8)$ jokainen luku toteuttaa yhtälön $x \odot x = 1$. Tämä on erikoinen algebrallinen ominaisuus, joka ei yleisesti päde joukoille $R^*(m)$. Ominaisuuteen palataan viimeistä edellisessä luvussa.

Määritelmä. Eulerin funktio ϕ on sellainen kuvaus $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, että $\phi(m)$ ilmoittaa niiden lukujen $a \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ lukumäärän, joille $\text{synt}(a, m) = 1$.

Siis $\phi(m)$ ilmoittaa kuinka monta lukua joukossa $R^*(m)$ on. Voidaan osoittaa ([5, Theorem 6.5]), että funktiolle ϕ pätee kanoninen kaava

$$\phi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

missä $\{p_1, \dots, p_k\}$ on luvun m alkutekijöiden joukko, so. niiden alkulukujen joukko, joilla m on jaollinen. Esimerkiksi

$$\phi(24) = 24 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8,$$

sillä luvun $24 = 2^3 \cdot 3$ alkutekijät ovat 2 ja 3.

Modulaarisen kertolaskuryhmän matemaattiset perustelut

Tässä luvussa tarkastellaan lyhyesti matemaattisia perusteluja sille, miksi $\odot$ muodostaa ryhmän joukossa $R^*(m)$. Tämä ei periaatteessa edellytä tietoja, jotka eivät tulisi vastaan lukion lukuteorian syventävällä kursilla, katso esimerkiksi [3]. Jos luku tuntuu liian teoreettiselta, sen voi ohittaa ja palata asiaan tarvittaessa myöhemmin.

Kokonaisluku $p > 1$ on *alkuluku*, jos luvulla p ei ole muita positiivisia tekijöitä kuin 1 ja p . Lukuja $a, b \in \mathbf{Z}$ sanotaan *keskenään jaottomiksi*, jos lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä $\text{syt}(a, b)$ on 1. Käytännössä luvut todistetaan usein keskenään jaottomiksi seuraavaa apulosta käyttäen ([5, Theorem 2.2]):

Apulause 1. Kokonaisluvut a ja b ovat keskenään jaottomia, jos ja vain jos on olemassa $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ siten, että

$$ak_1 + bk_2 = 1.$$

Aiemmin on jo mainittu, että $\odot$ on liitännäinen ja vaihdannainen joukossa $R(m)$. On kuitenkin osoitettava, että kertolasku $\odot$ on laskutoimitus joukossa

$$R^*(m) = \{a \in \{1, \dots, m-1\} \mid \text{syt}(a, m) = 1\},$$

eli on todettava, että tulo $a \odot b$ sisältyy joukkoon $R^*(m)$ kaikilla $a, b \in R^*(m)$. Tämä seuraa Apulauseesta 1: Jos $\text{syt}(a, m) = 1$ ja $\text{syt}(b, m) = 1$, niin $ak_1 + mk_2 = 1$ ja $bl_1 + ml_2 = 1$. Kertomalla yhtälöt puolittain saadaan

$$\begin{aligned} 1 &= (ak_1 + mk_2)(bl_1 + ml_2) \\ &= ab(k_1l_1) + m(ak_1l_2 + bk_2l_1 + mk_2l_2). \end{aligned}$$

Siis $\text{syt}(ab, m) = 1$ Apulauseen 1 nojalla. Edelleen jokaisella $a \in R^*(m)$ on joukossa $R^*(m)$ käänteisalkio kertolaskun suhteen, ts. yhtälöllä

$$a \odot x = 1$$

on ratkaisu $x \in R^*(m)$ kaikilla $a \in R^*(m)$. Tämän perustelu on luontevinta suorittaa kongruenssin avulla: *Kongruenssirelaatio modulo m* määritellään asettamalla

$$a \equiv b \pmod{m}$$

silloin kun erotus $a - b$ on jaollinen luvulla m eli kun on olemassa $k \in \mathbf{Z}$ siten, että $a - b = km$. Kongruenssirelaatiota on aiemmin käsitelty Solmun artikkelissa [4].

Käänteisalkion olemassolokysymys palautuu yksinkertaisen lineaarisen kongruenssiyhtälön ratkaisemiseen ([5, Theorem 3.10]):

Apulause 2. Olkoon $m \in \mathbf{N}$ ja $a \in \mathbf{Z}$. Tällöin kongruenssiyhtälöllä

$$ax \equiv 1 \pmod{m}$$

on ratkaisu $x \in \mathbf{Z}$ joka on yksikäsitteinen modulo m .

Olkoon $a \in R^*(m)$ ja olkoon $\tilde{a}$ kongruenssin

$$ax \equiv 1 \pmod{m}$$

ratkaisun x jakojäännös modulo m . Tällöin $\tilde{a} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ja

$$a\tilde{a} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Kongruenssin määritelmän mukaan erotus $a\tilde{a} - 1$ on jaollinen luvulla m eli on olemassa $k \in \mathbf{Z}$ siten, että $a\tilde{a} - 1 = km$. Tästä saadaan

$$a\tilde{a} = km + 1,$$

joten tulon $a\tilde{a}$ jakojäännös modulo m on 1. Siis

$$a \odot \tilde{a} = 1.$$

Lopuksi $\tilde{a} \in R^*(m)$, sillä yhtälöstä $a\tilde{a} - km = 1$ seuraa Apulauseen 1 nojalla, että $\text{syt}(\tilde{a}, m) = 1$.

On osoitettu, että pari $(R^*(m), \odot)$ on ryhmä, sillä kertolasku $\odot$ on liitännäinen joukossa $R^*(m)$, luku $1 \in R^*(m)$ on laskutoimituksen $\odot$ neutraalialkio joukossa $R^*(m)$ ja $\tilde{a} \in R^*(m)$ on alkion $a \in R^*(m)$ käänteisalkio laskutoimituksessa $\odot$.

Isomorfia-käsitteestä

Luvussa 2 todettiin, että $\phi(m)$ ilmoittaa ryhmän $(R^*(m), \odot)$ alkioden lukumäärän. Syy siihen, miksi kertolaskutaulukot ovat käyttökelpoisia isomorfiatarkasteluissa piilee siinä, että Eulerin funktio ei ole injektio. Esimerkiksi

$$\phi(5) = \phi(8) = \phi(10) = \phi(12) = 4.$$

Näin ollen neljän alkion kertolaskuryhmät voidaan muodostaa joukoissa $R^*(5)$, $R^*(8)$, $R^*(10)$ ja $R^*(12)$. Näihin liittyvät taulukot ovat (vastaavassa järjestyksessä)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 9 & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & 11 & 7 \\ 7 & 11 & 1 & 5 \\ 11 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

On luonnollista kysyä, kuinka monta *rakenteeltaan* erilaista ryhmätaulukkoa näiden neljän taulukon joukossa on? Tutkimalla taulukkoja

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & 11 & 7 \\ 7 & 11 & 1 & 5 \\ 11 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

havaitaan, että ne ovat rakenteeltaan identtiset; jos jälkimmäisessä käytetään symbolille 5 merkintää 3, symbolille 7 merkintää 5 ja symbolille 11 merkintää 7, saadaan ensimmäinen taulukko. Samalla tavalla havaitaan, että taulukot

$$(2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 9 & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ovat rakenteeltaan identtiset. Seuraavaksi voidaan kysyä, ovatko esimerkiksi taulukot

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

identtiset? Vastaus on: eivät ole. Yksi (ikävä) tapa todeta tämä on kirjoittaa jälkimmäisen taulukon alkiot 3, 5 ja 7 kaikissa mahdollisissa järjestyksissä ja kussakin tapauksessa vertailla saatua taulukkorakennetta ensimmäiseen. Pidetään tässä tunnettuna, että luvut 1 taulukoissa vastaavat välttämättä toisiaan identtisissä taulukoissa. Menettely on työlästä ja useamman alkion tapauksessa käytännössä mahdotonta. Toinen (huomatavasti parempi) tapa, jota myöskään ei tässä yhteydessä perustella, on seuraava: havaitaan, että ensimmäisessä taulukossa yhtälöllä

$$x^2 = x \odot x = 1$$

on kaksi ratkaisua, kun taas jälkimmäisessä taulukossa yhtälöllä $x^2 = 1$ on neljä ratkaisua. Näin taulukot eivät voi olla rakenteeltaan identtiset (isomorfiset). Nimitäin isomorfisilla laskutoimituksilla kaikki *algebraaliset ominaisuudet* ovat identtiset. Se, että alkio on itsensä käänteisalkio, on eräs algebrallinen ominaisuus, so. ominaisuus joka voidaan isomorfiakuvauksen avulla ”siirtää” struktuurista toiseen.

Siis eräs silmiinpistävä peruste modulaaristen kertolaskutaulukoiden rakenteiden erilaisuudelle on se, että taulukoissa on eri määrä lukuja 1 päädiagonaalilla. Muita perusteita on löydettävissä muunlaisten algebrallisten ominaisuuksien avulla.

Huomautus. Voidaan osoittaa, että on olemassa vain kaksi neljän alkion ryhmärakennetta. Taulukot (1) ovat esimerkkejä *Kleinin neliryhmästä*. Taulukot (2) ovat puolestaan esimerkkejä neljän alkion syklistä ryhmästä $(\mathbf{Z}_4, \oplus)$.

Tehtävä. Yhtälö $\phi(m) = 8$ pätee arvoilla $m \in \{15, 16, 20, 24, 30\}$. Tulosta kertolaskutaulut joukoissa $R^*(15)$, $R^*(16)$, $R^*(20)$, $R^*(24)$, $R^*(30)$ Luvun 5 Maple-proseduurilla ja selvitä, kuinka monta rakenteeltaan erilaista näiden viiden taulukon joukossa on!

Maple-proseduuri modulaaristen kertolaskutaulukoiden tulostamiseksi

Maple-proseduuri, joka muodostaa listan ryhmän $R^*(m)$ alkioista:

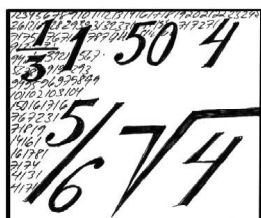
```
ryhma:=proc(m)
local p,R,n,j:
with(numtheory):
p:=phi(m):
R:=array(1..p):
j:=0:
for n to m-1 do
  if gcd(n,m)=1 then
    j:=j+1: R[j]:=n:
  fi:
od:
evalm(R):
end:
```

Maple-proseduuri, joka muodostaa ryhmän $R^*(m)$ kertolaskutaulukon:

```
kertotaulu:=proc(m)
local p,T,R,i,j:
with(numtheory):
p:=phi(m):
T:=array(1..p,1..p):
R:=ryhma(m):
for i to p do
  for j to p do
    T[i,j]:=R[i]*R[j] mod m:
  od:
od:
evalm(T)
end:
```

Viitteet

- [1] J. B. Fraleigh, *A First Course In Abstract Algebra*, Fourth edition, Addison-Wesley, 1989.
- [2] T. W. Hungerford, *Abstract Algebra*, Saunders College Publishing, 1990.
- [3] P. Jäppinen, A. Kupiainen ja M. Räsänen, *Calculus 8, Lukuteoria ja logiikka*, Otava, 1997.
- [4] T. Metsänkylä, *Kongruenssi – lukuteorian kätevä apuväline*, Solmu 3/1997–1998.
- [5] K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and Its Applications*, Addison-Wesley, 1992.



Osittaisintegroinnin ihmeitä: Wallisin ja Stirlingin kaavat

Matti Lehtinen

Dosentti

Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Solmun keskustelupalstan lukija kiinnitti huomiota Stirlingin kaavaan. Sehän on kaava, jota käytetään, kun halutaan tietää luvun $n!$ arvo isohkoilla n :n arvoilla. Kun n on kohtuullinen, niin $n!$ on valtava: oma taskulaskimeni suostuu kertomaan minulle, mitä on $69!$, mutta $70!$ panee sen solmuun. Mutta Stirlingin kaavan perusteella tiedän, että

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Siis

$$\begin{aligned} \ln(70!) &\approx 70,5 \cdot \ln(70) - 70 + 0,5 \cdot \ln(2\pi) \\ &\approx 230,4378 \end{aligned}$$

ja kun siirrytään kymmenkantaisiin logaritmeihin, nähdään, että

$$\log(70!) \approx \frac{230,4378}{\ln(10)} \approx 100,078.$$

$$\text{Siis } 70! \approx 10^{0,078} \cdot 10^{100} \approx 1,2 \cdot 10^{100}.$$

Stirlingin kaavaan sisältyvä likimääräisyys johtuu siitä, että kaava on oikeastaan alkupää luvun $\ln(n!)$ sarjake-

hitelmästä

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + \ln(2\pi) \\ (1) \quad &+ \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot n} + \frac{B_4}{3 \cdot 4 \cdot n^3} + \cdots \\ &+ \frac{B_{2k}}{(2k-1) \cdot (2k) \cdot n^{2k-1}} + \cdots. \end{aligned}$$

Tässä $B_2, B_4, \dots$ ovat *Bernoullin* lukuja. Nämä puolestaan määrittelee sarja

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k.$$

Erityisesti $B_2 = \frac{1}{6}$ ja $B_4 = -\frac{1}{30}$. Hiukan tarkempi Stirlingin kaava on tämän perusteella

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{1/(12n)}.$$

Lisätermi vaikuttaisi edellä lasketussa $\ln(70!)$:n arvossa vasta kolmanteen desimaaliin, joten tarkennus ei ole kovin suuri.

Tilanteet, joissa Stirlingin kaavan antamaa informaatiota tarvitaan, ovat usein kombinatorisia. Koska päämielenkiinto tällöin kohdistuu jonkin kertomatermin suuruusluokkaan kyseisessä tilanteessa, ei kaavan perustelujen pohtiminen juuri ole päällimmäisenä huolen

aiheena. Niinpä Stirlingin kaava on hyvä esimerkki matemaattisesta tuloksesta, johon uskotaan, mutta jonka perustelua harva lieene kunnolla käynyt läpi. Mutta kun matematiikassa ei oikeastaan pitäisi olla uskon asioita ollenkaan, niin on paikallaan antaa kaavalle jonkinmoinen perustelu.

Emme lähde johtamaan sarjaa (1) vaan tyydymme hiukan lievempään muotoon

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Raja-arvon (2) johto voidaan perustaa Wallisin kaavaan, joka antaa yllättävän kertolaskuesityksen ympyrään liittyvälle luonnonvakioille π . Wallisin kaava kertoo, että π on sellaisen lukujonon raja-arvo, jonka yleinen termi on

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n-1)}.$$

Wallisin kaavan johto ei ole vaikea: olennaisin idea on sinifunktion potenssien käyttäytyminen osittaisintegroinnissa. Stirlingin kaavaan siirryttäessä joudutaan vetoamaan tavalliseen potenssisarjan ominaisuuteen ja sarjateorian ensi alkeisiin kuuluvaan Leibnizin vuorottelevia sarjoja koskevaan lauseeseen.

Stirling ja Wallis

James Stirling syntyi v. 1692 Skotlannissa, lähellä Stirling-nimistä kaupunkia, jonka löytää kartasta Glasgow'n koillispuolelta. Stirlingin nuoruusvaiheet ovat jossain määrin häpyneet unohduksiin. Tiedetään kuitenkin, että hän opiskeli Oxfordissa, mutta joutui keskeyttämään opintonsa poliittisista syistä, perhe nimitäin kannatti vuoden 1688 Maineikkaassa vallankumouksessa Englannin valtaistuimelta karkotetun skotlantilaisen Stuart-suvun palauttamista valtaan. Stirling vietti pitkähkön ajan Venetsiassa, mutta palasi 1720-luvulla ensin Skotlantiin ja sitten Lontooseen. Lontoossa Stirling julkaisi vuonna 1730 *Methodus Differentialis*-nimisen kirjan, jossa sarja (1) esiintyy. Melkein samaan aikaan myös toinen Lontoossa vaikuttanut matemaatikko, Abraham De Moivre, julkaisi hyvin samanlaisen tuloksen. Muutamaa vuotta myöhemmin Stirling jätti matematiikan ja siirtyi, niin kuin nyt sanottaisiin, elinkeinoelämän palvelukseen. Hän toimi loppuikänsä kaivosyhtiön johtajana Skotlannissa. Stirling kuoli vuonna 1770.

John Wallis eli lähes sata vuotta aikaisemmin kuin Stirling. Hän syntyi 1616. Wallisin kerrotaan saaneen ensimmäisen kosketuksensa laskentoon vasta 14-vuotiaana, pikkuveljensä laskennon kirjasta. Wallis

opiskeli papiksi ja toimi seurakunnissa. Englannin sisällissodan aikana hän kunnostautui salakirjoitusten avajana – toimi, jossa matemaatikot ovat tuottaneet hyötyä tai vahinkoa ihmiskunnalle (riippuen siitä, kumman kiistapuolen kannalta asioita katsotaan) myöhemmissäkin konflikteissa. Wallisinkin uraa varjosti hiukan Stuartien suku: vaikka hän olikin Englannin sisällissodassa tasavaltalaisten puolella, hän allekirjoitti kirjeen, jossa paheksuttiin kuningas Kaarle I:n mestausta. Mutta kun Oxfordin geometrian professori Turner tuki avoimesti kuninkaan puoluetta, tasavaltalaishallitus erotti tämän ja nimitti virkaan Wallisin. Wallis olikin sitten professorina aina vuonna 1703 tapahtuneeseen kuolemaansa asti.

Nyt tarkastelun kohteena oleva kaava on julkaistu Wallisin pääteoksessa *Arithmetica Infinitorum* vuonna 1656. Wallis päätyi kaavaansa rohkean, enemmän viisaan arvauksen kuin matemaattisen todistuksen tunnusmerkit täyttävällä interpolaatiomenetelmällä.

Wallisin kaava

Wallisin kaavan voi näppärästi johtaa osittaisintegrointiin perustuvan kikan avulla. Osittaisintegrointi on sama kuin tulon derivointikaavan lukeminen takaperin. Jos f ja g ovat funktioita, niin

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Koska funktion derivaatan integraalifunktio on – integraalifunktion määritelmän mukaan, alkuperäinen funktio, on

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

eli

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Määrättyyn integraaliin sovitettuna edellinen kaava on

$$(3) \quad \int_a^b f'(x)g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Olkoon nyt $n \geq 2$, $g(x) = \sin^{n-1} x$ ja $f(x) = -\cos x$. Silloin

$$g'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x$$

ja

$$f'(x) = \sin x.$$

Jos vielä $a = 0$ ja $b = \sin \frac{\pi}{2}$, niin kaava (3) saa muodon (koska $\sin 0 = 0 = \cos \pi$)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx. \end{aligned}$$

Tästä on helppo ratkaista

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$$

ja

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx.$$

Merkitään lyhyiden vuoksi

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

Edellä on osoitettu, että

$$(4) \quad a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2},$$

kun $n \geq 2$. Mutta

$$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

ja

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Kun näistä lähdetään liikkeelle, saadaan $a_2 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4} a_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2}$, $a_5 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$ jne. Induktiodistuksella voi varmistaa, että

$$a_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdots 2k-1}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \frac{\pi}{2}$$

ja

$$a_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}.$$

Tekijä $\frac{\pi}{2}$ esiintyy jonon a_n joka toisessa termissä. Osamäärästä $\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}$ voidaan helposti ratkaista

$$(5) \quad \pi = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2} \cdot \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}.$$

Mutta $0 < \sin x < 1$ kaikilla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Siis esimerkiksi $\sin^{2k-1} x > \sin^{2k} x > \sin^{2k+1} x$ kaikilla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Jos integroitavien funktioiden arvot ovat kaikissa integrointialueen osissa samassa suuruusjärjestyksessä, niin funktioiden integraalitkin ovat tässä järjestyksessä. Siis $a_{2k+1} < a_{2k} < a_{2k-1}$. Kun tähän sovitetaan palautuskaava (4), saadaan

$$1 < \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} = \frac{a_{2k}}{\frac{2k}{2k+1} a_{2k-1}} < \frac{2k+1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}.$$

Nämä epäyhtälöt osoittavat selvästi, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} = 1.$$

Yhtälöön (5) sovellettuna tämä merkitsee, että

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2} \cdot \frac{2}{2k+1}.$$

Edelleen ei ole ongelma korvata raja-arvossa termi $\frac{2}{2k+1}$ termillä $\frac{1}{k}$, joten olemme saaneet aikaan Wallisin kaavan

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2k \cdot 2k}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdots (2k-1) \cdot (2k-1)}.$$

Kaavan osoittajassa oleva peräkkäisten parillisten kokonaislukujen $2, 4, \dots, 2k$ tulo on selvästi $2^k \cdot k!$. Kun nimittäjässä oleva peräkkäisten parittomien kokonaislukujen tulo lavennetaan parillisten kokonaislukujen tulolla, saadaan $\frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$. Sievennetään Wallisin kaavaa näillä ja otetaan siitä vielä puolittain neliöjuuri. Jäljelle jää

$$(6) \quad \sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)! \sqrt{k}}.$$

Tämä Wallisin kaavan muoto on hyödyllisin Stirlingin kaavan kannalta.

Pieni koukkaus sarjoihin ja eräs epäyhtälö

Päämäärämme, epäyhtälön (2) oikeaksi osoittaminen, vaatii tuekseen epäyhtälön, jonka todistaminen onnistuu yksinkertaisen sarjatempon avulla. Muistutetaan ensin mieleen, että jos jono (x_k) on vähenevä ja sen raja-arvo on 0, niin sarja $x_1 - x_2 + x_3 - \dots$ on suppeneva sarja ja sen summa on pienempi kuin x_1 . Suppeneminen perustuu siihen, että parillisesta määrästä termejä muodostettu osasumma $(x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \dots$ on kasvava jono kun taas parittomasta määrästä termejä

muodostettu jono $x_1 - ((x_2 - x_3) + (x_4 - x_5) + \dots)$ vähenee. Toisaalta parillisesta määrästä termejä muodostetut osajonot ovat pienempiä kuin parittomasta määrästä muodostetut. Sarjan summa on lisäksi pienempi kuin sen ensimmäinen termi. Nämä asiat muodostavat Leibnizin vuorottelevia sarjoja koskevan lauseen.

Olkoon nyt $0 < x < 1$. Geometrisen sarjan summakaavan mukaan on

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

Nojaudumme nyt siihen vähän koulumatematiikan ulkopuolelle asettuvaan, mutta tuskin yllättävään faktaan, jonka mukaan potenssisarjan määrittelevän funktion voi integroida niin, että sarjan termit erikseen integroidaan. Edellinen relaatio antaa näin ollen aiheen relaatioon

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots,$$

kun $-1 < x \leq 1$.

Ja nyt se temppu: lasketaan

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \dots + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \dots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)x^3 + \dots \end{aligned}$$

Sarjan termien merkki vaihtuu toisesta alkaen ja termit lähestyvät nollaa. Leibnizin lauseen nojalla sarjan summa on siten > 1 . Siis

$$(7) \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+x) > 1$$

kaikilla $0 < x < 1$. (Kirjoittaja ottaa mielellään vastaan muita epäyhtälön (7) todistuksia.)

Stirlingin kaava

Merkitsemme

$$c_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}.$$

Osoitamme, että jono (c_n) suppenee. Siihen riittää, että (c_n) on vähenevä jono. Mutta

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{1}{e(n+1)} \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Siis

$$(8) \quad \ln \frac{c_n}{c_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Mutta kun tähän sovelletaan epäyhtälöä (7) arvolla $x = \frac{1}{n}$, saadaan heti $\ln \frac{c_n}{c_{n+1}} > 0$ eli $c_n > c_{n+1}$. Voimme merkitä $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Raja-arvon c määrittämiseksi tukeudumme Wallisin kaavaan muodossa (6). Kun huomaamme, että

$$c_n^2 = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n} n} \quad \text{ja} \quad c_{2n} = \frac{(2n)! e^{2n}}{(2n)^{2n} \sqrt{2n}},$$

niin saamme

$$(9) \quad \sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^2}{c_{2n} \sqrt{2}} = \frac{c^2}{c\sqrt{2}},$$

josta voidaan ratkaista haluttu tulos $c = \sqrt{2\pi}$, eli juuri Stirlingin kaava (2).

Mutta vielä yksi varoitus! Kaavassa (9) tapahtuva raja-arvon siirtäminen lausekkeen sisään, nimittäjäänkin, on sallittua vain, jos raja-arvo $c \neq 0$. Ratkaistuna tietysti $c \neq 0$, mutta jotta ratkaisu on mahdollinen, on jo edeltä tiedettävä, että $c \neq 0$. Käytetään taas yksinkertaista integraaliarviota. Funktion f , $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaaja on alaspäin kupera. Kuvaajan ja x -akselin välin $[a, b]$ väliin jäävä pinta-ala on silloin pienempi kuin sellaisen puolisuunnikkaan, jonka kannat ovat $\frac{1}{a}$ ja $\frac{1}{b}$ ja korkeus $b - a$. Siis

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \ln(n+1) - \ln n \\ &= \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

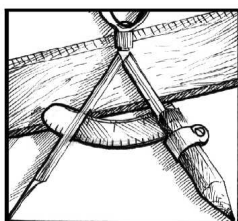
Kaavan (8) mukaan

$$\begin{aligned} \ln \frac{c_n}{c_{n+1}} &< \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Kun edelliset epäyhtälöt arvoilla $n = 1, 2, \dots, k-1$ lasketaan puolittain yhteen, niin supistuu paljon, ja jää

$$\ln \frac{c_1}{c_k} < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{4}.$$

Tämän voi kirjoittaa muotoon $c_1 < c_k e^{\frac{1}{4}}$ ja koska $c_1 = e$, myös muotoon $c_k > e^{\frac{3}{4}} > 0$. Siis yhtälön (9) kirjoittaminen oli oikeutettua.



Aineenopettajan aineenhallinnan tärkeydestä

Riikka Palkki

Filosofian ylioppilas

Matemaattisten tieteiden laitos, Oulun yliopisto

Viime aikoina on esitetty ajatuksia, että matematiikan aineenopettajakoulutus pitäisi siirtää luonnontieteellisestä tiedekunnasta kokonaan opettajankoulutuslaitokseen. Tulevana matematiikan opettajana suhtaudun tähän epäillen. Kuinka matematiikkaa voisi opettaa tietämättä mitä se oikeastaan on? Epäilen, syntyisikö matematiikan syvempi oivallus OKL:n puitteissa järjestetyssä kenties enemmän kasvatuksellista näkökulmaa painottavassa aineenopetuksessa. Kuinka laajaan matematiikan opetuksen järjestämiseen siellä ylipäänsä olisi resursseja?

Matematiikkaa ja yleensä sivuaineina luettuja fysiikkaa ja kemiaa ei nähdäkseni voi opettaa ilman, että itse tietää opetettavasta asiasta enemmän kuin oppilaansa. Olen huomannut, että 35 opintoviikon kokonaisuus esimerkiksi fysiikasta ei vielä tuo kovinkaan laajoja tietoja alasta. Opinnoissa tulee pian eteen tosiasia, että luonnontieteellisillä aloilla tietoa on rajaton määrä. Tämän huomattuani minunkin oli luovuttava lukion jälkeisestä – nyt naiivilta tuntuvasta – pyrkimyksestäni saavuttaa tieteen avulla selkeä ja tarkka kuva maailmasta. Tieto todellakin lisää tuskaa, kysymyksiä syntyy aina vain enemmän, eikä koko elämänsä aikana ehtisi kuin hieman syventyä esimerkiksi johonkin matematiikan osa-alueeseen. Vaatii paljon opintoja,

että edes jonkinlainen kokonaiskuva hahmottuu. Antaakseen totuudenmukaisen kuvan tieteestä opettajan kuitenkin lienee välttämätöntä huomata, ettei tärkeää tiedon viidakossa olekaan yksittäisten tietojen hallinta vaan tieteellinen ajattelutapa. Kuinka tämän välittäminen oppilaille onnistuisi, jos ei itse ole voinut opiskella ainettaan niin paljon, että kokonaisuus ja oman aineen ajattelutapa ovat alkaneet selkeytyä?

Matematiikkaa 70 opintoviikkoa opiskeltuani ehdottomasti tärkeintä mitä olen oppinut on matemaattinen, looginen ja luova ajattelutapa. Oivallus, että matematiikka ei vaadi neroutta, vaan on oma kiehtova kielensä, on mielestäni tärkeä. On upea tunne tietää, että edessä oleva täysin vieraan näköinen matemaattinen teksti avautuu, kun siihen jaksaa paneutua. Laajasti omaa alaansa opiskellessa oppii näkemään selkeitä kokonaisuuksia, johon matematiikan opetuksen tulisi mielestäni aivan alusta alkaen tähdätä. Olen huomannut miten kapea-alaista matematiikan opetus koulussa on. Luovuus, kriittisyys ja ajattelutavan kehittäminen jäävät usein asioiden hallinnan varjoon. Opetusta olisi kehitettävä, mutta epäilen olisiko kasvatustieteitä painottavan koulutuksen saaneilla näkemystä mihin suuntaan.

Jos aineenopettajan koulutus siirrettäisiin OKL:ään, hakeutuisiko sinne opiskelijoiksi enemmän opettamises-

ta kuin matematiikasta itsessään kiinnostuneita? Nykyinen järjestelmähän on, että aineenopettajat opiskelevat suurimman osan opinnoistaan opetettavien aineiden opintoja, ja suorittavat 35 opintoviikon opettajan pedagogiset opinnot. Opetettavien aineiden opintojen suuri osuus mielestäni takaa sen, että tulevat opettajat ovat kiinnostuneita ja innostuneita alastaan. Innostus on olennaista myös oppilaita aineen pariin motivoitaessa aikanaan opettajana toimiessa. Toisaalta tuskin monet edes ovat opiskelujen alkaessa selvillä tulevasta suuntautumisvaihtoehdostaan. Itse en olisi ollut valmis hakeutumaan suoraan aineenopettajakoulutukseen; muutamassa vuodessa ihminen vielä kasvaa, ja näkemys itselle parhaasta alasta kypsyy vähitellen.

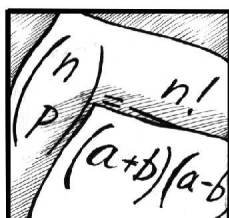
Nähdäkseni tärkeää on myös kuva, minkä tiede antaa itsestään oppilaille. Laajojen aineopintojen myötä kokee itsensä matemaatikoksi. Kun opiskellessa ei vielä miellä itseään niinkään opettajaksi, voi kokea olevansa osa tiedeyhteisöä, ja tutustua sen toimintaan sisältä käsin. Voisin kuvitella, että tällöin tuntee aivan eri tavalla olevansa vastuussa opettamastaan asiasta kuin ainoastaan opettajan identiteetin omatessaan. Kyseenalaista olisi myös viestittää oppilaille, ettei matematiikka ole niin tärkeää, että opettajan tarvitsisi sitä kunnolla opiskella. Millainen kuva tieteestä tällöin annettaisiin, ja mitä tuleville tieteentekijöille oikein viestitettäisiin? Miten kävisi tieteen arvostuksen ylipäänsä? Nykyisin on tarjolla paljon luonnontieteellistä tietoa. Oppilaille tulisi tarjota riittävät mahdollisuudet jatkoopintoihin ja laaja-alainen tiedollinen pohja. Mielestäni opettajilla on oltava valmiudet tämän edesauttamiseen.

Matematiikan opettaminen on mahdotonta ilman riittävää aineenhallintaa, mutta luonnollisesti olennaista

on myös miten opettaa. Opettajuuteen kasvu on pitkä tie, ja kasvatustieteellisiä opintoja voisi mielestäni sijoittaa opintojen varrelle eikä vain keskittää niin sanottuun auskultointivuoteen. Näin voi jossain määrin halutessaan tehdä. Oulun yliopistossa lukio- ja laitostuutorointi sekä peruskoulun alaluokkien matematiikkakerhojen vetäminen ovat oivia esimerkkejä tästä. Näihin osallistumisen myötä kenties myös aineenhallinnan tärkeyttä epäilevät opiskelijat tulevat toisiin ajatuksiin.

Kouluissa vastavalmistuneet opettajat kohtaavat kuitenkin arkitodellisuuden myötä varmasti myös kasvatuksellisen tehtävän haastavuuden. Tähän kuten yleensäkin opettajuuteen oppiminen vievät valtavasti aikaa, mutta aineenhallinnalta tätä aikaa ei nähdäkseni voi missään nimessä ottaa. Lisää pedagogisia opintoja saataisiin lisäämällä aineenopettajien koulutusaikaa esimerkiksi vuodella. Opettajien tehtävä on yhteiskunnallisesti niin tärkeä, että siihen kannattaa panostaa. Käytännön opetustyön haasteiden kohtaamiseen silti tuskin paremmin auttaa mikään muu kuin itsenäinen opettaminen. Ehdotukseni olisi vastavalmistuneiden aineenopettajien vähintään parin vuoden mittainen tukiryhmä, jossa nuori opettaja voisi sekä vertaistensa että jonkun kokeneemman ammattilaisen kanssa käydä läpi kohtaamiaan ongelmia ja opettajuuteen kasvua yleensä. Tällaisten ryhmien anti olisi varmasti korvaamatonta.

Aineenopettajille on varmasti tärkeää muukin kuin aineenhallinta, mutta matematiikan kohdalla on mielestäni syytä muistaa, että ilman aineenhallintaa ei ole mitään opettaa.



Tehtäviä

1. Neliön sivut ovat 12 cm pitkät. Jos neliötä kierretään 90° pisteen P ympäri, kahden neliön peittämä pinta-ala on 211 cm^2 . Jos neliötä kierretään jälleen 90° pisteen P ympäri, syntyy kolmas neliö. Kolmen neliön peittämä yhteinen pinta-ala on 287 cm^2 . Missä on piste P ?

2. Nelikulmion pinta-ala on A ja sen sivujen neliöiden summa on Q . Osoita, että pätee $Q \geq 2A$.

3. Olkoon

$$q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

ja olkoon $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funktio, jolle kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n ,

$$|f(n) - qn| < \frac{1}{q}.$$

Osoita, että $f(f(n)) = f(n) + n$.

4. Puoliympyrän muotoisen pesusienen halkaisija on 20 cm. Mikä on sienen pyyhkimän taulun osan pinta-ala, jos puoliympyrän halkaisijan päätepisteistä yksi

pysyy koko ajan taulun alareunalla ja toinen vasemmalla reunalla?

5. Etsi yhtälö suoralle, joka koskettaa käyrää

$$y = 3x^4 - 4x^3$$

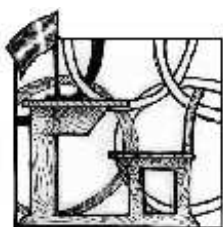
kahdessa eri pisteessä.

6. Muurahainen kävelee alueella, jota rajoittaa yhtälön

$$x^2 + y^2 + xy = 6$$

kuvaaja. Sen kävelemä reitti koostuu osista, jotka ovat yhdensuuntaisia koordinaatiston akseleihin nähden. Kävely alkaa käyrän satunnaisesta pisteestä ja jatkuu käyrän rajaamalla alueella kunnes muurahainen törmää käyrän kuvaajaan. Tällöin se tekee 90° käännöksen ja jatkaa kävelemistä käyrän rajaaman alueen sisällä. Se pysähtyy vain, jos se saapuu sellaiseen käyrän kohtaan, jossa se on ollut aiemmin tai se ei voi jatkaa kävelyä yllä kuvattujen sääntöjen mukaan. Osoita, että kaikista lähtöpisteistä lähdettäessä muurahaisen kävely pysähtyy.

Tehtävien ratkaisut ovat tämän lehden viimeisillä sivuilla.



Opiskelijat entistä osaamattomampia Ruotsissa

Ruotsin matematiikan tason laskua käsittelevä kirjoitus julkaistiin *Dagens Nyheter* -lehdessä 7. kesäkuuta 2002. Kirjoituksessa 23 matematiikan yliopistotason opettajaa maan eri yliopistoista ja teknisistä oppilaitoksista ilmaisee syvän huolestuneisuutensa asiasta.

”Edellytykset matematiikan korkeampaan opetukseen yliopistoissa ja korkeakouluissa ovat heikentyneet huomattavasti viimeisen kymmenen vuoden aikana. Huonojen esitietojen takia opiskelijoiden tulostyöskäyrät huononevat jatkuvasti. Ensimmäisen vuoden insinööriopiskelijoiden kokeessa Uumajassa vuonna 1998 opiskelijat ratkaisivat keskimäärin 65 prosenttia tehtävistä oikein. Samaisessa kokeessa vuonna 2001 vastaava luku oli vain 51 prosenttia. Kymmenen vuoden aikana hyväksyttyjen määrä ensimmäisen matematiikan tentin jälkeen on melkein puolittunut.”

Kirjoittajat antavat tunnustusta opetusministerin aloitteelle perustaa matematiikkatyöryhmä, koska hänkin on huolissaan ruotsalaisten koululaisten matematiikan taidoista.

Kirjoittajat korostavat hyvien matematiikan taitojen tarpeellisuuden lisääntymistä sekä selvittävät Ruotsin yliopisto- ja korkeakoulumatematiikan perusopetuksen ongelmia.

”Historiallisesti matematiikka on muiden luonnontieteiden ohella ollut vuorovaikutuksessa ennen kaikkea tähtitieteen ja fysiikan kanssa. Matemaattisia teorioita on voitu johtaa uusista fysiikan ilmiöistä ja kääntäen

matemaattiset teorialat ovat usein johtaneet uusiin fyysikaalisiin havaintoihin. Esimerkiksi jotkut alkeishiukkaset ovat alun perin olleet pelkkiä matemaattisia konstruktioita, kunnes niiden olemassaolo on lopulta pystytty toteamaan hiukkaskiihdyttimessä. Viime vuosina matematiikka on saanut uusia sovellusaloja myös biologiassa ja lääketieteessä. Muita tieteenaloja, joissa käytetään ahkerasti matematiikkaa, ovat ekologia, meteorologia, taloustiede, epidemiologia, kryptografia sekä informaatio- ja viestintäteknologia.

Myös elokuvateollisuus on viime vuosina alkanut käyttää matematiikkaa tuotannossaan. ’Star Wars’, ’Jurassic Park’, ’Taru Sormusten Herrasta’ ja ’Titanic’ ovat esimerkkejä elokuvista, joiden erikoistehosteissa on käytetty pitkälle kehitettyä matemaattista mallintamista. Myös monet arkipäivän tavarat, kuten autot, cd-soittimet, televisiot ja muu kodin elektroniikka, piilotelevat muovikuorensa sisällä uusia matemaattisia tuloksia. Autojen tapauksessa jopa kuori – siis kori – on matemaattisen mallintamisen tulos. Lyhyesti: kehittyvät teknologiset yhteiskunta vaatii hyviä matematiikan taitoja.

Matematiikan kieltä ja teorioita käytetään menestyksellä myös muilla kuin luonnontieteellisillä aloilla, ja näin syntyy uusia matematiikan osa-alueita, esimerkiksi finanssimatematiikka. Useat Nobelin taloustieteen palkinnon saajista ovat olleet matemaatikkoja. Tunnetuin näistä lienee John Nash, peliteorian isä, jonka teorialat ovat luonnon- ja taloustieteiden lisäksi vaikuttaneet myös konfliktitutkimuksen, psykologian ja sosio-

logian aloilla.

Kun yhtiö tekee päätöksen kalliin teknisen laitteiston hankkimisesta, talousarviossa huomioidaan myös ylläpidon ja turvallisuuden kustannukset. Samaa strategiaa tulisi käyttää myös inhimillisten voimavarojen suhteen. Tieteen ja korkean teknologian investoinnit edellyttävät ylläpitoa ja turvallisuutta alemmilla tasoilla jatkuvuuden ja kehityksen takaamiseksi. Tässä yhteydessä tarkoitamme asianmukaista lasten ja nuorten opetusta koulun kaikilla asteilla sekä yliopistoissa ja korkeakouluissa. Ilman tällaista opetusta seuraavalla tasolla ilmenee armotta 'toimintahäiriöitä'.

Korkeamman matematiikan opetuksen edellytykset Ruotsissa ovat muuttuneet voimakkaasti viimeisen kymmenen vuoden aikana. Ylioppilaiden esitiedot, mitä tulee sekä laskutaitoon että käsitteiden ymmärtämiseen, ovat huonontuneet jatkuvasti. Tämä on osoitettu Korkeakoululaitoksen maan matemaattisen koulutuksen arvioinnissa, ja samaa osoittavat myös ensimmäisen vuoden opiskelijoiden diagnostiset kokeet esim. Uumajan yliopistossa, Kungliga Tekniska Högskolanissa (KTH) sekä Chalmersin Teknillisessä korkeakoulussa. Tuloskäyrät viimeisen kymmenen vuoden aikana ovat olleet jatkuvassa laskussa, kun ne aiemmin ovat olleet miltei vakiot.

Chalmersissa yllä mainitun kaltainen koe on järjestetty vuodesta 1973 lähtien. Vuosina 1973–1993 siviili-insinöörien (vastaa Suomen dipl.ins. tutkintoa) määrä kasvoi noin 50 prosenttia, mutta diagnostisten kokeiden tuloksissa oli vain vähäistä vaihtelua. Suurin muutos tapahtui vuosina 1993–1994, vaikka uusien teekkarien määrä laskikin hieman, ja 1994–1995 voitiin jo todeta tulosten laskeneen noin 10 prosenttia. Siitä lähtien tulokset ovat huonontuneet vuosi vuodelta.

Uumajan tilastot vuodesta 1998 eteenpäin osoittavat, että arvosanan MVG (Mycket väl godkänt, paras kolmesta arvosanasta) lukion 'Matematiikka D' suuntautumisvaihtoehdosta saaneiden opiskelijoiden koetulokset laskivat vuoden 1998 80 prosentista vuoden 2001 68 prosenttiin. Vastaavasti arvosanan VG saaneiden tulokset laskivat keskimääräisestä 66 prosentista noin 50 prosenttiin, ja arvosanan G saaneet ratkaisivat keskimäärin 53 prosenttia tehtävistä oikein vuonna 1998, kun vuonna 2001 luku oli laskenut 40:een prosenttiin. Yhteensä uudet opiskelijat osasivat ratkaista vain 65 prosenttia kokeen tehtävistä vuonna 1998, kun taas vuonna 2001 sama luku oli vaivaiset 51 prosenttia. Saman ajanjakson aikana korkeakoulujen insinööriopiskelijoiden tulokset laskivat 43:sta prosentista noin 33 prosenttiin. Vastikään ilmestynyt julkaisu osoittaa saman ilmiön myös KTH:ssa.

Mitä tulee ensimmäisten yliopiston matematiikan kursien tuloksiin, voimme eräissä tapauksissa todeta ensimmäisessä tentissä hyväksytyjen määrän puoliintuneen viimeisten kymmenen vuoden aikana.

Kaikki nämä huomiot sopivat yhteen sen kuvan kanssa, jonka opettajat kautta maan ovat tiedostaneet. Opetuksen taso oli suhteellisen vakio 1970- ja 80-lukujen aikana, mutta trendi muuttui joskus 90-luvun alkupuolella. Miksi näin? Eräs usein kuultu selitys on lukion jälkeisten opintopaikkojen määrän kasvu luonnontieteellisillä ja teknisillä aloilla. Tämä tosin ei ole koko totuus, kuten Chalmersin ja Uumajan tilastot osoittavat.

Haluammekin nostaa esille kolme muuta mahdollista syytä, nimittäin pätevien opettajien puutteen, kurssien muodon yläasteissa ja lukioissa, sekä vallitsevan ajan hengen.

Kun valtio antoi vastuun nuorten koulunkäynnistä kunnille, myös opetuksen taso kärsi. Heikon talouden kunnilla voi olla vaikeuksia pätevien opettajien palkkaamisessa, eikä usein edes löydy päteviä hakijoita, vaikka taloudelliset edellytykset palkkaamisen olisivatkin olemassa. Valitettavasti ei ole tilastoja nykyisten matematiikan opettajien koulutuksesta. Usein ei myöskään ymmärretä niitä seurauksia, joille tilanne altistaa korkeamman koulutuksen ja – pitkällä tähtäimellä – koko yhteiskunnan.

Jo vuoden 1990 vaiheilla pitkä ja yleinen matematiikka lakkautettiin muodollisesti yläasteelta, mutta kesti silti pari vuotta ennen kuin tämä muutos käytännössä toteutui. Mielestämme tasoryhmittelyä tulisi käyttää, jotta matematiikasta aidosti kiinnostuneet saisivat mahdollisuuden ylimääräiseen panostamiseen. On ihmeteltävää, että 'tasoryhmittelyn' ja 'eliittipanostamisen' kaltaiset sanat ovat sallittuja esimerkiksi urheilussa, mutta kyseenalaisia lukuaineista puhuttaessa. Tasoryhmittely ei sitä paitsi tarkoita sitä, että vain eliittiin panostettaisiin, vaan myös sitä, että niille, joilla on vaikeuksia jossakin aineessa, tarjotaan mahdollisuus ryhmään, jossa opetus vastaa paremmin heidän tarpeitaan.

Kun oppilaat lopulta tulevat lukioon, heitä odottaa joukko matematiikan osakursseja, jopa kuusi kappaletta luonnontiedelinjalla, joista neljä tällä hetkellä on pakollisia. Tämä johtaa asioiden paloittaiseen osaamiseen, mikä on valitettavaa matematiikan kaltaisessa aineessa, missä oppiminen perustuu tiedon kerääntymiseen.

Ajan henki tuntuu olevan, että 'vaikeita' asioita tulee välttää mahdollisimman paljon, jotta suuntautumisvaihtoehdoista saataisiin houkuttelevampia. Tällaisessa vertailussa matematiikka ei pärjää; monet pitävät ainetta vaikenä. Tämä on myös muihin luonnontieteisiin sekä kieliaiaineisiin kohdistuva ongelma. Toki matematiikan opiskelu voi olla rankkaa ja vaativaa, mutta se voi myös suoda ihanan tyydytyksen tunteen, kun hallitsee matematiikan taidon. Suunnilleen sama tunne kuin minkä 'Joutsenlammen' tanssiminen, jalkapallon MM-tasolla pelaaminen tai kuolemattoman taiteen

maalaaminen voi antaa. Kaikki nämä vaativat paljon kärsivällistä harjoittelua.

Mitä yliopistoissa ja korkeakouluissa sitten tehdään tilanteen korjaamiseksi? Lukion ja korkeakoulun välisen kuilun ylittämiseksi tarjotaan muutettuja opetusmuotoja, karsittuja kursseja, lisää lukion kertausta, valmiitelevia kursseja ynnä muuta, mutta kaikki nämä toimivat vain ensiapuna ongelman todellista ratkaisemista odoteltaessa; kaikki lopputuotteen – valmistuneen opiskelijan – tason säilyttämisen ja valitettavasti myös opiskeluajan pidentymisen hinnalla.

Yllämainituista toimenpiteistä huolimatta opintojen kesken jättäminen on yleistynyt. Joillakin insinöörilinjilla on todettu jopa 20 prosentin opiskelijoista keskeyttävän opintonsa jo ensimmäisen vuoden jälkeen. Kahden vuoden jälkeen opiskelijoiden määrä voi olla jo puoliintunut, mitä on vaikea hyväksyä. Opiskelijalla, joka hyväksytään koulutusohjelmaan, on oltava mahdollisuus selviytyä opinnoistaan, lisäksi tietyn ajan

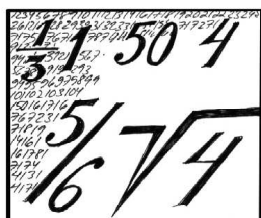
puutteissa.

Eräs ongelma on myös opiskelijaryhmien esitietojen tason kirjavuus. Joidenkin opiskelijoiden edellytykset korkeakoulutason matematiikan opiskeluun ovat todella hyviä, ja opiskeluajan pidentäminen tai tason laskeminen ei ole heidän etujensa mukaista.

Uuden matematiikkatyöryhmän tavoite tulee olla ongelmien tarkempi selvittäminen, syiden analysointi, sekä sopivien toimenpiteiden keksiminen ongelmien ratkaisemiseen. Tästä selviytyäkseen työryhmän kokoonpanon tulisi olla mahdollisimman monialainen. Maan matematiikan laitosten osaaminen tulee ottaa käyttöön työryhmää koottaessa.”

Kirjoittajat lopettavat huomauttamalla, että on korkea aika yhdistää voimat ministerin ehdottamalla tavalla. ”Jos Ruotsi aikoo säilyä korkean teknologian osaamisen maana, tarvitaan radikaaleja muutoksia kaikilla opetuksen tasoilla.”

Käännös: **Henri Lindén**



Tyhjistä joukoista

Timo Tossavainen

Lehtori

Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

On olemassa suuruudeltaan erilaisia äärettömiä joukkoja. Esimerkiksi reaalilukujen joukko on mahtavampi kuin luonnollisten lukujen joukko. Näin ollen voidaan pohtia myös sitä, tapahtuuko sama ilmiö toisessa ääripäässä eli onko olemassa mahtavuudeltaan erilaisia tyhjiä joukkoja. Tässä kirjoituksessa tarkastellaan tätä asiaa.

$$\infty \infty \infty \dots \Rightarrow \emptyset \emptyset \emptyset \dots ?$$

Lähes jokainen matematiikasta kiinnostunut on kuulut, että on olemassa erimahtavia äärettömyyksiä. Äärettömien joukkojen mahtavuuksien vertailu ei ole aivan triviaali asia, mutta siitä voidaan puhua ymmärrettävästi hyvin havainnollisella tasolla. Muun muassa Juhana Oikkonen on viime aikoina käsitellyt äärettömyyttä monesta eri näkökulmasta Dimensiossa julkaistussa kirjoitussarjassaan [3]. Toinen hyvä suomenkielinen esitys tästä aiheesta löytyy Miguel de Guzmánin kirjasta [1].

Niiden joukkojen, joiden alkioiden lukumäärä voidaan ilmoittaa luonnollisen luvun avulla, vertailu on helpompaa. Joukko A on *mahtavampi kuin* joukko B , jos joukon A alkio määrä on suurempi kuin joukon B . *Yhtämahtavissa* äärellisissä joukoissa on sama määrä alkioi-

ta. Erityisesti, jos epätyhjiä joukoilla A ja B on samat alkio eli $A = B$, niin ne ovat yhtämahtavat.

Mutta onko tilanne täysin selvä tyhjiä joukkojen osalta? Tyhjäksi sanotaan jokaista sellaista joukkoa, jossa ei ole yhtään alkioita eli sen alkio määrä on nolla. Koska nolla ja ääretön ovat läheistä sukua toisilleen – molemmat aiheuttavat aritmeettisia ongelmia, katso esim. [5] – ja toisaalta erilaisia äärettömyyksiä on rajattoman monta, voidaan ainakin *a priori* epäillä, että myös tyhjiä joukkoja olisi tässä mielessä useita erilaisia.

Jos tyhjiä joukkojen tarkastelun lähtökohdaksi otetaan aksiomaattinen joukko-oppi, tarkastelemamme ongelma ratkeaa triviaalisti. Aksiomien mukaan on olemassa vain yksi tyhjä joukko, joka on kaikkien joukkojen osajoukko. Aksiomaattinen lähestymistapa joukko-oppiin ei kuitenkaan välttämättä kuulu edes jokaisen matemaatikon yleissivistykseen, vaan yleensä muun kuin joukko-opin alan matemaatikot tarkastelevat joukkoja ns. naivista näkökulmasta, jossa käsitellään joukko ei edes määritellä vaan oletetaan intuitiivisesti ymmärretyksi asiaksi. Tästä näkökulmasta tyhjiä joukkojen ongelma on hieman vähemmän triviaali. Epätäydellisesti mutta jollakin tavalla valaisevasti voimme tarkastella ongelmaa lauselogiikan avulla.

Olkoon X joukko. Joukko Y on joukon X *osajoukko*, jos sen jokainen alkio on myös joukon X alkio. Tätä

merkitään kirjoittamalla $Y \subset X$. Jokainen $Y \subset X$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$(1) \quad Y = \{x \in X : P(x)\},$$

missä P on joukossa X määritelty ominaisuus (Valitaan esimerkiksi $P(x) = "x \in Y"$). Joukossa X määritellyllä ominaisuudella tarkoitetaan ehtoa, jonka voimassaolo voidaan selvittää joukon X jokaisen alkion tapauksessa.

Sama joukko voidaan yleensä kirjoittaa muodossa (1) useamman eri ominaisuuden avulla, mutta jokainen joukossa X määritelty ominaisuus P määrää kaavan (1) kautta täsmälleen yhden joukon X osajoukon, nimittäin kaikkien niiden joukon X alkioiden x joukon, joilla on ominaisuus P eli ehtolause $P(x)$ on tosi. Joukko X voidaan kirjoittaa esimerkiksi muodoissa $\{x \in X : x = x\}$ ja $\{x \in X : x \in X\}$.

Joukkojen A ja B yhdiste $A \cup B$ on joukko, joka sisältää täsmälleen ne alkiot, jotka ovat joko joukon A tai joukon B tai molempien joukkojen alkioita.

Olkoot P ja Q joukossa X määritellyjä ominaisuuksia. Tällöin joukko-opin relaatiota

$$\{x \in X : P(x)\} \subset \{x \in X : Q(x)\}$$

vastaa logiikan lause

$$\forall x \in X : P(x) \Rightarrow Q(x)$$

ja päinvastoin. Samoin ilmaisut

$$\{x \in X : P(x)\} = \{x \in X : Q(x)\}$$

ja

$$\forall x \in X : P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

ovat ekvivalentit.

Määritelmä 2. Olkoon X joukko. Joukon X tyhjä joukko $\emptyset_X$ on joukko

$$\{x \in X : x \neq x\}.$$

Pyrimme osoittamaan seuraavan lauseen.

Lause 3. Olkoot X ja Y joukkoja. Tällöin $\emptyset_X = \emptyset_Y$.

Jos Lause 3 on tosi, niin jokaisen joukon tyhjä joukko on yksi ja sama tyhjä joukko, jota merkitään symbolilla $\emptyset$. Erityisesti myös $\emptyset_\emptyset = \emptyset$. Lisäksi $\emptyset \subset X$, olipa X mikä tahansa joukko.

Lauseen 3 perustelu. Koska $\emptyset_X \subset X \subset X \cup Y$ ja $\emptyset_Y \subset Y \subset X \cup Y$, niin $\emptyset_X \subset X \cup Y$ ja $\emptyset_Y \subset X \cup Y$. Näin ollen $\emptyset_X$ ja $\emptyset_Y$ voidaan kirjoittaa muodossa (1) siten, että

$$\emptyset_X = \{x \in X \cup Y : x \in \emptyset_X\}$$

ja

$$\emptyset_Y = \{x \in X \cup Y : x \in \emptyset_Y\}.$$

Osoitetaan, että $\emptyset_X = \emptyset_{X \cup Y} = \emptyset_Y$.

Lauselogiikassa yhdistetty lause $P \Leftrightarrow Q$ on tosi täsmälleen silloin, kun lauseilla P ja Q on sama totuusarvo. Nyt joukossa $X \cup Y$ määritellyt ehdot $x \in \emptyset_X$ ja $x \in \emptyset_{X \cup Y}$ ovat epätosia kaikilla x , joten lause

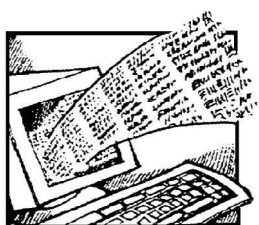
$$x \in \emptyset_X \Leftrightarrow x \in \emptyset_{X \cup Y}$$

on tosi kaikilla $x \in X \cup Y$. Siis $\emptyset_X = \emptyset_{X \cup Y}$.

Vastaavasti nähdään, että $\emptyset_Y = \emptyset_{X \cup Y}$. Näin ollen $\emptyset_X = \emptyset_Y$.

Viitteet

- [1] M. de Guzmán: Matemaattisia seikkailuja, Oy Finn Lectura Ab, 1990.
- [2] J. Dieudonné: Foundations of modern analysis, Academic Press, 1969.
- [3] J. Oikonen: Sen seitsemän sortin ääretön, Dimensio 1,2,4,5/2002.
- [4] J. Merikoski, A. Virtanen ja P. Koivisto: Diskreetti matematiikka I, Tampereen yliopisto, 1998.
- [5] C. Seife: Nollan elämäkerta, WSOY, 2000.
- [6] R. L. Vaught: Set Theory - An Introduction, Birkhäuser, 1995.



Verkkomateriaalien käyttö peruskoulun yläluokkien todennäköisyyslaskennan opetuksessa

Teemu Saranpää

Lehtori

Veitenmäen koulu, Kaarina

Opetustyön ohessa tehdyssä vertailussa oli tarkoituksena selvittää, oppivatko oppilaat paremmin aloittaessaan todennäköisyyslaskennan harjoittelun tietokoneilla tehtävillä verkkomateriaaleilla vai kirjan tehtävillä. Käytetyt verkkomateriaalit ovat Juha Purasen kehittämiä ja löytyvät osoitteesta <http://noppa5.pc.helsinki.fi/uudet/daihtm/tn/tn-teht1.html>.

Vertailu toteutettiin jakamalla luokan oppilaat kahteen mahdollisimman samanlaiseen ryhmään lähtötasotestin perusteella. Toinen ryhmä aloitti harjoittelun tietokoneilla ja toinen kirjan tehtävillä. Harjoittelua kesti kaksi oppituntia, minkä jälkeen molemmilla ryhmillä teetettiin testi. Tämän jälkeen ryhmät vaihtoivat paikkoja ja harjoittelivat taas kaksi tuntia, minkä jälkeen ryhmät testattiin uudelleen.

Ryhmien välille erot muodostuivat lähinnä heikkojen oppilaiden menestyksestä testeissä. Hyvät oppilaat menestyivät molemmissa testeissä riippumatta siitä, kumpaan ryhmään kuuluivat. Näyttää siltä, että oli parempi aloittaa tietokoneharjoituksilla. Kirjan tehtävät taas ovat monipuolisempia ja sopivat näin taitojen syventämiseen. Heikoille oppilaille tietokonetyöskentely

selkeästi sopi. Heidän motivaationsa lisääntyi ”uuden” työtavan myötä ja tämän myötä kiinnostusta riitti paneutua harjoituksiin pidemmäksi aikaa kuin yleensä kirjan tehtäviin.

Hyville oppilaille kirjan tehtävät sopivat paremmin niiden monipuolisuuden vuoksi, heille tietokoneharjoitukset olivat turhan helppoja ja yksitoikkoisia. Näille oppilaille verkkomateriaaleista riittää tehtävää maksimisaan yhdeksi oppitunniksi, minkä jälkeen on syytä siirtyä haastavampien kirjan tehtävien pariin.

Oppilaiden kokemuksia tietokoneharjoittelusta selvitettiin lopuksi tehdyllä kyselylomakkeella. Palautteen pohjalta näytti, että hyvät oppilaat pitivät harjoituksia liian helppoina ja heikot vaikeina. Hyvät oppilaat moittivat harjoituksia yksipuolisiksi ja sekaviksi. Tietokoneilla työskentelystä lähes kaikki pitivät, mutta heidän mielestään harjoituksiin kuitenkin käytettiin liikaa aikaa niiden määrään ja vaikeustasoon nähden. Kaikki olivat sitä mieltä, että he oppivat paremmin kirjan tehtävien avulla.

Myös heikot oppilaat pitivät tietokoneharjoituksia sekavina ja, kuten edellä mainittiin, vaikeina. Kaikki pi-

tivät tietokonetyöskentelyä hauskana ja rentona työtapana, mutta enemmistö oli silti sitä mieltä, että oppivat paremmin kirjan tehtävien avulla.

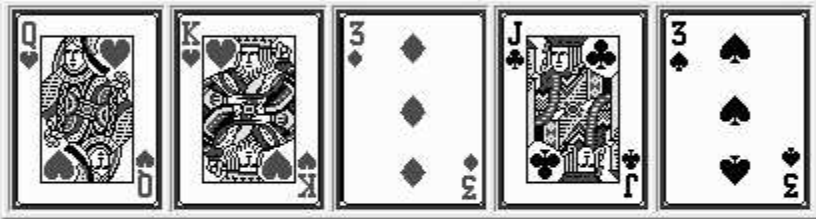
Opettajan näkökulmasta verkkomateriaalit ovat hyvää vaihtelua perinteiselle kirjaharjoittelulle. Niiden käyttöä on kuitenkin syytä suunnitella huolellisesti. Harjoitusten idean selittäminen ja ”kouluttaminen” on syytä tehdä ennen varsinaisen harjoittelun aloittamista. Jos oppilaille antaa varsin vapaat kädet toimia, joutuu opettaja selittämään lähes jokaiselle oppilaalle erikseen harjoitusten idean ja toiminnan. Harjoituksiin käytettävää aikaa on syytä myös suunnitella, sillä hyvät oppilaat tekevät harjoitukset huomattavasti nopeammin

kuin heikot. Lisätehtävänä hyvillä oppilaille voisi esimerkiksi esitellä joitain verkko-materiaalien sisältämiä simulaatioita ja liittää näihin mahdollisesti laskutehtäviä.

Verkkomateriaaleja voisi käyttää myös harjoituksina itsenäisessä opiskelussa. Tämä tosin edellyttää, että materiaaleihin on tutustuttu huolellisesti etukäteen. Erityisesti peruskoulussa voisi perusharjoituksia hyvin antaa esimerkiksi läksytehtäviksi. Oppilaiden voisi myös antaa tutustua itsenäisesti verkkomateriaaleihin ennen todennäköisyyslaskennan opetuksen aloittamista. Materiaalit toimisivat siis hyvin myös johdatuksena aiheeseen.

Korttipakka Sulje Help Uusi alku Seuraava Ratkaisu 1 Ratkaisu 2

Mikä on todennäköisyys saada vähintään 4 punaista korttia



Sekoita

Vastaus: 1 10 50 100 500 1000

Jakoja	A tapahtunut	A ei tapahtunut	P
1	0	1	0

tarkista

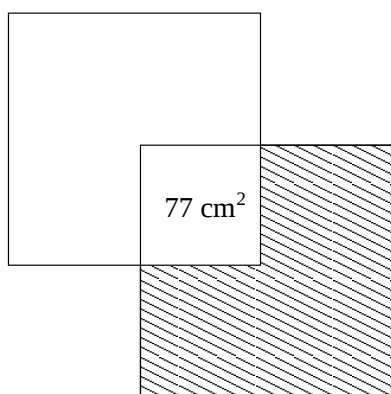
Kuva. Esimerkkitehtävä Juha Purasen verkkosivuilta
<http://noppa5.pc.helsinki.fi/uudet/d41htm/tn/tn-teht1.html>.
 Korttipakkaan liittyviä tehtäviä: Hyvinsekoitetusta pakasta nostetaan 5 korttia.



Tehtävien ratkaisut

1. Ratkaisu. Toisen kierron jälkeen syntyvä neliö on peilikuva alkuperäisestä neliöstä pisteen P suhteen. Jos P ei ole alkuperäisen neliön sisällä, niin peilikuvalla ja alkuperäisellä neliöllä ei ole yhteistä pistettä. Tällöin kolmen neliön yhteisen pinta-alan täytyy olla suurempi kuin $2 \cdot 144 \text{ cm}^2 = 288 \text{ cm}^2$.

Oletetaan, että neliön sisällä on sellainen piste P , jonka ympäri neliötä 90° kiertämällä saadaan kokonaispinta-alaksi 211 cm^2 . Yhden neliön pinta-ala on 144 cm^2 ja päällekkäisten osien pinta-ala on $2 \cdot 144 \text{ cm}^2 - 211 \text{ cm}^2 = 77 \text{ cm}^2$. Vähentämällä yhteisen pinta-alan neliöstä saamme $144 \text{ cm}^2 - 77 \text{ cm}^2 = 67 \text{ cm}^2$.



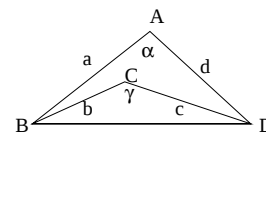
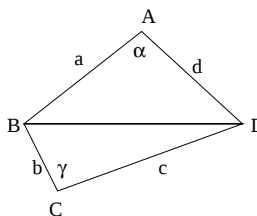
Kuva 1.

Ensimmäinen kierto siis lisäsi pinta-alaa 67 cm^2 (tummennettu alue kuvassa 1). Toista neliötä kierretään nyt 90° pisteen P ympäri. Ensimmäisen neliön kierretty kuva on toinen neliö ja toisen neliön kierretty

kuva on kolmas neliö. Kokonaispinta-ala voi kasvaa kussakin kierrossa enintään saman verran kuin edellisellä kerralla, eli pinta-ala ei voi olla suurempi kuin $211 \text{ cm}^2 + 67 \text{ cm}^2 = 278 \text{ cm}^2$, joka on vähemmän kuin annettu 287 cm^2 . Siten pistettä P ei ole olemassa.

2. Ratkaisu. Ensimmäiseksi osoitamme, että minkä tahansa nelikulmion sivujen neliöiden summa on enintään neljä kertaa sen pinta-ala. Kuvan 2 merkintöjä käyttäen nelikulmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{ABD} \pm A_{BCD} \\ &\leq A_{ABD} + A_{BCD} \\ &= \frac{a \cdot d \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{b \cdot c \cdot \sin \gamma}{2} \\ &\leq \frac{ad + bc}{2}. \end{aligned}$$



Kuva 2.

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä saamme

$$ad \leq \frac{a^2 + d^2}{2}$$

ja

$$bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2},$$

ja siten

$$4A_{ABCD} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

kuten yllä on väitetty.

Jos vastaava epäyhtälö muodostetaan jokaiselle monitahokkaan sivulle ja epäyhtälöt summataan, niin vasen puoli on $4A$ ja oikea puoli $2Q$. Niinpä $4A \leq 2Q$ ja siten $2A \leq Q$.

3. Ratkaisu. Koska $\frac{1}{q} > |f(0)|$, niin $f(0) = 0$. Kaikilla muilla n :n arvoilla f :n arvo on positiivinen kokonaisluku, sillä muuten ehdosta $f(n) = 0 < n$ seuraa, että

$$\frac{1}{q} > |f(n) - qn| = |-qn|$$

ja siten

$$n < \frac{1}{q^2} < 1,$$

mikä on mahdotonta. On helppo tarkistaa, että

$$q(q-1) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1.$$

Siten mille tahansa luonnolliselle luvulle n on

$$\begin{aligned} & |f(f(n)) - f(n) - n| \\ &= |f(f(n)) - qf(n) + (q-1)f(n) - q(q-1)n| \\ &= |f(f(n)) - qf(n) + (q-1)(f(n) - qn)|. \end{aligned}$$

Koska kaikille reaaliarvoille pätee $|a+b| \leq |a| + |b|$, voi edellinen itseisarvo olla korkeintaan

$$\begin{aligned} & |f(f(n)) - qf(n)| + |(q-1)(f(n) - qn)| \\ &= |f(f(n)) - qf(n)| + (q-1)|f(n) - qn|, \end{aligned}$$

joka on vähemmän kuin

$$\frac{1}{q} + (q-1)\frac{1}{q} = 1$$

annetun ehdon mukaan. Siten

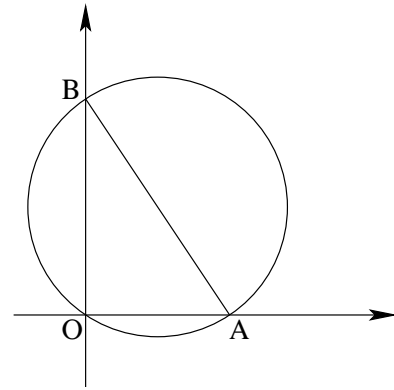
$$|f(f(n)) - f(n) - n| < 1,$$

mikä on mahdollista vain, jos

$$f(f(n)) - f(n) - n = 0,$$

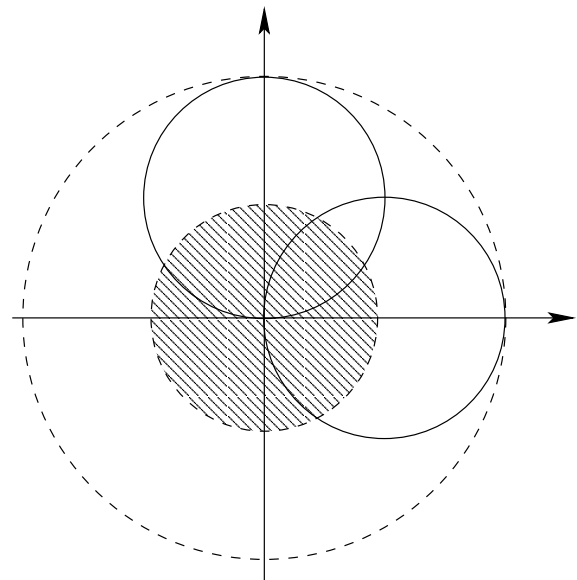
koska $f(f(n))$, $f(n)$ ja n ovat kokonaislukuja.

4. Ratkaisu. Oletetaan, että sieni on siis puoliympyrän muotoinen levy, jonka halkaisija on AB . Jos A liikkuu pitkin x -akselia ja B liikkuu pitkin y -akselia, niin puoliympyrän toisen puolen kehä liikkuu pisteen O kautta. Siten mikään pyyhityn alueen piste ei ole 20 senttimetriä kauempana pisteestä O .



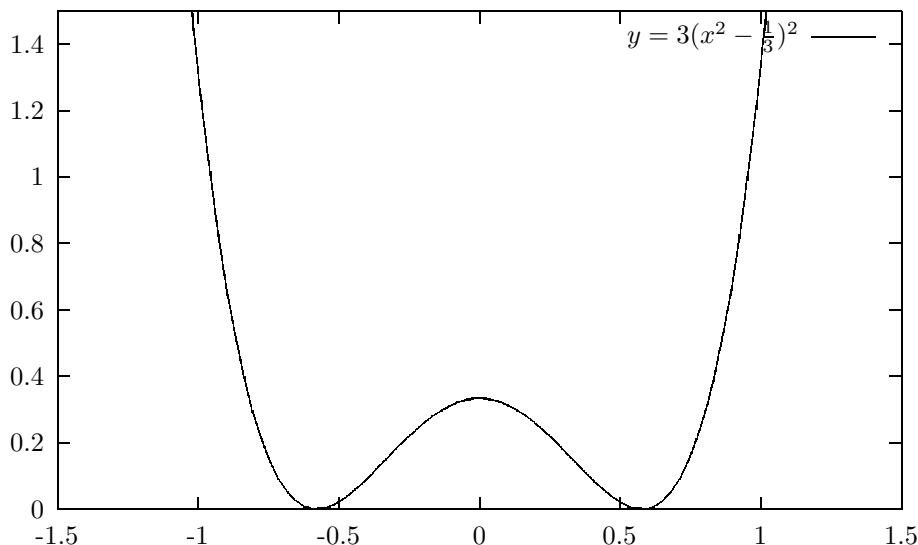
Kuva 3.

Ympyrän neljänneksen, jonka säde on 10 cm ja keskipiste O , peittävät puoliympyrät, joiden halkaisijoina ovat x - ja y -akselit (Kuva 3).



Kuva 4.

Jos P on kahden kaaren väliin jäävä piste ja OP leikkaa laajemman kaaren pisteessä R , niin pisteet R_1 ja R_2 ovat pisteen R projektiot x - ja y -akseleilla. Tällöin OR_1RR_2 on nelikulmio, jonka lävistäjät ovat $RO = R_1R_2 = 20$ cm. Jos piste C on nelikulmion keskipiste, niin $OC = 10$ cm, ja C sijaitsee pienemmällä ympyrän neljänneksen kaarella ja P sijaitsee janalla CR . Piste P sijaitsee siis kolmion R_1RR_2 rajaaman alueen sisällä. Kolmio R_1RR_2 on kokonaan puoliympyrän, jonka halkaisija on R_1R_2 ja kehäpiste R , sisällä. Siten pesusieni pyyhkii pisteen P .



Kuva 7.

5. Ratkaisu 2. Suora $y = ax + b$ sivuaa funktion $y = 3x^4 - 4x^3$ kuvaajaa korkeintaan kahdessa pisteessä jos ja vain jos polynomi

$$p(x) = 3x^4 - 4x^3 - ax - b$$

sivuaa x -akselia kahdessa pisteessä eli sillä on kaksi juurta. Kuvaajan aste on neljä ja siten jokainen juuri on kaksoisjuuri, ja muita juuria ei ole. Jos juuret ovat x_1 ja x_2 , niin $p(x)$ voidaan jakaa tekijöihinsä:

$$(3) \quad p(x) = 3(x - x_1)^2(x - x_2)^2.$$

Kertomalla oikea puoli auki saadaan

$$\begin{aligned} 3x^4 - 4x^3 - ax - b \\ = 3x^4 - 6(x_1 + x_2)x^3 + 3(x_1^3 + 4x_1x_2 + x_2^2)x^2 \\ - 6x_1x_2(x_1 + x_2)x + 3x_1^2x_2^2. \end{aligned}$$

Koska vastaavien kertoimien pitää olla yhtä suuria,

$$(4) \quad x_1 + x_2 = \frac{2}{3},$$

$$(5) \quad x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 0,$$

$$(6) \quad 6x_1x_2(x_1 + x_2) = a,$$

$$(7) \quad -3x_1^2x_2^2 = b.$$

Yhtälöstä (5) saadaan

$$(x_1 + x_2)^2 = -2x_1x_2$$

ja edelleen yhdistämällä tämä yhtälön (4) kanssa saadaan $x_1x_2 = -\frac{2}{9}$. Tämän jälkeen yhtälöstä (6) seuraa $a = -\frac{8}{9}$ ja edelleen yhtälöstä (7) $b = -\frac{4}{27}$.

Edellisestä seuraa, että suoran yhtälö voi olla vain

$$y = -\frac{8}{9}x - \frac{4}{27}.$$

Tämä suora on kysytty ratkaisu, koska yhtälöiden (4) ja (5) juuret ovat reaalityyppisiä ($x_1 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ja $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$) ja yllä olevat vaiheet voidaan suorittaa käänteisesti ja yhtälön (3) tekijät ovat reaalityyppisiä polynomeja.

5. Ratkaisu 3. Olkoon a mielivaltainen reaalityyppinen luku. Yhtälö suoralle, joka sivuaa annettua käyrää pisteessä $(a, f(a))$, on

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Jos $b \neq a$, niin tämä on yhtenevä käyrän tangentille pisteessä $(b, f(b))$ jos ja vain jos

$$(8) \quad f'(a) = f'(b)$$

ja

$$(9) \quad f(a) - a \cdot f'(a) = f(b) - b \cdot f'(b).$$

Yhtälöstä (8) saadaan jakamalla polynomilla $a - b \neq 0$, että

$$(10) \quad a^2 + ab + b^2 - a - b = 0,$$

ja yhtälöstä (9) samalla tavoin, että

$$(11) \quad 9(a + b)(a^2 + b^2) - 8(a^2 + ab + b^2) = 0.$$

Kohdasta (10) seuraa

$$a^2 + ab + b^2 = a + b$$

ja sijoittamalla yhtälöön (11) saamme

$$(12) \quad a^2 + b^2 = \frac{8}{9}$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (10) saamme

$$(13) \quad a + b - ab = \frac{8}{9}$$

Koska yhtälöt (12) ja (13) johtavat neljännen asteen yhtälöön, esitellään uudet muuttujat $u = a + b$ ja $v = ab$. Saamme

$$u^2 - 2v = \frac{8}{9}, \quad u - v = \frac{8}{9}.$$

Sijoittamalla $v = u - \frac{8}{9}$ saamme

$$u^2 - 2u + \frac{8}{9} = 0.$$

Tämän juuret ovat $u_1 = \frac{2}{3}$ ja $u_2 = \frac{4}{3}$. Vastaavat arvot v :lle ovat $v_1 = -\frac{2}{9}$ ja $v_2 = \frac{4}{9}$.

Nyt a :n ja b :n arvot ovat yhtälöiden

$$t^2 - u_1 t + v_1 = 0$$

ja

$$t^2 - u_2 t + v_2 = 0$$

ratkaisuja. Ensimmäisessä tapauksessa $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ja $b = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ ja toisessa tapauksessa juuret ovat yhtäsuuret, $a = b = \frac{2}{3}$. Koska määritelmän mukaan $a \neq b$, toinen tapaus ei ole ratkaisu.

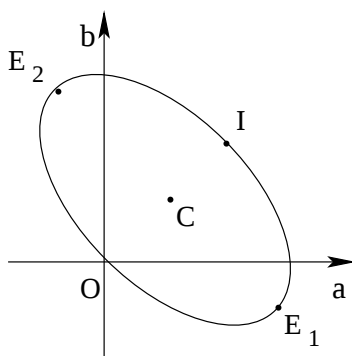
Jos $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$, niin $f'(a) = -\frac{8}{9}$ ja

$$f(a) - a \cdot f'(a) = -\frac{4}{27},$$

ja siten tangentin yhtälö pisteessä $(a, f(a))$ on

$$y = -\frac{8}{9}x - \frac{4}{27}.$$

Koska kaikki vaiheet ovat käänteisiä, saadaan sama yhtälö tangentille pisteessä $(b, f(b))$.



Kuva 8.

Huomautuksia. Ratkaisun 3 ehdosta (10),

$$\frac{f'(a) - f'(b)}{a - b} = 0,$$

saadaan ellipsi, jos a ja b esittävät koordinaattiakseleita (Kuva 8). Tämä ellipsi koostuu pisteistä $P(a, b)$, joille käyrän $y = 4x^3 - 3x^2$ tangentit pisteissä $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ ovat yhdensuuntaisia. Ellipsin akselit ovat yhdensuuntaisia koordinaattiakselien kulmien lävistäjille, ja ellipsin keskipiste on $C(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Lyhyemmän lävistäjän päätepisteet ovat O ja $I(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

$$E_1(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}})$$

ja

$$E_2(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})$$

ovat kaksinkertaisen tangentin sivuamispisteitä. Tämä suhde tulee selväksi, jos ajattelee neljännen asteen yhtälön kuvaajan symmetrisyyttä pisteen $x = \frac{1}{3}$ suhteen. Tämä on symmetriakeskuksen abskissa kolmannen asteen derivaattafunktion kuvaajalle, joka esittää tangenttien kulmakerrointa. Jos kaksoistangentin yhtälö vähennetään neljännen asteen polynomista, saadaan neljännen asteen käyrä, joka on symmetrinen suoran $x = \frac{1}{3}$ suhteen. (Tämä on syynä sijoitukseen ratkaisussa 1.) Siten tangettipisteiden abskissat ovat symmetrisiä pisteen $x = \frac{1}{3}$ suhteen. Tämä piste sijaitsee kuvassa 8 suoralla $a + b = \frac{2}{3}$, joka on ellipsin pääakseli.

On helppo tarkistaa, että kaikilla neljännen asteen käyrillä, joilla on kaksinkertainen tangentti, on tämä ominaisuus, eli

$$\frac{f'(a) - f'(b)}{a - b} = 0$$

esittää ellipsiä täsmälleen tässä tapauksessa. Kaikki tällä tavoin saadut ellipsit ovat samanlaisia, niiden eksentrisyys on $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ja ne kaikki saadaan kuten kuvassa 8 on esitetty. Pikkuakselien päätepisteet esittävät vastaavan neljännen asteen käyrän käännepisteitä ja pääakselien päätepisteet esittävät kaksoistangenttien kosketuspisteitä.

6. Ratkaisu 1. Jos muurahainen on käyrän pisteessä $P(a, b)$, niin yhtälöillä

$$x^2 + bx + b^2 - 6 = 0$$

ja

$$y^2 + ay + a^2 - 6 = 0$$

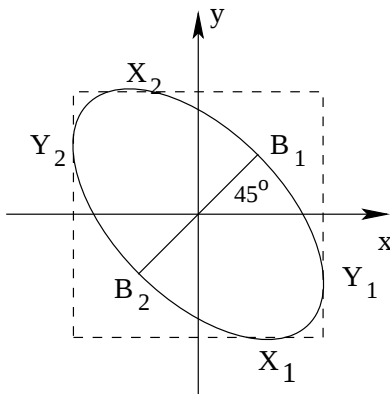
on reaalityyppiset juuret a ja b . Siten diskriminantit $D_b = 24 - 3b^2$ ja $D_a = 24 - 3a^2$ ovat ei-negatiivisia. Jos kumpi tahansa niistä on nolla, esimerkiksi $D_a = 0$ eli $|a| = 2\sqrt{2}$ (siten $b = -\frac{a}{2}$), niin muurahainen ei voi jatkaa kävelyään y -akselin suuntaisesti. Näin käy

pisteissä $Y_1(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ja $Y_2(-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Samoin, kun $D_b = 0$, eli muurahainen on pisteissä $X_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ tai $X_2(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, se ei voi jatkaa kävelyään x -akselin suuntaisesti.

Tämä on helposti nähtävissä, jos huomaa, että käyrä

$$x^2 + y^2 + xy = 6$$

on ellipsi (Kuva 9) ja pisteet X_i, Y_i ovat pisteitä, joissa koordinaattiakselien suuntaiset tangentit sivuavat käyrää.



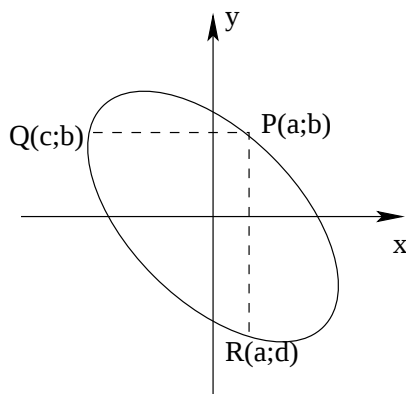
Kuva 9.

Jos muurahainen on pisteessä $P(a, b)$, joka ei ole mikään neljästä yllä mainitusta pisteestä, niin muurahainen voi kävellä kumpaan tahansa suuntaan. Jos P ei ole lähtöpiste, niin muurahainen voi kävellä vain yhteen suuntaan, koska toinen suunta on tulosuunta.

Jos muurahainen kävelee esimerkiksi x -akselin suuntaisesti ja saapuu käyrän pisteeseen $Q(c, b)$, niin yllä olevan päättelyn mukaisesti $c \neq a$, ja luvut a ja c ovat kaksi yhtälön

$$x^2 + bx + b^2 - 6 = 0$$

reaalijuurta. Siten $a + c = -b$.



Kuva 10.

Vastaavasti, jos muurahainen kävelee y -akselin suuntaisesti ja saapuu pisteeseen $R(a, d)$ pisteestä P , niin $d + b = -a$ (Kuva 10).

Edellä olevasta seuraa, että kaikki muurahaisen kulkevat segmentit ovat sellaisia, että niiden päätepisteiden koordinaateista käyrällä kaksi neljästä ovat samoja. Näiden koordinaattien ja jäljelle jäävien summa on nolla: $a + b + c = 0$ ja $a + b + d = 0$.

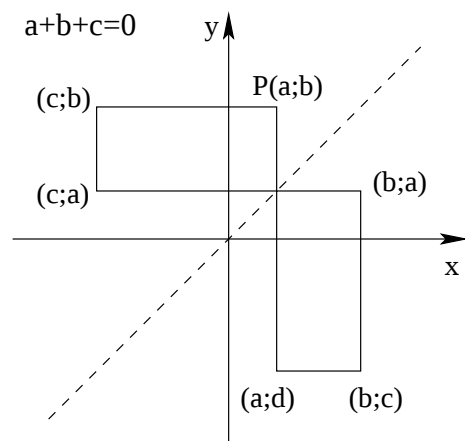
Jos muurahainen esimerkiksi aloittaa kävelyn pisteestä $P_0(a, b)$ x -akselin suuntaisesti, sen polku kulkee seuraavien käyrän pisteiden kautta: $P_0(a, b) \rightarrow P_1(-a - b, b) \rightarrow P_2(-a - b, a) \rightarrow P_3(b, a) \rightarrow P_4(b, -a - b) \rightarrow P_5(a, -a - b) \rightarrow P_6(a; b)$.

Jos muurahainen ei saavu mihinkään pisteistä X_i, Y_i , niin sen kävely päättyy kuudennen segmentin loppuun. Jos muurahainen saapuu joihinkin pisteisiin X_i, Y_i , niin sen kävely loppuu jo aiemmin.

Huomautuksia. 1. Helposti havaitaan, että muurahainen voi saapua pisteeseen X_i , jos se kävelee y -akselin suuntaisesti: pisteeseen X_1 pisteestä $B_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ja pisteeseen X_2 pisteestä $B_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Nämä ovat samoja pisteitä, joista muurahainen voi tavoittaa pisteet Y_1 ja Y_2 .

Yhteenvetona voidaan todeta, että jos lähtöpiste on muu kuin X_i, Y_i, B_i , niin muurahaisen kävely päättyy kuuden osuuden jälkeen, jos lähtöpiste on B_i , niin kävely päättyy yhden osuuden jälkeen, ja jos lähtöpiste on X_i tai Y_i , niin kävely päättyy kahden osuuden jälkeen.

2. Käytettäessä merkintää $c = -a - b$ muurahaisen polku kulkee (erikoistapauksia lukuunottamatta) pisteiden $(a, b), (c, b), (c, a), (b, a), (b, c), (a, c), (a, b)$ kautta. Pisteiden koordinaatit ovat kaikki a, b tai c ja $a + b + c = 0$ (Kuva 11). Polku, kuten myös kuvaaja, on symmetrinen suoran $y = x$ suhteen.



Kuva 11.

Edellä olevilla lukukolmikoilla on mielenkiintoinen suhde tehtävän 5 mahdolliseen ratkaisuun. Jos alkuperäinen polynomi on kolmannen asteen polynomi

$$f(x) = x^3 - 6x,$$

niin tämän tehtävän ellipsin yhtälö on

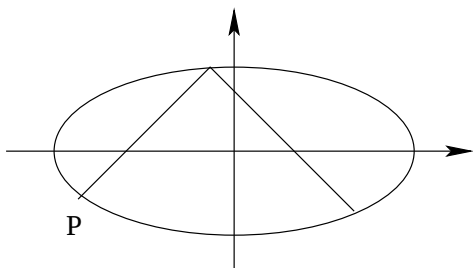
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0,$$

ja ellipsin pisteiden koordinaatit ovat lukupareja (a, b) , joille $f(a) = f(b)$.

Jokainen f :n arvo, paitsi paikallinen ääriarvo, saavutetaan kolmessa pisteessä ja muurahaisen kulkema polku vastaa tällaista kolmikkoo. Tällä esitystavalla ongelman ratkaisu on ilmeinen.

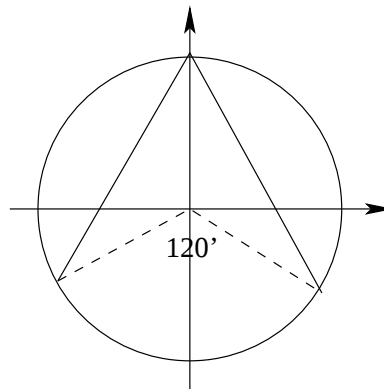
6. Ratkaisu 2. Kierretään käyrän kuvaajaa ja muurahaisen polkua -45° . Tällöin käyrän yhtälö on (Kuva 12)

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$



Kuva 12.

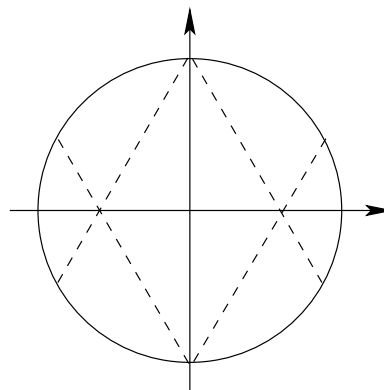
Kierretty muurahaisen kulkema polku koostuu osista, jotka ovat 45° kulmassa koordinaattiakseleihin nähden. Ellipsin eksentrisyys on $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Siten ortogonaalisen akselien yhtäläisyyden ja tekijällä $\sqrt{3}$ skaalaamisen jälkeen ellipsistä saadaan origokeskinen ympyrä, jossa muurahaisen polut muodostavat $+60^\circ$ ja -60° kulmat x -akseliin nähden (Kuva 13).



Kuva 13.

Muurahaisen paikka käyrällä kahden segmentin jälkeen lähtöpisteestä saadaan 120° kulmana lähtöpisteeseen nähden. Kulman suunta riippuu muurahaisen kävelysuunnasta. Koska suunta säilyy samana koko muurahaisen matkan ajan, muurahainen välttämättä palaa lähtöpisteeseen kuuden segmentin jälkeen ja kävely päättyy.

Näin käy kaikissa muissa lähtöpisteissä, paitsi kuudessa erikoispisteessä. Neljä näistä pisteistä on sellaisia, joissa tangentit muodostavat 60° kulman x -akselin kanssa. Jos muurahainen saapuu näihin pisteisiin, sen täytyy pysähtyä. Kaksi muuta pistettä ovat pystysuoran halkaisijan päätepisteet, joista muurahainen päättyy tangenttipisteisiin (Kuva 14).



Kuva 14.