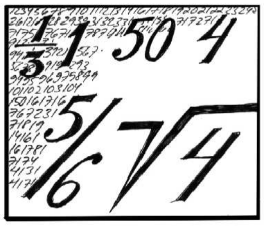

Muutamia ajatuksia matematiikan opetuksesta

Tibor Szalontai, tri, Nyíregyháza, Unkari
Marjatta Näätänen, dosentti, Helsingin yliopisto

Matematiikan opetuksesta

Matematiikan didaktiikka on monitieteinen, oma tieteenhaaransa, jolla on aivan omat erityispiirteensä verrattuna muihin ainedidaktiikkoihin. Se ei ole vain sovellettua pedagogiikkaa, vaikkakin se vasta luo omaa tieteellistä kieltään ja tutkimusmenetelmiään.

Matematiikan didaktiikka käyttää ja soveltaa yleisen pedagogiikan päätuloksia ja perusperiaatteita. Sillä on kuitenkin useita erityisiä piirteitä ja tuloksia, joita tuskin voidaan soveltaa yleiseen tai useiden muiden aineiden pedagogiikkaan. Matematiikan didaktiikassa on myös useita ongelmia, jotka eivät ole kovin kiinnostavia muiden aineiden kannalta; näitä ei voi ratkaista eikä näihin voi vastata yleisen pedagogiikan puitteissa. Esimerkiksi matematiikan äärettömyyskäsitteiden opetus, matemaattinen induktio, implikaation $A \Rightarrow B$ opettaminen kun A on epätosi, määritelmien pohjustaminen ja niiden ymmärtämisen rakentaminen, matemaattisen lahjakkuuden komponentit jne. Erityispiirteet seuraavat usein matematiikan erikoisesta luonteesta verrattuna muihin tieteisiin.

On useita hyviä matematiikan opettamisen lähestymistapoja, tyylisuuntia, käytäntöjä, luokkahuoneen järjestelyjä (oppilaiden ryhmittely, istumisjärjestelyt). Niillä on etuja tai haittoja ja niiden tehokkuus vaihtelee riippuen

- oppilaiden iästä ja kykytasosta
- erityisistä didaktisista tehtävistä, matemaattisista käsitteistä ja probleemoista, tarvittavista verbaaleista ja kirjallisista taidoista jne.

Euroopassa vallitsee nykyisin useita käsitteellisiä suuntauksia, esim. tutkiva, historiallista järjestystä seuraava, strukturaalis-formalistinen, ongelmanratkaisua painottava, sovellussuuntautunut, yksilöllistetty, tietokone-orientoitunut. Ne eivät sulje toisiaan pois eikä mikään niistä esiinny ainoana opettajan työssä. Puhukaamme siis vain suuntauksista tai niiden vallitsevuudesta.

Nykyisin matematiikan didaktiikan kirjallisuus ja erilaiset käsitteelliset suuntaukset keskittyvät oppilaan matemaattiseen ajatteluun ja ongelman ratkaisuun kullakin luokalla ja ikäryhmässä. Kansalliset ja kansainväliset vertailut ovat kuitenkin viime vuosikymmeninä osoittaneet monissa länsimaissa syrjäytyvien oppilaiden lisääntymistä ja laskevaa suuntaa keskimääräisessä matematiikan suoritustasossa, vaikkakin tietty vähemmistö yltää erinomaisiin suorituksiin.

Hyvien opetusmenetelmien opettaminen opettajille niin, että ne lopulta toteutetaan itse opetustyössä, on vaikea tehtävä. Hyvien ideoiden tietäminen ei sinänsä tuo automaattisesti hyviä tuloksia, vaan opettajan rooli ja käytettävissä oleva opetusmateriaali ovat menestyksen suhteen edelleen ratkaisevassa asemassa.

Opettajan on valittava eri vaihtoehdoista, kun hänen on opetettava erityinen teema, aihe, käsite, uusi työskentelytapa, taito, pohjustettava käsitettä, rakennettava systemaattisesti tietoa, kehitetettävä sovelluksiin sopivaa tietoa, kykyjä, rutiineja. Opettajan tulisi tuntea mahdollisimman monta erilaista opetusmetodia, suuntausta ja konkreettista menetelmää. Näin hän voi laajentaa omaa menetelmällistä kulttuuriaan, luovuuttaan ja kekseliäisyyttän. Parhaat ainekset eri opetusmetodeista tulisi integroida, jotta saadaan tehokkaita oppitunteja.

Käytännöllinen näkökulma

Unkarissa saadun kokemuksen mukaan eritasoisten oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittämisessä pätevät samat oppimismenetelmät. Kaikkien oppilaiden tulisi saada parhaiden menetelmien mukaista opetusta koulussa. Kaksi päinvastaiselta näyttävää suuntausta ovat

- oppilaiden eriyttäminen
- suurten ryhmien opettaminen samanaikaisesti (samassa luokassa)

Lisävaatimus, joka ehkä on myös ristiriitainen ensimmäisen kanssa, on yhteistyö- ja kommunikaatiokykyjen opettaminen. Ehdotamme kompromissia ja tasapainoista opetus- ja luokkahuoneratkaisua. Eriyttäminen voidaan ratkaista luokkahuoneessa, kotitehtävillä ja (säännöllisesti tai tilapäisesti pidettävillä) iltapäiväryhmillä lahjakkaille ja kertaustunneilla jälkeenjääneille.

Meistä yksinkertaiset apuvälineet ovat hyviä käsitteenmuodostuksen ensimmäisessä vaiheessa. Tämä on Piagét'n sisäistämisteorian mukaista. Ulkoinen toiminta muutetaan vähitellen sisäiseksi ajatteluksi käyttäen ensin välineitä, sitten kvasimanipulatiivista ajattelua (kuviteltu toiminta tai malli), lopuksi pelkästään ajattelua. Visualisoinnin voimakkuushierarkia kasvavassa järjestyksessä on: luento; selitys ja esimerkit, kuvat, kalvot, kuviot ja graafit; liikkuvilla visuaalisilla apuvälineillä demonstrointi, tietokoneanimaatio, videofilmi; todellisen elämän demonstrointi ja toiminta; apuvälineiden käyttö; lopuksi kaikkein tehokkaimpana oman kehon liike. Esimerkiksi kombinaatioiden opettelu on tehokkainta pienillä oppilailla, jos he (esim. 4 oppilasta) asettuvat eri järjestyksiin ja näitä tutkitaan.

Oppilaille tulisi järjestää mahdollisimman paljon omaa työtä (joskus pienissä, heterogeenisissa ryhmissä), mutta niin, että erilliset osatehtävät tai toiminnot annetaan kyllin pienissä erissä ja koko luokka tai tasoryhmä toimii saman aiheen ja ongelman parissa esim. muutaman minuutin ajan. Mikäli itsenäiseen työhön annetaan suuria tehtäväkokonaisuuksia, heikot oppilaat eivät ehkä pääse etenemään, nopeammat pitkästyvät ja alkavat tehdä jotain muuta, eikä luokkaa saada pysymään samassa tahdissa. Nopeimmille voidaan antaa ylimääräisiä tehtäviä, joissa on vähemmän laskemista, mutta jotka kehittävät ajattelua. Näihin he voivat palata aina, kun on aikaa. Itsenäinen työvaihe voidaan järjestää myös kahdessa – kolmessa tasoryhmässä, pääosin harjoitteluvaiheessa mutta myös uutta opittaessa.

Omaa työtä seuraa aina koko luokan (tai koko ryhmän) keskustelu, jokaisen tehtävän tai probleeman jälkeen. Oman työn rooli ja tarkoitus on kehittää ongelman ratkaisua (intuitiota ja luovuutta); kehittää kirjallisia taitoja ja kykyjä, varmistaa nopeutta. Yhteiskeskustelun rooli ja tarkoitus on: kehittää sanallisia kykyjä ja taitoja, rohkeutta, matemaattisten käsitteiden kehittäminen, väärinkäsitysten ja virheellisen ajattelun löytäminen ja korjaaminen, palaute ja oppimisprosessin ohjaaminen. Näin rakennetaan matematiikan rakennetta ja estetään vaara sirpaloituneesta tiedosta. Opettajan tulisi päästä selville kunkin oppilaan tuloksista, erilaisia ratkaisuideoita kerätään ja ajattelutapoja yritetään kehittää monipuolisemmiksi. Kyllin usein tapahtuva ohjattu keskustelu auttaa myös heikkoja tai hitaita oppilaita pääsemään muiden mukaan seuraavaa osatehtävää ratkaistaessa. Oppilaiden keskittyminen säilyy paremmin ja tunti käytetään tehokkaammin kuin jos käytetään pitkiä itsenäisiä työvaiheita. Mikäli halutaan pidempiä kokonaisuuksia, voidaan niitä antaa kotitehtäviksi. Virheet eivät ole väheksymisen tai pilkan aihe, oppilailla on oltava alkuvaiheessa vapaus erehtyä. Vaatimustaso kohoaa ajan myötä, mutta uutta käsitettä opittaessa ei ole ongelmallista, vaikka oppilaalla olisi virheellinen ratkaisuehdotus. Virheet käytetään kaikkien hyödyksi yhteiskeskustelussa.

Matematiikan opetus keksimällä tarkoittaa keksimisen johdattelua käyttämällä apuvälineitä, malleja, strukturoituja probleemasarjoja, jotka johdattavat oppilaat ennakoimaan määritelmiä tai määritelmiin, uusiin esikäsitteisiin tai käsitteisiin omin ponnistuksin, ratkaisuin ja yrityksin pienin askelin. Aiheiden rakenne voidaan parhaassa tapauksessa rakentaa vuosi vuodelta laajenevan spiraalin omaisesti. Useita aiheita ja esikäsitteitä esiintyy jo alkuvaiheessa ja tämä johtaa yhä tarkempaan matemaattiseen opetukseen myöhemmin, vähitellen. Toinen tärkeä näkökohta on optimaaliset matematiikan sisäiset ja muihin oppiaineisiin liittyvät yhteydet.

Opettajan rooli on hyvin tärkeä, hän laatii spiraalinomaisesti etenevät tehtävät (ellei ole hyvää oppikirjaa), järjestää tunnin rytmityksen, oman työskentelyn ja yhteiset keskustelut (oppilaiden palautteen ja arvioinnin, seurannan), antaa lyhyet selitykset, määritelmät, tarvittavan vahvistuksen. Oppilaille on joustavat (ei liian jäykät) etenemisvaatimukset, jos mahdollista, yksilölliset. Tämä halutaan tietenkin perustaa oppilaiden tiedonjanolle, kiinnostukselle, kilpailunhalulle. Matematiikan opettajien tulisi oppia tehokkaan oppitunnin pitämistaito. Tehokkaan oppitunnin aikana jokaisen oppilaan tulisi työskennellä matematiikan parissa tunnin aikana mahdollisimman paljon, tehokkaalla intensiteetillä ja saavuttaa oppimistavoite. Itsenäinen työ ei sovellu vain harjoitteluun, vaan taitavasti ohjattuna se voi olla hyvin hyödyllinen myös uutta tietoa pohjustettaessa. Uusia käsitteitä voidaan esitellä eri tavoilla, ei vain opettajan toimesta.

Tehokas oppitunti käsittää mielestämme lyhyehköjä tehtäviä omatoimisesti, opettaja kulkee luokassa ja seuraa kunkin oppilaan etenemistä, neuvoo tarvittaessa. Sitten hän lopettaa itsenäisen työn vaiheen. Keskustelu alkaa, ideat kerätään ja kysytään, kuka on samaa/eri mieltä. Miksi? Oppilaat selittävät ajattelutapansa (tässä vaiheessa opettaja ei vielä vahvista, kuka on oikeassa/väärässä). Opettaja lopettaa keskustelun. Hän toteaa, mikä etenemistapa oli hyvä/ei ollut hyvä. Selvitetään, miksi. Kun asiasta ollaan yhtä mieltä, opettaja kysyy, kuka osasi ratkaista tehtävän yksin. Oppilaat etsivät itse virheensä ja merkitsevät ne punaisella. Heidän tehtävänsä on virheen korjaamiseksi laatia itse virheetön ratkaisusuunnitelma. Opettaja antaa palautteen, kehuu hyviä suorituksia. On hyvä, että oppilaat kertovat ideansa, mutta vielä parempi on, jos he kertovat, miten he ajattelivat ja oppivat näin ongelmanratkaisustrategioita. Tehokas oppitunti tarkoittaa myös, että tarvittavat apuvälineet ovat kunkin oppilaan käsillä hyvässä järjestyksessä ja nopeasti saatavana. Tällöin ei oppitunnista mene aikaa niiden jakamiseen ja poiskorjaamiseen. Tällaisen järjestelyn edellytyksenä on, että oppilaat pystyvät keskittymään eivätkä hermostuneesti näprää apuvälineiden kanssa silloin, kun niitä ei käytetä.

Koko luokka yritetään pitää mahdollisimman kauan yhdessä (12 ikävuoteen asti selvitään melko hyvin eriyttämällä, sen jälkeen oppilaiden erot ovat kasvaneet suuriksi ja ongelman ratkaisu riippuu olosuhteista). Koko luokan yhdessä pitäminen on hyväksi heikoille oppilaille, sillä koko luokan keskustelu tukee heitä. Opettaja eriyttää antamalla useampia pieniä kysymyksiä lahjakkaille, jotka palauttavat tulokset paperilla tunnin lopussa. Oppilaille annetaan vaikka kolmea eri tasoa tehtäviä kotitehtäviksi, oppilas valitsee, minkä tason haluaa. Tunnilla eriyttäminen voidaan tehdä itsenäisen työvaiheen aikana esimerkiksi antamalla viisi vähitellen vaikeutuvaa osatehtävää ja kertomalla, ettei ole ongelmaa, vaikka oppilas saisi vain ensimmäiset kolme ratkaistua annetussa ajassa. Opettaja voi myös vain seurata, kuka ennätti tehdä mitenkin paljon. Kotityö on tärkeä osa matematiikan oppimista. Eri tasoisia kykymyksiä tarjotaan ja oppilas voi siis itse valita itselleen sopivan tason.

Länsimaissa on matematiikan opetuksessa tällä hetkellä voimakkaana suuntauksena ongelmanratkaisu. Tämän suuntauksen soveltamisessa on mielestämme suurena vaarana, etteivät ongelmat liity toisiinsa eikä näin siis rakenneta matematiikan struktuuria. Vaarana voi olla, että hypitään aiheesta toiseen – tosin kyvykkäille oppilaille tämä voi olla harjoitusta ajattelun joustavuudessa. Yksittäinen ongelma voi olla sinänsä mielenkiintoinen ja sopia hyvin vaikka kilpailutehtäväksi. Tällöin oppilaalla on kylliksi aikaa miettiä ongelmaa.

Matematiikkakerhot tai oppilaiden eriyttäminen ylimääräisten kotitehtävien avulla on toinen mahdollisuus käyttää yksittäisiä mielenkiintoisia ongelmia. Jos ongelman edellyttämä kokeilu, yleistäminen, raportin kirjoittaminen vaatii paljon, vie se tavallisesta oppitunnista liikaa aikaa, eivätkä monet oppilaat ennätä saada tehtävää loppuunsuoritetuksi. Jos oppilaiden edistymisen erot kasvavat liikaa, menettää opettaja tilanteen hallinnan. On siis parempi antaa useita pieniä tehtäviä tai ongelmia jotka ratkaistaan vuoron perään ja jotka johdattavat haluttuun päämäärään. Kuten Freudenthal sanoi, matematiikan opetuksessa on suositeltavaa käyttää opastettua (uudelleen) keksimistä. (Nämä asiathan on joku keksinyt jo aikaisemmin). Jos osatehtävät tehdään yksitellen itsenäisesti, niin sen jälkeen käsitellään asiaa yhdessä koko luokan voimin. Näin saadaan vauhti pysymään samana ja kaikkien keskittymistaso säilyy. Virheet saadaan esille alkuvaiheessa, eivätkä ne estä seuraaviin, hiukan vaativampiin vaiheisiin etenemistä.

Kaikenkaikkiaan ei mielestämme siis ole suositeltavaa antaa esim. neljää yhtälöä ratkaistavaksi samalla kertaa. Asteittain vaikeutuvat, toisiinsa liittyvät kysymykset ovat suositeltavia. Suosittelemme yhden oppitunnin aikana useiden toisiinsa liittyvien aiheiden käyttöä oppilaiden mielenkiinnon ylläpitämiseksi ja jotta käsitys matematiikan monipuolisuudesta vahvistuisi. Kun esimerkiksi käsitellään luonnollisten lukujen yhteenlaskua, voidaan tarkastella, miten monilla tavoilla vaikkapa neljä lukua voidaan laskea yhteen (kombinatoriikka). Yhtälöiden, epäyhtälöiden, vertailujen ja sanallisten tehtävien käsittely jokaisella oppitunnilla sekä päässälasku sopivat kaikille ikäryhmille. Jos puolet tai enemmistö oppilaista ei pystynyt ratkaisemaan tehtävää, huomaa opettaja sen kulkiessaan luokassa. Hän voi lopettaa itsenäisen työskentelyn ja siirtyä koko luokan keskusteluun.

Unkarilaisen Vargan idea oli integroida eri alueita (joukot ja logiikka, luvut ja operaatiot, geometria ja mittaaminen, relaatiot ja funktiot sekä jonot, kombinatoriikka, todennäköisyyslaskenta ja tilastotiede). 1970-luvulla Unkarissa tulikin muodiksi, että jokaisella oppitunnilla tulisi esittää jotain jokaisesta näistä ilman yhteyttä toisiinsa. Tulokset eivät olleet hyviä. Myöskään vastakohta ei ole hyvä. Keskitie on paras, jos mahdollista, tulisi tunnin pääteema sitoa muihin aiheisiin mielenkiinnon ylläpitämiseksi.