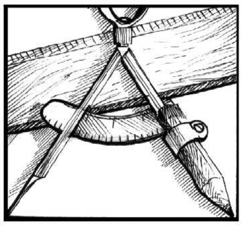
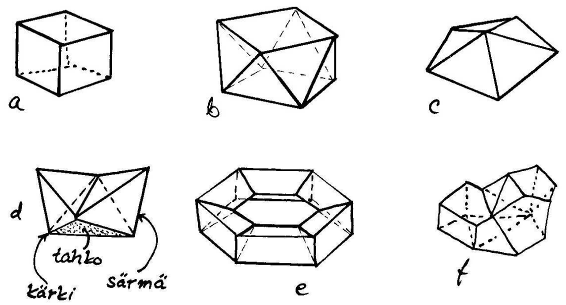


Monitahokkaiden topologiaa

Virpi Kauko
Assistentti
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto



Montako kuperaa deltaedriä on?

Monitahokas tarkoittaa tasomonikulmioiden rajaamaa kolmiulotteista joukkoa, tai myös tällaisista monikulmioista koostuvaa pintaa. (Tarvittaessa täsmennetään tarkoitetaanko kulloinkin umpinaista kappaletta vai sen onttoa kuorta.)

Monikulmio puolestaan on tasokuvio, jota reunustaa itseään leikkaamaton murtoviiva eli äärellinen määrä peräkkäin silmukaksi liitettyjä janoja (tai myös tällaisen tasoalueen reunaviiva).

Monitahokkaita voidaan luokitella erilaisten säännöllisyys- ym. ominaisuuksien perusteella, mutta on myös olemassa kaikille monitahokkaille yhteisiä ominaisuuksia.

Jokaisella tahokkaalla on tietty määrä *kärkiä* (K), kärkiä toisiinsa yhdistäviä *särmiä* (S) ja särmien reunustamia *tahkoja* eli monikulmioita (T). Vierekkäisten tahkojen tasot leikkaavat toisensa särmiä pitkin. Näiden kolmen suureen avulla määritellään monitahokkaan *Eulerin karakteristika* $K - S + T$, jota on tapana merkitä lyhyesti kreikkalaisella khi-kirjaimella χ. Esimerkiksi kuutiolla (kuva a) on $K = 8, S = 12, T = 6$ ja siten $\chi = 8 - 12 + 6 = 2$.

1. Tehtäviä. (a) Laske Eulerin karakteristika muille oheisen kuvan monitahokkaille ja keksi itse lisää esimerkkejä.

(b) Monikulmio tai monitahokas on *kupera* eli *konveksi,* jos sen kärkiä yhdistävät janat eivät joudu joukon ulkopuolelle. Mitkä oheisen kuvan monitahokkaista ovat kuperia?

(c) Monitahokasta sanotaan *deltaedri*ksi, jos sen kaikki tahkot ovat tasasivuisia kolmioita. Yksi sellainen on kuvassa d. Montako erilaista deltaedriä on olemassa? Entä montako kuperaa deltaedriä?

Tehtävän 1.c ehdot täyttäviä monitahokkaita voi etsiä ilman mitään lisätietoja, piirtämällä ja/tai leikkaamalla ja liimaamalla pahvikolmioita reunoistaan yhteen. Mutta mistä tiedetään, milloin kaikki ovat löytyneet?

Etsintää voi helpottaa huomaamalla muutaman yleisen säännönmukaisuuden.

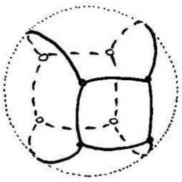
Tehtävän 1.a tehtyämme huomaamme, että $K - S + T = 2$ ainakin kaikille kuvan tahokkaille, paitsi mutterimaiselle kappaleelle (kuva e). Mahtaako tämä tulos päteä yleisemminkin? Miksi mutteri poikkeaa muista – voimmekohan todistaa teoreeman, jonka mukaan $\chi = 2$ kaikille "epämutterimaisille" monitahokkaille? Tai toisaalta, mitä yhteistä on niillä tahokkailla, joille mainittu kaava pätee?

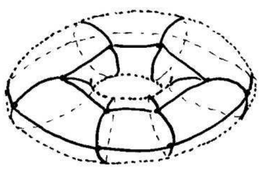
Eulerin monitahokaslause

2. Lause. Jokaiselle kuperalle monitahokkaalle pätee $\chi = K - S + T = 2$.

Tämä on klassinen Eulerin monitahokaslause. Itse asiassa kuperuus ei ole tässä *välttämätön ehto*, sillä väite pätee myös esimerkiksi kuvissa d ja f oleville "lommoisille" tahokkaille. Etsimmekin toisentyyppisen luonnehdinnan, jonka avulla tulos on myös helpompi todistaa.

Tavoittelemamme monitahokkaat ovat tietyllä tavalla "pallomaisia". Määrittelemme tämän ominaisuuden tarkemmin kohta, mutta ensin selitämme idean: jos monitahokas ajatellaan valmistetun jäykän pahvin sijasta jostakin venyvästä ja taipuisasta materiaalista, sen voi pullistaa pyöreäksi. Mutteri pullistuu tällöin uimarenkaan muotoiseksi pinnaksi, *torukseksi*, kun taas kuvan muut tahokkaat muuttuvat *palloksi*. Pallo on kupera, torus ei. Palloa ei voi muuttaa torukseksi (eikä torusta palloksi) leikkaamatta siihen ensin reikiä.



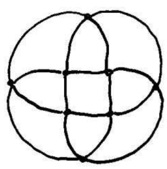


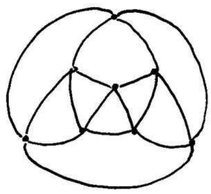
Jos kärjet ja särmät on merkitty tahokkaan muusta pinnasta poikkeavalla värillä, ne jäävät näkyviin pullistettuun pintaan *verkoksi*. Niiden lukumäärä ei selvästikään moisessa pullistelussa muutu, joten myöskään Eulerin karakteristika ei riipu siitä onko kyseessä teräväsärmäinen monitahokas vai sileällä pinnalla oleva verkko – tai siitäkään onko tahokas kupera vai lommoinen. Sillä sen sijaan on väliä, onko verkko pallon vai toruksen pinnalla, kuten mutteriesimerkki osoittaa.

Palloverkko

Laajemmassa mielessä *verkko* eli *graafi* on mikä tahansa kuvio, joka koostuu kärki- eli solmupisteistä ja niitä yhdistävistä, toisiaan leikkaamattomista särmistä. *Palloverkoksi* nimitetään tässä sellaista äärellistä ja yhtenäistä verkkoa, jonka kärjet ja särmät ovat pallopinnalla ja siis jakavat pallon "tilkkuihin" eli tahkoihin. *Äärellisyys* tarkoittaa, että kärkiä, särmiä ja tahkoja on vain äärellisen monta kappaletta. *Yhtenäisyys* taas tarkoittaa, että verkon jokaisesta kärjestä pääsee särmiä myöten mihin tahansa muuhun kärkeen.

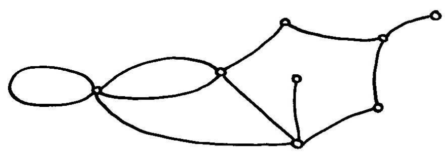
Puhkaisemalla palloverkon yhteen tahkoon reiän ja venyttämällä sitä verkon voi "litistää" tasoon ilman että verkon kärkien ja niissä kohtaavien särmien ja tahkojen määrät muuttuvat.





3. Tehtäviä. (a) Yllä on eräs monitahokas – neliöpohjainen vinoprisma – levitetty auki tasograafiksi kahdella eri tavalla. Piirrä tai rakenna siitä kolmiulotteinen malli.

(b) Rakenna erilaisia palloverkkoja solmimalla lankaa paperimassa- tms. askartelupallon ympärille.



Jokaista kuperaa monitahokasta siis vastaa jokin palloverkko, mutta on myös sellaisia palloverkkoja joita ei vastaa mikään monitahokas. Palloverkossa nimittäin voi olla "halkioita", "irtopäitä" ja "yksi- ja kaksikulmioita", toisin kuin monitahokkaassa. Nyt osaamme muotoilla väitteen, jonka haluamme todistaa:

4. Lause. Palloverkolle pätee $\chi = 2$.

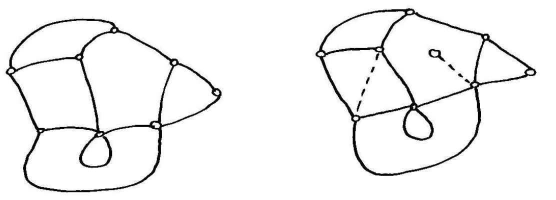
Todistus. Teemme eräänlaisen induktiopäättelyn: todistamme väitteen ensin mahdollisimman yksinkertaiselle palloverkolle, ja sitten osoitamme ettei $K - S + T$ muutu vaikka kärkiä tai särmiä lisättäisiin.

Otetaan ensin pallolta vain yksi kärkipiste, jolloin loppuosa on yhtä tahkoa. Tässä yksinkertaisimmassa palloverkossa on $\chi = 1 - 0 + 1 = 2$; väite siis pätee ainakin tässä erikoistapauksessa.

Oletetaan sitten, että pallo on verkotettu millä tahansa tavalla, kunhan vain $\chi = K - S + T = 2$. (Näin voidaan olettaa, koska olemme jo löytäneet ainakin yhden palloverkon, joka tämän toteuttaa.)

Muodostetaan nyt uusi verkko lisäämällä uusi särmä jo ennestään olevien kärkien välille, jolloin yksi tahko tulee jaetuksi kahtia. Näin kärkien määrä ei muutu, mutta särmät ja tahkot lisääntyvät molemmat yhdellä, joten uuden verkon Eulerin karakteristika on

$$\begin{aligned}\chi' &= K' - S' + T' = K - (S+1) + (T+1) \\ &= K - S + T - 1 + 1 = \chi = 2.\end{aligned}$$



Uusi verkko voidaan muodostaa myös siten, että lisätään kärkipiste ja yhdistetään se uudella särmällä johonkin ennestään olleeseen kärkipisteeseen. Tällöin kärjet ja särmät lisääntyvät kumpikin yhdellä ja tahkojen määrä pysyy ennallaan, joten χ ei nytkään muutu.

Uusia palloverkkoja voidaan rakentaa lisää äärettömän monta toistamalla näitä kahta operaatiota. Toisaalta mikä tahansa palloverkko saadaan aikaan tällä tavoin: annetun palloverkon voi purkaa poistamalla siitä yksi kerrallaan särmiä ja yhden särmän varaan jääneitä kärkipisteitä, siten että verkko pysyy joka vaiheessa yhtenäisenä (lukija keksiköön säännön, jolla moinen onnistuu!). Kun tämä prosessi sitten tehdään takaperin, alkuperäinen verkko tulee rakennetuksi mainittuja operaatioita käyttäen.

Koska kyseiset operaatiot siis eivät muuta Eulerin karakteristikaa, se on vakio kaikille palloverkoille. Ja koska $\chi = 2$ yhdelle palloverkolle (sille jossa on vain yksi kärki ja yksi tahko), tämä vakio on 2. □

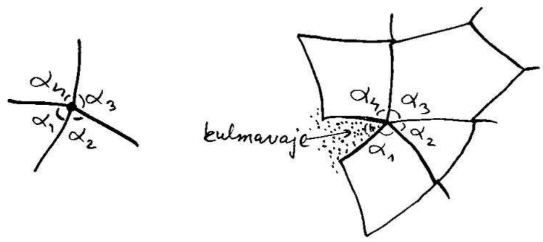
Tämä tulos pätee siis kaikille palloverkoille – erityisesti sellaisille jotka vastaavat jotakin monitahokasta. Niinpä tulimme samalla todistaneeksi Eulerin monitahokaslauseen 2.

Kulmavaje

Monitahokkaan jokaisessa kärkipisteessä k kohtaa jokin määrä $s(k)$ särmiä ja saman verran tahkoja. Kaksi vierekkäistä särmää ovat jonkin tasomonikulmion sivuja, ja niiden välinen kulma α voidaan mitata tai laskea. Kun lasketaan nämä kaikkien kulmien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s(k)}$ asteluvut yhteen, saadaan luku, joka kertoo jotakin kyseisen kärkipisteen luonteesta. Mikäli kulmien summa sattuu olemaan tasan 360°, monikulmiot voi latoa samaan tasoon pisteen ympärille. Kulmasumman poikkeama täydestä kulmasta määritellään kärkipisteen k *kulmavajeeksi*:

$$\mathrm{vaje}(k) := 360^\circ - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s(k)}).$$

Positiivinen kulmavaje siis kertoo, miten laaja kiila jää puuttumaan täydestä ympyrästä, jos yksi särmä leikataan auki ja kärjessä kohtaavat monikulmiot levitetään samaan tasoon.



5. Tehtäviä. (a) Leikkaa paperista monikulmioita. Liittele niitä yhteen ja mieti, voiko jonkin kärkipisteen kulmavaje olla negatiivinen? Miltä sellainen kärkipiste näyttäisi? Miten kulmavajeen ja kuperuuden käsitteet liittyvät toisiinsa?

(b) Rakenna paperimonikulmioista (mielellään säännöllisistä, jottei mene turhan vaikeaksi) mieleisesi monitahokas. Laske kunkin kärkipisteen kulmavaje ja kaikkien kärkien kulmavajeiden summa. Tee sama tarkastelu ainakin kahdelle erilaiselle tahokkaalle.

Monitahokkaan kaikkien kärkien (joita on K kappaletta) kulmavajeiden summaa $\sum_{k=1}^{K} \mathrm{vaje}(k) = \Delta$ merkitään kreikkalaisella isolla delta-kirjaimella. Itse asiassa pätee yleisestikin:

6. Lause. Kuperan monitahokkaan kärkien kulmavajeiden summa on $\Delta = 720^\circ$.

Todistus. (a) Oletetaan aluksi jokainen tahko kolmioksi. Silloin monitahokkaassa on kolme särmää jokaista tahkoa kohti; toisaalta jokainen särmä on kahdelle tahkolle yhteinen, joten $3T = 2S$. Sijoittamalla tämä yhtälö Eulerin monitahokaslauseeseen 2 saadaan $2K - T = 4$. Kaikkien kärkien kulmavajeiden summa on

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{k=1}^{K}\bigl(360^\circ - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s(k)})\bigr) \\ &= 360^\circ \cdot K - (\text{kaikkien tahkojen} \\ &\quad\ \text{kulmien summa}).\end{aligned}$$

Koska kolmion kulmien summa on 180° (tätä tulosta ei todisteta nyt, mutta asiaan ehkä palataan Solmussa joskus myöhemmin) ja koska tahkoja on T kappaletta, summaksi tulee

$$\begin{aligned} 360° \cdot K - 180° \cdot T &= 180° \cdot (2K - T) \\ &= 180° \cdot 4 = 720°. \end{aligned}$$

(b) Jos monitahokkaan tahkoina on muitakin monikulmioita kuin kolmioita, tahkot voidaan jakaa lävistäjillä kolmioiksi. Nyt tälle pelkistä kolmioista koostuvalle "monitahokkaalle" pätee (a)-kohdan päättely siitä huolimatta, että vierekkäiset "tahkot" saattavat olla samassa tasossa. "Särmien" lisääminen ei muuta kulmien suuruuksia, joten myös tässä tapauksessa kulmavajesumma on 720°. □

Huomaa, että emme todistuksessa oikeastaan käyttäneet oletusta monitahokkaan kuperuudesta. Käytimme vain sitä tietoa, että sille pätee Eulerin monitahokaslause – ja kuten totesimme, tämä pätee aina kun tahokas voidaan pullistaa palloverkoksi. Kuperuus ei siis tällekään lauseelle ole välttämätön ehto (siis väite on totta kuperille tahokkaille, mutta myös joillekin muille).

Tämä tulos on itse asiassa aika hämmästyttävä. Onhan *kulmien mittaaminen* luonteeltaan erilaista kuin kärkien, särmien ja tahkojen *lukumäärien laskeminen*: tahokasta ei voi noin vain korvata pyöreällä pallolla kuten teimme monitahokaslauseen todistuksessa, koska venyttely ja pullistelu tietenkin muuttaa kulmia. Mutta silti myös kulmavajelause pätee riippumatta tahokkaan tarkemmasta muodosta, kunhan siinä ei ole "reikää" kuten toruksessa ja mutterissa.

Kuperien deltaedrien etsinnässä (1.c) voi nyt käyttää apuna juuri todistettuja lauseita 4 ja 6. Laske ensin sellaisen kärjen kulmavaje, jossa kohtaa p tasasivuista kolmiota, ja mieti miten suuri kokonaisluku p voi olla. Em. lauseet antavat välttämättömän ehdon etsitynlaisten tahokkaiden kärkien lukumäärille, joten "yrityksen ja erehdyksen menetelmää" ei tarvitse jatkaa loputtomiin. (Tehtävään annetaan ratkaisu seuraavassa Solmussa.)

Onko topologia geometriaa?

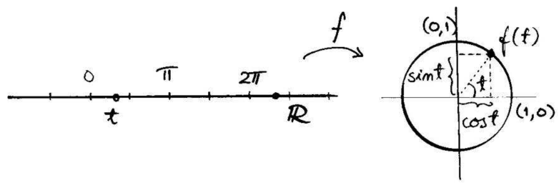
Monikulmioita ja -tahokkaita tarkastellaan usein geometrisina olioina. *Geometria* on matematiikan ala, jossa "mitataan" tai oikeastaan lasketaan etäisyyksiä ja kulmien suuruuksia; itse sanakin on johdettu kreikan maanmittausta tarkoittavasta sanasta. Tuttu esimerkki geometrisesta tuloksesta on Pythagoraan lause, joka koskee suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia.

Edellä kuitenkin tarkastelimme monitahokkaita hiukan eri kannalta: Eulerin lauseessa ei puhuta mitään pituuksista eikä kulmista. Eulerin karakteristika on monitahokkaan geometrisesta muodosta riippumaton vakio.

Joukon muotoa voivat muuttaa niissä määritellyt *kuvaukset* eli *funktiot*. Esimerkiksi kuvaus

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \ f(t) = (\cos t, \sin t)$$

käärii reaaliakselin tasoon ympyräksi. Totea tämä itse antamalla muuttujalle $t \in \mathbb{R}$ arvoja ja piirtämällä kuvapisteet tasoon.

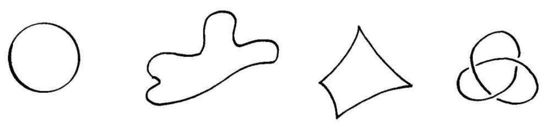


Jokaista reaalilukua t vastaa siten yksi (ympyrän kehällä oleva) tason piste (x, y), mutta jokaista ympyrän pistettä vastaa äärettömän monta reaalilukua: esimerkiksi pistettä $(0, 1)$ vastaavat luvut $\ldots, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$ (radiaania). Toisaalta muita tason pisteitä kuin ympyrällä olevia ei kuvauksessa f vastaa mikään reaaliluku.

Kuvauksia voidaan luokitella erinäisten ominaisuuksien perusteella. Kaksi joukkoa A ja B ovat *topologisesti ekvivalentit*, mikäli niiden välillä on *topologinen kuvaus* eli *homeomorfismi*. Havainnollisesti tämä tarkoittaa, että

- jokaista joukon A pistettä vastaa *tasan yksi* B:n piste ja päinvastoin;
- *lähekkäin* olevia A:n pisteitä vastaa *lähekkäiset* B:n pisteet ja päinvastoin.

Äskeisen esimerkin f ei siis ollut topologinen kuvaus. Ympyrän ja suoran välillä ei ole olemassakaan topologista kuvausta. Ympyrän kanssa topologisesti ekvivalentteja käyriä sanotaan *silmukoiksi*. Kuvan käyrät ovat silmukoita, mutta suoran lisäksi esimerkiksi jana, kirjain R ja numero 8 eivät ole. Topologinen kuvaus voi venyttää, kutistaa ja taivuttaa joukkoa, tai jopa vetää sen umpisolmuun, mutta ei katkaista, rei'ittää eikä venyttää äärettömiin.

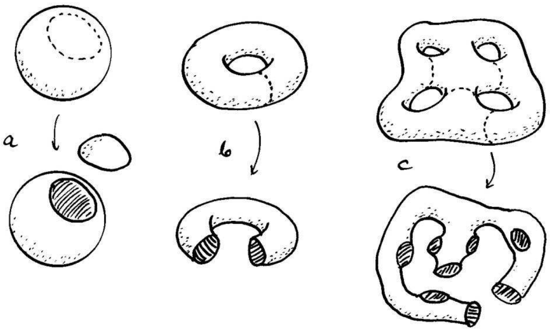


Ominaisuuksia ja vakioita, jotka säilyvät topologisessa kuvauksessa, sanotaan *topologisiksi*. Esimerkiksi Eulerin karakteristika on topologinen vakio, ja yhtenäisyys on topologinen ominaisuus.

Toisin kuin Eulerin lauseessa, kulmavajelauseessa puhutaan kulmien asteluvuista – siis geometriasta! – mutta lauseen sisältö on että näistä laskettu tietty lauseke on topologinen vakio. Topologia ja geometria kietoutuvatkin monin tavoin yhteen, mutta ne eivät ole sama asia.

Pinta ja sen genus

Ominaisuus, joka erottaa ratkaisevasti pallomaiset pinnat torusmaisista, on myös luonteeltaan topologinen. Huomaamme, että toruksen voi leikata auki sopivasti valittua silmukkaa myöten (sylinteriputkeksi) niin että se pysyy yhtenä kappaleena. Pallolle tämä ei onnistu: leikkasipa sitä millaista silmukkaa pitkin tahansa, siitä aina irtoaa pala. Toisaalta torustakaan ei voi leikata enää toista silmukkaa pitkin: joko putken kylkeen tulee reikä tai putken päästä irtoaa rengas. Kuvassa oikealla olevan pinnan voi avata peräti neljää erillistä silmukkaa pitkin halkaisematta sitä kahtia.



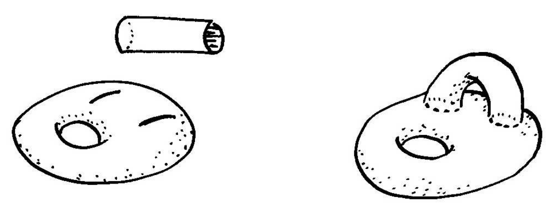
Pinta tarkoittaa tässä yhtenäistä, kaksiulotteista, suljettua ja reunatonta joukkoa. *Yhtenäisyys* merkitsee, että mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää toisiinsa jollakin pintaa pitkin kulkevalla käyrällä; *2-ulotteisuus* taas sitä, että pinnasta leikattu pieni pala ”näyttää samalta” kuin tasosta leikattu pala (tarkemmin sanoen pinta on paikallisesti topologisesti ekvivalentti tason kanssa). Erityisesti monitahokkaat ovat sellaisia. Nyt voimme määritellä tärkeän topologisen käsitteen:

Pinnan *genus* on kokonaisluku g, joka kertoo montako erillistä silmukkaa myöten pinnan voi leikata auki niin että se pysyy yhtenäisenä.

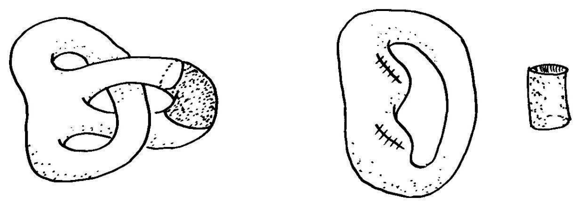
Siispä pallon, kuution, pyramidin jne. genus on $g = 0$; toruksen, uimarenkaan, mutterinpinnan jne. genus on puolestaan $g = 1$. Genus on toisin ilmaistuna ”pujotusreikien” tai ”kahvojen” lukumäärä.

7. Lause. (a) Pinnan genus kasvaa yhdellä, jos siihen tehdään kaksi viiltoa ja liitetään näihin sylinteriputki päistään kahvaksi.

(b) Jos pinnan genus on vähintään yksi, niin siitä voidaan poistaa kahva leikkaamalla kahta silmukkaa myöten ja sulkemalla syntyneet reiät. Tällöin pinnan genus vähenee yhdellä.



Todistus. (a) Olkoon P pinta ja $g \geq 0$ sen genus. Viiltämällä P kahdesta kohtaa auki ja liittämällä reikiin putki päistään kahvaksi syntyy uusi pinta P'. Nyt kahvan voi taas irrottaa toisesta päästään leikkaamalla silmukkaa myöten. Näin ollen sellaisia silmukoita, joita pitkin pinnan voi leikata auki irrottamatta siitä palaa, löytyy P':lta yksi enemmän kuin P:ltä; P':n genus on siis $g + 1$.



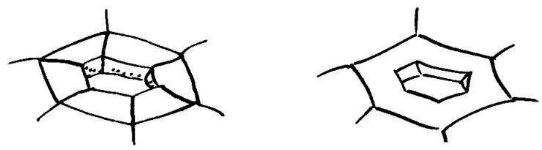
(b) Olkoon P pinta ja $g \geq 1$ sen genus, jolloin sillä määritelmän mukaan on g eri silmukkaa $s_1, s_2, \ldots s_g$, joita myöten sen voi leikata auki irrottamatta paloja. Leikataan P auki yhtä tällaista silmukkaa s_g pitkin, jolloin pinta siis jää yhtenäiseksi ja siihen tulee kaksi silmukanmuotoista reikää.

Sitten leikataan pinta auki syntyneen reiän reunan läheltä kulkevaa silmukkaa pitkin. Tällöin irtoaa sylinteriputken muotoinen pala, joten kyseinen silmukka ei voinut olla mikään edellämainituista $(g-1)$:stä silmukasta. Ommellaan sitten pintaan jääneet kaksi reikää umpeen, jolloin syntyy uusi pinta P''. Nyt pinnalla P'' on edelleen $g-1$ erillistä silmukkaa, joita pitkin auki leikattuna se pysyisi yhtenäisenä: $s_1, s_2, \ldots s_{g-1}$. Niinpä P'':n genus on $g - 1$, ja operaatiosta jäi yli yksi sylinterinmuotoinen kahva. □

Mutterille ja muille positiivisen genuksen omaaville monitahokkaille pätee Eulerin monitahokaslausetta (4) ja kulmavajelausetta (6) vastaavat tulokset; niissä vain esiintyy eri vakiot. Todistaaksemme nämä tulokset käytämme jälleen apuna verkkoja.

Pintaverkko

Mikä tahansa pinta voidaan "verkottaa" samaan tapaan kuin pallo. Mielivaltaisesti valitut kärjet ja särmät jakavat pinnan alueisiin, mutta tässä tarvitsemme lisäehdon. Jokaisen alueen reuna saa koostua vain yhdestä (murtoviiva)silmukasta – toisin sanoen vaadimme, että alue on monikulmion kanssa topologisesti ekvivalentti. (Tämä ehto sulkee pois rengasmaiset tai reiälliset alueet.)



Esimerkiksi toruksen voi verkottaa siten, että saadaan edellä esiintyneen mutterin "pyöristetty" vastine – mutta jos tästä verkosta poistetaan tietyt kuusi viivaa, saadaan toinen verkko, jonka yksi alue on renkaan muotoinen.

Nimitämme *pintaverkoksi* äärellistä ja yhtenäistä verkkoa, joka jakaa jonkin pinnan *topologisiin monikulmioihin*. Edellisen kuvan vasemmanpuoleinen verkko on pintaverkko, oikeanpuoleinen ei. (Aiemmin määritelty palloverkko on siis pintaverkon erikoistapaus.)

8. Tehtäviä. (a) Piirrä tai rakenna monitahokas, jonka genus on vähintään yksi ja jossa on ainakin yksi rengasmainen "tahko". Laske sen Eulerin karakteristika. Lisää sitten kärkiä tai särmiä siten, että rengasalue jakautuu tavallisiksi monikulmioiksi, ja laske tämän uuden tahokkaan karakteristika.

(b) Vertaa ylläolevaa pintaverkon määritelmää palloverkon määritelmään. Palloverkon määritelmä ei kieltänyt rengasalueita – siinä vaadittiin vain että verkon pitää olla yhtenäinen. Voiko palloverkossa olla rengasalueita? Mieti miksi rengasalueet pitää kieltää erikseen suurempigenuksisilta pintaverkoilta.

(c) Voiko 1-genuksista monitahokasta (tai pintaverkkoa) esittää tasograafina (vrt. tehtävä 3.a)?

Yleistetty Eulerin lause ja kulmavajelause

Nyt yleistämme äsken nollagenuksisille monitahokkaille todistamamme kaksi lausetta isompigenuksisillekin tahokkaille.

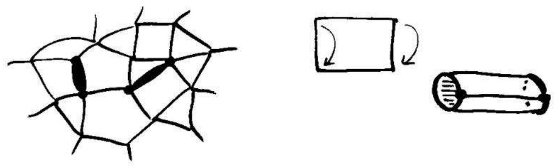
9. Lause. Jos pinnan genus on g, niin sen jokaisen pintaverkon Eulerin karakteristika on $\chi = 2 - 2g$.

Todistus. Käytämme jälleen induktiotyyppistä päättelyä. Pallon tapauksessa $g = 0$ ja $\chi = 2 = 2 - 2 \cdot 0$, jo todistetun tavallisen Eulerin lauseen nojalla. Oletetaan sitten väitteen pätevän *jollakin* luonnollisella luvulla g, eli että (minkä tahansa) g-genuksisen pintaverkon V karakteristika on $\chi = 2 - 2g$.

Eulerin lauseen perusteella χ ei riipu pinnan eikä verkon geometriasta. On osoitettava, että tällöin minkä tahansa $(g+1)$-genuksisen pintaverkon karakteristika on $\chi' = 2 - 2(g+1)$. Koska

$$2 - 2(g+1) = 2 - 2g - 2 = -2g = \chi - 2,$$

on toisin sanoen todistettava, että pinnan genuksen kasvaessa yhdellä sillä olevan pintaverkon Eulerin karakteristika vähenee kahdella. Lauseen 7 nojalla minkä tahansa $(g+1)$-genuksisen pinnan voi koota g-genuksisesta pinnasta ja sylinteriputkesta.



Leikataan pintaverkko V auki kahta erillistä särmää myöten. Kahvaksi liitettävän putken voi tehdä vaikkapa yhdestä topologisesta neliöstä, jonka vastakkaiset sivut yhdistetään uudeksi särmäksi. Operaation jälkeen meillä on uusi pintaverkko V', jonka genus on $g+1$ ja jossa on kärkiä saman verran kuin V:ssä, särmiä kolme enemmän ja tahkoja yksi enemmän. Siten verkon V' Eulerin karakteristika on

$$\begin{aligned} \chi' &= K - (S+3) + (T+1) \\ &= K - S + T - 3 + 1 = \chi - 2, \end{aligned}$$

kuten väitettiin. Vielä todetaan tavallisen Eulerin lauseen perusteella, ettei V':n karakteristika riipu valitusta pintaverkosta eikä siten myöskään tavasta jolla kahvan lisäys tehtiin, joten todistuskin pätee näistä valinnoista riippumatta. □

Jokaista monitahokasta vastaa sen kanssa topologisesti ekvivalentti pintaverkko, joten lauseesta 9 seuraa *yleistetty Eulerin monitahokaslause*:

10. Lause. Jos monitahokkaan genus on g, niin sen Eulerin karakteristika on $\chi = 2 - 2g$.

Todistamme vielä yleistetyn kulmavajelauseen:

11. Lause. Jos monitahokkaan Eulerin karakteristika on χ, niin sen kaikkien kärkien kulmavajeiden summa on $\Delta = 360° \cdot \chi$.

Todistus. Lauseen 6 todistus yleistyy melko suoraan; ainoa ero on, että (a)-kohdassa yhtälöä $3T = 2S$ ei sijoiteta Eulerin monitahokaslauseeseen $K - S + T = 2$, vaan Eulerin karakteristikan määritelmään $K - S + T = \chi$.

Tällöin saadaan $2K - 2S + 2T = 2K - T = 2\chi$ ja kaikkien kulmavajeiden summaksi

$$\begin{aligned}\Delta &= 360° \cdot K - (\text{kaikkien tahkojen kulmien} \\ &\quad \text{summa}) = 360° \cdot K - 180° \cdot T \\ &= 180° \cdot (2K - T) = 180° \cdot 2\chi \\ &= 360° \cdot \chi.\end{aligned}$$

(b)-kohdan päättely toimii sellaisenaan. □

Nämä tulokset osoittavat, että Eulerin karakteristika χ ja kulmavajeiden summa Δ kertovat (verkotetusta) pinnasta tasan saman asian kuin genus g. Jos siis yksi näistä luvuista tiedetään, voidaan laskea myös muut. Kaikki (yhtenäiset, kaksiulotteiset, suljetut ja reunattomat) pinnat voidaan luokitella tämän ominaisuuden perusteella topologisiin luokkiin.

12. Tehtävä. Piirrä tai rakenna erigenuksisia monitahokkaita ja laske niiden χ ja Δ.

Huomautuksia

Tämän artikkelin tarkoitus oli esitellä havainnollisten esimerkkien avulla millaisia asioita tutkii topologiaksi kutsuttu matematiikan ala ja todistaa muutama topologinen lause. Muodollisia määritelmiä esitettiin mahdollisimman vähän, mutta kiinnostunut lukija löytää niitä helposti lisää oppikirjoista.

Topologisen kuvauksen eli homeomorfismin oikea määritelmä on *'jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvauskin on jatkuva'.* Sana *topologia* on peräisin kreikasta (kuten moni muukin matematiikan termi). Se on matematiikan ala, jossa *avoimet joukot* ja *jatkuvat kuvaukset* ovat keskeisiä käsitteitä.

Oletimme (erikseen mainitsematta) kaikki pinnat *suunnistuviksi*, eli että niillä on sekä sisä- että ulkopuoli. On olemassa myös suunnistumattomia pintoja kuten Kleinin pullo, joita tämä tarkastelu siis ei koske. Nollagenuksisen monitahokkaan ja pallo(verko)n topologista ekvivalenssia perustelimme edellä vain intuitioon vedoten: monitahokkaan voi "pullistaa" palloksi. Tämä voitaisiin todistaa täsmällisesti määrittelemällä kuvaus, joka kuvaa monitahokkaan särmineen palloksi, ja osoittamalla kyseinen kuvaus homeomorfismiksi. Muutkin nyt perustelematta esitetyt väitteet (kuten 'yhtenäisyys on topologinen ominaisuus' ja 'ympyrän ja suoran välillä ei ole homeomorfismia') ovat helposti todistettavissa lyhyehkön topologian perusteisiin tutustumisen jälkeen.

∗Lisätehtävä. Sen sijaan että verkotetaan valmiita pintoja, kuten edellä tehtiin, voitaisiin aluksi rakentaa pelkkä verkko kärjistä ja särmistä. (Tällöin ei kuitenkaan välttämättä synny pintaverkkoa; totea tämä rakentamalla sopiva esimerkkiverkko.) Mutta jos verkko on jonkin monitahokkaan "luuranko", onko kyseinen monitahokas yksikäsitteinen? Löydätkö verkon, johon voi pingottaa tahkoja kahdella eri tavalla siten, että syntyy eri genuksiset monitahokkaat? (Tämä on vaikea – älä masennu vaikka et löytäisi tällaista verkkoa!)