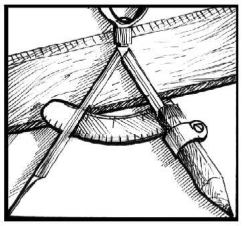


Paraabelin sukulaiset

Pekka Smolander
Matematiikan laitos, Joensuun yliopisto

Johdantoa

Ellipsin, paraabelin ja hyperbelin sukulaisuus on monille tuttu asia. Aihetta on käsitelty esimerksi Solmussa 1/2001, *Matti Lehtisen* artikkelin viimeisessä kappaleessa. Seuraavassa sukulaisuutta pyritään havainnollistamaan yhdennäköisyyden avulla. Huomataan, että yhdennäköisyys nähdään jopa yhtälöistä, kun ne esitetään sopivassa muodossa.

Oikealle aukeava paraabeli

Tarkastellaan ensin paraabelia, jonka yksinkertaisin yhtälö on

$$y = x^2.$$

Tämä paraabeli aukeaa ylöspäin ja sen huippu on origossa. Lähellä origoa käyrä näyttää sellaisen suuren ellipsin osalta, jonka isoakseli on y-akselin suuntainen. Visuaalisesti miellyttävämpää on tarkastella ellipsejä, joiden isoakseli on x-akselin suuntainen. Siksi tarkastellaankin oikelle aukeavaa paraabelia

$$y^2 = x. \tag{1}$$

Tämä saadaan ensimmäisestä yhtälöstä vaihtamalla x- ja y-koordinaattien roolit.

Pyritään löytämään ne ellipsit ja hyperbelit, jotka origon lähellä mahdollisimman tarkasti näyttävät paraabelilta (1). Esimerkiksi ellipsi

$$\frac{(x-8)^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1,$$

ja hyperbeli

$$\frac{(x+8)^2}{8^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

muistuttavat paraabelia (1) origon läheisyydessä. Nämä käyrät on piirretty Kuvaan 1.

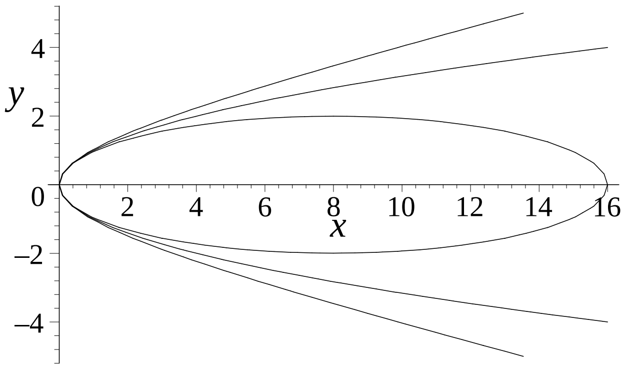
Ellipsistä paraabeliksi

Ajatus on seuraava: Kiinnitetään ellipsin äärimmäisenä vasemmalla oleva piste origoon ja valitaan ellipsille tietty muoto, joka riippuu ellipsin koosta. Kasvattamalla ellipsin kokoa rajatta huomataan, että vastaavasti ellipsin yhtälö yhtyy paraabelin yhtälöön.

Ellipsin yhtälön perusmuoto on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä a on vaaka-akselin puolikas ja b on pystyakselin puolikas. Muokataan tätä yhtälöä edellisen ajatuksen mukaan.



Kuva 1: Ellipsi, paraabeli ja hyperbeli

Siirtämällä ellipsiä luvun a verran oikealle saadaan äärimmäisenä vasemmalla oleva ellipsin piste origoon. Tällaisen ellipsin yhtälö on

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Koska luvut a ja b ovat puoliakselien pituudet, ne vaikuttavat ellipsin muotoon ja ne voidaan valita halutulla tavalla. Esimerkiksi piirtelemällä eri muotoisia ellipsejä huomataan seuraavaa: Puoliakselien pituudet kannattaa valita niin, että ne toteuttavat yhtälön

$$b^2 = a/2.$$

Edellisestä yhtälöstä saadaan siis

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a/2}=1. \tag{2}$$

Ratkaisemalla y^2 saadaan yhtälö

$$y^2=\frac{a}{2}\left(1-\frac{(x-a)^2}{a^2}\right),$$

joka sievenee yksinkertaiseen muotoon

$$y^2=-\frac{1}{2a}x^2+x. \tag{3}$$

Tämä yhtälö on siis yhtä pitävä yhtälön (2) kanssa. Kasvatetaan ellipsin kokoa antamalla $a\to\infty$. Tällöin $\frac{1}{2a}\to 0$, joten rajankäynnissä päädytään paraabelin yhtälöön (1).

Hyperbelistä paraabeliksi

Hyperbelin yhtälö perusmuodossaan on

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

missä a ja b ovat hyperbelin puoliakselit. Myös tästä yhtälöstä päädytään edellisen tyyppisellä muokkauksella paraabelin yhtälöön.

Kiinnitetään hyperbelin oikeanpuoleisen haaran kärkipiste origoon korvaamalla x lausekkeella $x+a$ ja valitaan $b^2=a/2$. Saadaan yhtälö

$$y^2=\frac{1}{2a}x^2+x. \tag{4}$$

Kun $a\to\infty$, niin myös tämä hyperbelin yhtälö muuntuu paraabelin yhtälöksi (1). Lukija voi kirjoittaa yksityiskohdat näkyviin katsomalla mallia edellisestä kappaleesta.

Käyrien perhe

Edellä johdetut ellipsin ja hyperbelin yhtälöt muistuttavat toisiaan. Jos ellipsille kirjoitetaan

$$t=-\frac{1}{2a},$$

ja paraabelille

$$t=\frac{1}{2a},$$

niin (3) ja (4) saadaan samasta yhtälöstä

$$y^2=tx^2+x. \tag{5}$$

Ellipsi saadaan, kun $-\infty<t<0$, ja hyperbeli, kun $0<t<\infty$. On huomattava, että myös paraabeli (1) saadaan tästä yhtälöstä valitsemalla $t=0$. Esimerkiksi Kuvan 1 käyrät saadaan, kun $t=-1/16$, $t=0$ ja $t=1/16$.

Jokaisella parametrin t arvolla saadaan yhtälöstä (5) joko ellipsi, paraabeli tai hyperbeli. Näin siis muodostuu käyrien perhe, jossa on yksi paraabeli ja sitä origon lähellä muistuttavia ellipsejä ja hyperbelejä. Mitä lähempänä luku t on nollaa, niin sitä enemmän käyrä muistuttaa paraabelia.

Kiinnostunut lukija voi piirrellä näitä käyriä ja muita tasokäyriä esimerkiksi ohjelmalla Graphmatica. Ohjelman voi imuroida osoitteessa `http://www.graphmatica.com` olevalta verkkosivulta.

Viitteet

M. Lehtinen, *Ellipsit, hyperbelit ja paraabelit vinossa*, Solmu 1/2001, http://solmu.math.helsinki.fi/2001/1/.