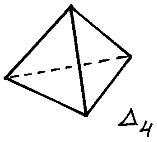
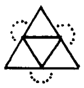
# Deltaedrit

***Virpi Kauko***
Tutkija
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Solmussa 3/2002 ilmestyneessä artikkelissa *Monitahokkaiden topologiaa* määriteltiin *deltaedri* monitahokkaaksi, jonka kaikki tahkot ovat tasasivuisia kolmioita. Tehtäväksi annettiin selvittää montako sellaista on olemassa. Lisäksi kysyttiin, montako *kuperaa* deltaedriä on.

Vastaus on, että deltaedrejä on äärettömän monta; kuperia deltaedrejä sen sijaan on vain kahdeksan.



Yksinkertaisin deltaedri on säännöllinen *tetraedri*, joka koostuu neljästä kolmiosta. Liittämällä kaksi tetraedriä tahkoistaan yhteen saadaan *kolmikulmainen kaksoispyramidi*, joka koostuu kuudesta kolmiosta. Tetraedrejä voidaan liittää tällä tavoin yhteen miten pitkäksi ketjuksi tahansa, joten deltaedrejä on äärettömän monta. Ketjut voivat myös haarautua tai muodostaa silmukoita...

Monitahokkaan kuperuus tarkoitti, ettei mikään kahta kärkeä yhdistävä jana jää kappaleen ulkopuolelle. Kuperan vastakohta on kovera. Kuperuuden asettaminen lisävaatimukseksi rajoittaa mahdollisten tahokkaiden määrää. Esimerkiksi kolmen tetraedrin muodostama deltaedri nimittäin onkin kovera. Tämä perustellaan kohta.

## 19 ehdokasta

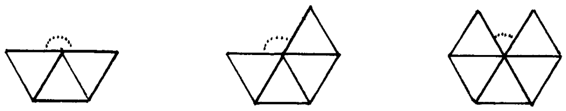
Deltaedrejä voi keksiä lisää käyttäen mielikuvitusta sekä tarvittaessa sen tukena esimerkiksi paperia ja liimaa, tai lankaa ja mehupillejä... Mutta jos halutaan osoittaa, ettei muita mahdollisuuksia ole kuin jo keksityt, on käytettävä teoreettisia apuneuvoja. *Monitahokkaiden topologiaa* -artikkelissa todistettiin kaksi käyttökelpoista tulosta:

- Eulerin monitahokaslause: $K - S + T = 2$
- Kulmavajelause: $\sum_{k=1}^{K} \text{vaje}(k) = 720^\circ$

(missä $K, S, T$ ovat monitahokkaan kärkien, särmien ja tahkojen lukumäärät ja vaje$(k)$ täyskulman ja kärjessä $k$ kohtaavien tahkojen kulmasumman erotus).

Deltaedrissä jokaisella tahkolla on tasan kolme särmää. Toisaalta missä tahansa monitahokkaassa kukin särmä on aina yhteinen kahdelle tahkolle. Siksi pätee $3T = 2S$, joka Eulerin lauseeseen sijoitettuna antaa $2K - T = 4$ eli $T = 2(K-2)$. Näin ollen kärkien lukumäärä määrää myös särmien ja tahkojen lukumäärän.

Tasasivuisen kolmion jokainen kulma on $60^\circ$, joten jos kärkipisteessä $k$ kohtaa $p$ kolmiota, niin sen kulmavaje on vaje$(k) = (360 - p \cdot 60)^\circ$. Koska deltaedrin piti olla kupera, on kulmavajeen oltava positiivinen (Mieti, miksi näin on!). Niinpä $p$ voi olla vain $3, 4$ tai $5$ ja kulmavaje siis vastaavasti $180^\circ, 120^\circ$ tai $60^\circ$.



Merkitään symbolilla $K_p$ deltaedrin niiden kärkien lukumäärää, joissa kohtaa $p$ kolmiota. Silloin kaikkien kärkien lukumäärä on $K = K_3 + K_4 + K_5$, ja kulmavajelauseen mukaan pätee

$$K_3 \cdot 180^\circ + K_4 \cdot 120^\circ + K_5 \cdot 60^\circ = 720^\circ, \text{ eli}$$
$$3K_3 + 2K_4 + K_5 = 12.$$

Nyt olemme johtaneet joukon yhtälöitä, jotka monitahokkaan kärkien, särmien ja tahkojen lukumäärien on toteutettava jotta kyseessä olisi kupera deltaedri:

(1) $3K_3 + 2K_4 + K_5 = 12$

(2) $K_3 + K_4 + K_5 = K$

(3) $S = 3(K - 2)$

(4) $T = 2(K - 2)$

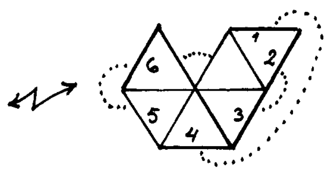
Koska $K_p$:t ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, yhtälöllä (1) on vain äärellinen määrä ratkaisuja. Luku $K_3$ voi olla korkeintaan 4, jolloin $K_4 = K_5 = 0$. Vastaavasti $K_4 \leq 6$ ja $K_5 \leq 12$. Ratkaisuja (eli kolmikkoja $K_3, K_4, K_5$) on yhteensä 19, joka on myös yläraja erilaisten kuperien deltaedrien lukumäärälle. Seuraava taulukko esittää kaikki yhdeksäntoista ehdokasta:

| $K_3$ | $K_4$ | $K_5$ | $K$ | $S$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 0 | 4 | 6 | 4 |
| 3 | 1 | 1 | 5 | 9 | 6 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 12 | 8 |
| 2 | 3 | 0 | 5 | 9 | 6 |
| 2 | 2 | 2 | 6 | 12 | 8 |
| 2 | 1 | 4 | 7 | 15 | 10 |
| 2 | 0 | 6 | 8 | 18 | 12 |
| 1 | 4 | 1 | 6 | 12 | 8 |
| 1 | 3 | 3 | 7 | 15 | 10 |
| 1 | 2 | 5 | 8 | 18 | 12 |
| 1 | 1 | 7 | 9 | 21 | 14 |
| 1 | 0 | 9 | 10 | 24 | 16 |
| 0 | 6 | 0 | 6 | 12 | 8 |
| 0 | 5 | 2 | 7 | 15 | 10 |
| 0 | 4 | 4 | 8 | 18 | 12 |
| 0 | 3 | 6 | 9 | 21 | 14 |
| 0 | 2 | 8 | 10 | 24 | 16 |
| 0 | 1 | 10 | 11 | 27 | 18 |
| 0 | 0 | 12 | 12 | 30 | 20 |

On kuitenkin huomattava, että yhtälöt (1)...(4), joiden mukaan taulukko on laadittu, ovat vain *välttämättömiä* ehtoja sille että tahokas on kupera deltaedri, eivät *riittäviä*. Kaikki kuperat deltaedrit siis esiintyvät taulukossa, mutta kaikki taulukon esittämät lukukolmikot eivät tuotakaan kuperaa deltaedriä.

## Ei monitahokas

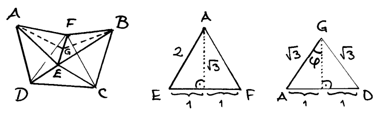
Tarkastellaan taulukossa toisena olevaa lukukolmikkoa $(3, 1, 1)$. Koska yhden kärjen ympärillä pitäisi olla viisi tahkoa ($K_5 = 1$), voi rakentamisen aloittaa viidellä kolmiolla. Kolmioita on toisaalta yhteensä vain kuusi, joten tahokas olisi rakennettava kuvan mukaisesta yhdistelmästä liittämällä numeroidut vapaat särmät pareittain yhteen. Tällöin särmä 2 on liitettävä 3:een, mikä pakottaa 1:n ja 4:n yhteen. Jäljelle jää 5 ja 6, mutta niiden yhteenliittäminen tuottaisi kärjen, jossa kohtaa vain kaksi kolmiota. Tämä on mahdotonta, joten tästä ei synny monitahokasta lainkaan.



## Deltaedri vaan ei kupera

Alussa mainittu kolmiopohjainen kaksoispyramidi $(2, 2, 2)$ löytyy taulukon viidenneltä riviltä. Merkitään kolmen tahkon kärkipisteitä $A, B$, neljän tahkon kärkiä $C, D$ ja viiden tahkon kärkiä $E, F$. Kappale on symmetrinen kärkien $A, B, C, D$ kautta kulkevan tason suhteen; samassa tasossa on myös janan $EF$ keskipiste $G$.

Jotta jana $AB$ ei joutuisi kappaleen ulkopuolelle, pitäisi kulman $\sphericalangle AGB$ olla kupera eli alle $180^\circ$ kappaleen puolella (siis pisteiden $C, D$ kautta mitattuna).

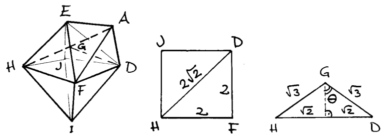


Yhden tetraedrin tahkojen välinen kulma $\sphericalangle AGD =: 2\varphi$ saadaan Pythagoraan lauseen ja trigonometrian avulla kolmioista $AFE$ ja $AGD$. Koska kolmiot ovat tasasivuisia, kaikki särmät $AF, AE$ jne. ovat yhtä pitkiä; olkoon pituus 2. Tällöin janan $AG$ pituus on $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Nyt kulman $\sphericalangle AGD$ puolikkaan sini ja kosini ovat

$$\sin\varphi = \sqrt{1/3}, \cos\varphi = \sqrt{2/3},$$

mistä saadaan likiarvoksi $2\varphi \approx 70.53^\circ$. Kaikilla kolmella tetraedrillä on yhteinen särmä $EF$, jossa särmäkulmien summa on $\sphericalangle AGB = 6\varphi \approx 211.6^\circ > 180^\circ$. Koska se siis on yli oikokulman, niin jana $AB$ jää kappaleen ulkopuolelle eli kappale on kovera.

## Kupera vaan ei deltaedri



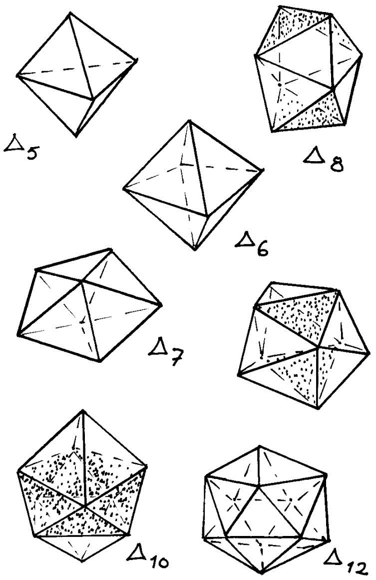

Taulukon keskivaiheilla oleva kolmikko $(1, 3, 3)$ tuottaa seitsenkärkisen monitahokkaan, joka saadaan yhdistämällä tetraedri $(4, 0, 0)$ ja *oktaedri* $(0, 6, 0)$. Kuperuuden testaamiseksi pitää taas laskea yhteisen särmän $EF$ ympäriltä särmäkulmien summa. Tetraedrille $AEFD$ se on äsken laskettu $\sphericalangle AGD = 2\varphi$, oktaedrille saadaan vastaavasti $\sphericalangle DGH = 2\theta$ ja

$$\sin\theta = \sqrt{2/3}, \cos\theta = \sqrt{1/3}.$$

Likiarvoksi tulee $2\theta \approx 109.47°$, joten summa $\sphericalangle AGH = 2(\varphi + \theta)$ on lähellä oikokulmaa. Käyttämällä sinin summakaavaa saadaan lasketuksi summakulman sinin tarkka arvo:

$$\sin(\varphi + \theta) = 1/\sqrt{3} \cdot 1/\sqrt{3} + \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{2/3} = 1.$$

Siispä $\varphi + \theta$ on *täsmälleen* suora kulma ja $\sphericalangle AGH$ oikokulma. Tämä merkitsee, että jana $AH$ on samassa tasossa kuin $EF$. Se siis ei joudu kappaleen ulkopuolelle (kuten eivät muutkaan kärkiä yhdistävät janat), joten kappale on kupera. Mutta koska kaksi vierekkäistä tahkoa ($AEF$ ja $EFH$) ovat samassa tasossa, ne ovatkin yksi ja sama tahko $AEHF$, ja se on nelikulmio eikä kolmio. Siksi tämä kappale ei ole deltaedri.




## Kuperat deltaedrit

Lukijalle jätetään tehtäväksi käydä läpi taulukon ehdokkaat ja tutkia, mitkä niistä eivät kelpaa ja miksi. Karsinnasta selviytyy kahdeksan kuperaa deltaedriä $\Delta_K$. Löydätkö ne taulukosta?

| | |
|---|---|
| $\Delta_4$ | Tetraedri |
| $\Delta_5$ | Kolmikulmainen kaksoispyramidi |
| $\Delta_6$ | Oktaedri (nelikulmainen kaksoispyramidi) |
| $\Delta_7$ | Viisikulmainen kaksoispyramidi |
| $\Delta_8$ | Vino kaksoiskiila l. siamilainen dodekaedri |
| $\Delta_9$ | Kolmesti pyramidikohotettu kolmioprisma |
| $\Delta_{10}$ | Kahdesti pyramidikohotettu nelikulmainen vinoprisma eli kiertovenytetty nelikulmainen kaksoispyramidi |
| $\Delta_{12}$ | Ikosaedri |

## Linkkejä

Lisää luettavaa englanniksi löytyy mm. alla olevalta hakuteoksen tapaan järjestetyltä internet-sivustolta (valitse D). Siellä mm. lasketaan deltaedrien kärkipisteiden koordinaatteja ja esitellään muutamia koveria deltaedrejä.

`http://hades.ph.tn.tudelft.nl/Internal/PHServices/Documentation/MathWorld/math/math.htm`