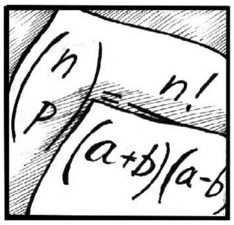

Solmun tehtäväpalsta on täällä taas!

Matti Lehtinen

Solmussa oli sen alkutaipaleella tapana julkaista matemaattisia ongelmia, sellaisia vähän vaativampia. Toimittaja toivoi saavansa lukijoiden ratkaisuja ja kannustimeksi lupasi julkaista näitä Solmussa, ratkaisijaa samalla kehuen. Toimittaja ei sortunut sisään virtaavan postin alle, sillä sitä tuli perin vähän. Tehtävien julkaiseminen lopetettiin. Mutta nyt ovat lukijat kertoneet, että tehtäviä pitäisi kuitenkin olla. Tässä niitä tulee. Mukavat lukijoiden ratkaisut pääsevät edelleen lehteen, ja ansiokkaita ratkaisijoita saatetaan muistaa pikku lahjuksinkin. Niin että töihin nyt, ja kun valmista tulee, niin paperille, kirjekuoreen ja osoitteeseen **Matti Lehtinen, Untuvaisentie 5 B 63, 00820 HELSINKI**. Sähköpostiakin voi yrittää käyttää, sehän on `matti.lehtinen@helsinki.fi`. Älä kuitenkaan panttaa ratkaisujasi loputtomiin, koska toimittajan ratkaisut julkaistaan seuraavassa Solmussa, ja silloinhan hommasta mielenkiinto vähenee.

Tehtävät

1. Luku $(\sqrt{50}+7)^{2001}$ kehitetään desimaaliluvuksi. Määritä luvun 1. ja 2001. desimaali.

2. Kolmion sivujen pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja. Yksi kolmion keskijanoista on kohtisuorassa erästä kolmion kulmanpuolittajaa vastaan. Määritä kolmion sivujen pituudet.

3. Kuutio K on leikattu 99:ksi pienemmäksi kuutioksi. Näistä vain yhdellä särmän pituus ei ole 1. Määritä kuution K tilavuus.

4. Määritä suurin kokonaisluku d, joka on kaikkien lukujen $n(n+1)(2n+2002)$, missä n on positiivinen kokonaisluku, tekijä.

5. Montako alkiota on suurimmassa joukon $A = \{1, 2, \ldots, 547\}$ sellaisessa osajoukossa, jossa minkään kahden luvun summa ei ole jaollinen 42:lla?

6. Ympyrät, joiden säteet ovat h ja k, sivuavat suoraa ℓ pisteissä A ja B. Ympyrät leikkaavat toisensa pisteissä C ja D. Todista, että kolmioiden ABC ja ABD ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet ovat samat. Määritä tämä säde.

7. Olkoon positiivisten lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tulo 1. Osoita, että
$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n} \leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

8. Seurueen jokaisen neljän jäsenen joukossa on yksi, joka on tuttu kyseisten kolmen muun jäsenen kanssa. Todista, että seurueessa on ainakin yksi jäsen, joka on tuttu seurueen kaikkien muiden jäsenten kanssa.

9. Varastossa on 2001 juustonpalaa. Todista, että on mahdollista leikata yksi paloista kahteen osaan niin, että palat voidaan kerätä kahteen säkkiin, joiden

sisältö painaa yhtä paljon ja joissa on kummassakin yhtä monta palaa.

10. Kokonaislukukertoimisella n:nnen asteen ($n \geqslant 5$) polynomilla $P(x)$ on n eri kokonaislukunollakohtaa $0, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Määritä polynomin $P(P(x))$ kokonaislukunollakohdat.

11. Veljekset möivät n lammasta hintaan n euroa/lammas. Rahat jaettiin niin, että vanhempi veli otti ensin 10 euroa, sitten nuorempi otti 10 euroa jne., kunnes oli nuoremman veljen vuoro ottaa rahaa, jota ei kuitenkaan enää ollut kymmentä euroa. Tällöin sovittiin, että nuorempi veli saa loput rahat sekä vanhemman linkkuveitsen, ja jako menee tasan. Minkä arvoinen oli linkkuveitsi?

12. Reaaliluvut a ja b toteuttavat yhtälöt
$$a^3 - 3ab^2 = 20, \quad b^3 - 3a^2b = 40.$$
Määritä $a^2 + b^2$.

13. Olkoon
$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$
Osoita, että $a_n = 2 + a_{n-1}$ silloin ja vain silloin, kun n on alkuluku.

14. Todista, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n luku $2^n + n^2$ on jaollinen 5:llä silloin ja vain silloin, kuin luku $n^2 \cdot 2^n + 1$ on jaollinen 5:llä.

15. Määritä kaikki alkuluvut n, joiden kymmenjärjestelmäesitys on $n = 10101\ldots01$.

16. Määritä kymmenjärjestelmässä kirjoitetun luvun 2001^{2001} numeroiden summan numeroiden summan numeroiden summa.

17. Olkoon p kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, m\}$, m positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, 35, 36\}$ ja olkoon q kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$, n positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Määritä $|p - q|$:n pienin mahdollinen arvo.

18. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$ ei-positiivisia lukuja. Todista, että
$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{2001}} \leqslant 2000 + 2^{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2001}}.$$

19. Neliön $ABCD$ sivun pituus on 1. Olkoon X mielivaltainen sivun AB ja Y mielivaltainen sivun CD piste ja olkoot M XD:n ja YA:n leikkauspiste ja N XC:n ja YB:n leikkauspiste. Määritä ne pisteet X ja Y, joille nelikulmion $XNYM$ ala on suurin mahdollinen.

20. Suunnikkaan $ABCD$ sivun AD keskipiste on E ja F on pisteen B kohtisuora projektio suoralla CE. Osoita, että ABF on tasakylkinen kolmio.

21. Pisteet A, B, C ja D ovat pallon pinnan eri pisteitä. Janat AB ja CD leikkaavat toisensa pisteessä F. Pisteet A, C ja F ovat yhtä etäällä pisteestä E. Osoita, että suorat BD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

22. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä on Γ. Olkoon P piste Γ:n sisäpuolella. Olkoot X, Y ja Z ne pisteet, joissa suorat AP, BP ja CP myös leikkaavat Γ:n. Määritä ne pisteet P, joille XYZ on tasasivuinen kolmio.

23. n kiveä asetetaan yhdeksi tai useammaksi kasaksi. Mikä on eri kasoissa olevien kivien lukumäärien tulon suurin mahdollinen arvo?

24. Määritellään lukujonot (a_n) ja (b_n) seuraavasti: $a_1 = 9$, $b_1 = 3$, $a_{k+1} = 9^{a_k}$, $b_{k+1} = 3^{b_k}$, kun $k = 1, 2, \ldots$ Määritä pienin n, jolle $b_n > a_{2001}$.

25. Tasossa on annettuina 2000 pistettä. Osoita, että pisteet voidaan yhdistää pareittain 1000 janalla, jotka eivät leikkaa toisiaan.

26. Eräs tehdas tuottaa samankokoisia säännöllisiä tetraedreja. Tehdas maalaa tetraedrinsa neljällä värillä A, B, C ja D, kukin tahko omallaan. Montako erilaista tetraedria on mahdollista tuottaa?

27. Maalaiskoulussa on 20 lasta. Jokaisella kahdella lapsella on yhteinen isoisä. Todista, että eräällä isoisällä on ainakin 14 lastenlasta.

28. Toisessa koulussa oli 13 tyttöä ja 10 poikaa. Opettaja jakoi namusia. Kaikki tytöt saivat keskenään yhtä monta ja kaikki pojat keskenään yhtä monta. Kukaan ei jäänyt ilman. Osoittautui, että tapa, jolla opettaja jakoi namuset, oli ainoa tapa, joka täytti edellä kuvatut ehdot. Montako namusta opettajalla enintään oli?

29. Todista, että
$$\frac{1}{668} + \frac{1}{669} + \cdots + \frac{1}{2002} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{2}{2000 \cdot 2001 \cdot 2002}.$$

30. Olkoon $\mathbb{N}^*$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, joille $f(n+m) = f(n)f(m)$ kaikilla $m, n \in \mathbb{N}^*$ ja joille yhtälöllä $f(f(x)) = (f(x))^2$ on ainakin yksi ratkaisu $x \in \mathbb{N}^*$.