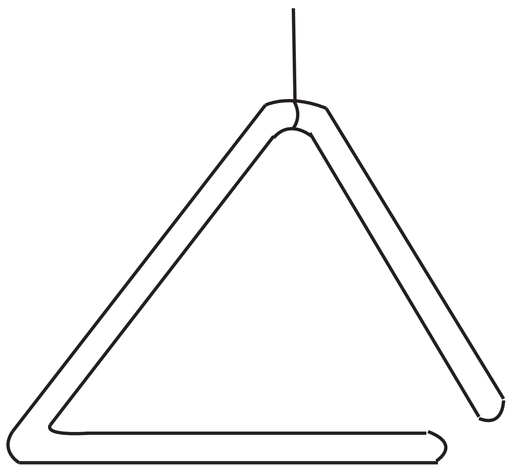
Kolmion kulmien summa

Maria Sukura

Oppituntien johdanto

Oppilaat kuulevat triangelin äänen. He voivat katsoa sitä ja yrittää nimetä tämän soittimen. Tutkimme, miksi triangelia kutsutaan tällä nimellä, ja havaitsemme kolme kulmaa; triangeli on tasasivuisen kolmion muotoinen.

Oppilaat saavat paperiarkin, jossa on monenlaisia kolmioita. Yhdessä yritämme löytää ominaisuuksia, jotka ovat yhteisiä kaikille kolmioille. Toivon, että oppilaat löytävät kolme kulmaa, kulmien kyljet ja kolme sivua. Sen jälkeen alamme tutkia kolmea kulmaa yhdessä.

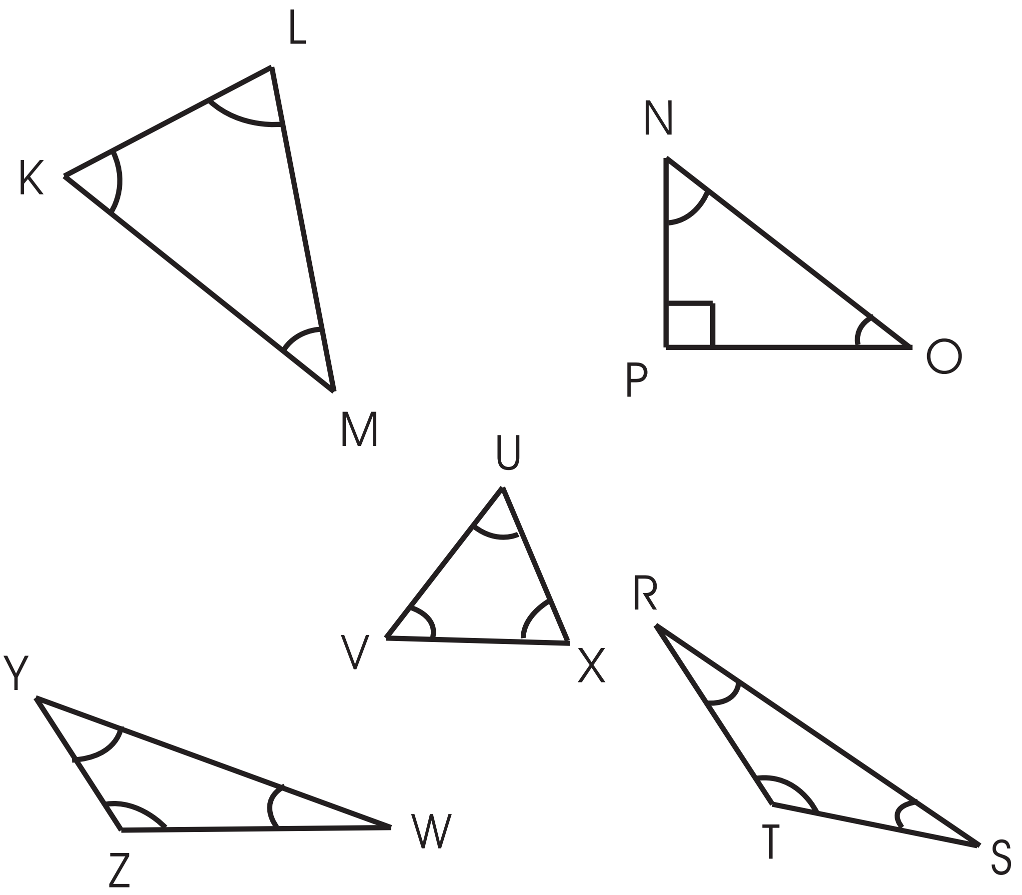


Oppilaat saavat ensimmäisen läksynsä.

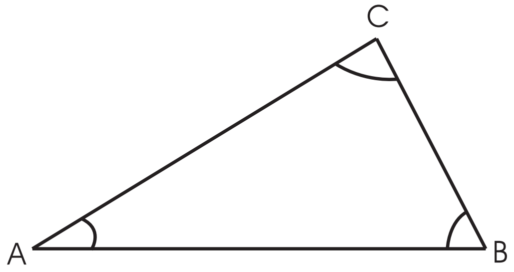
1. Leikkaa paperiarkista irti yksi kolmio. Leikkaa kolmiosta kulmat pois ja liimaa ne yhteen. Aseta sivut pisteeseen A ja kulmien kyljet toisiaan vasten.
   Leikkaa toinen kolmio ja leikkaa siitä kulmat pois. Leikkaa kulmat samalla tavalla pisteeseen B.

   Muodostavatko kolme kulmaa yhdessä suoran kulman?
   Kuinka monta astetta se on?

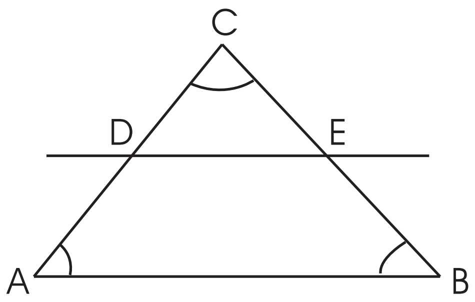
2. Sinulla on kolmio ABC tehtäväpaperissasi. Piirrä vaakasuora jana DE, joka jakaa kolmion ABC kahteen osaan. Leikkaa irti kolmio ABC. Taita kulma ACB kyljelle AB. Taita sitten kulma CBA kyljelle AB, ja sitten kulma BAC.

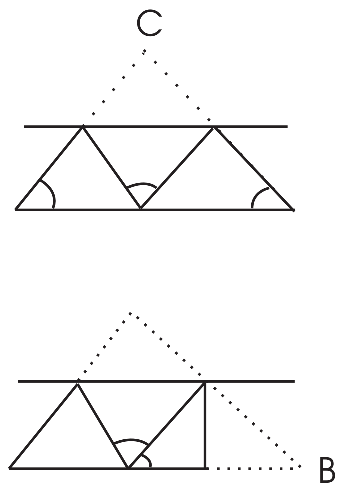


Kuva 1: Kolmiot harjoitukseen 1



Kuva 2: Kolmio harjoitukseen 2





Kuinka monta astetta nämä kulmat ovat yhteensä?
Voit tarkistaa sen astelevyn avulla.

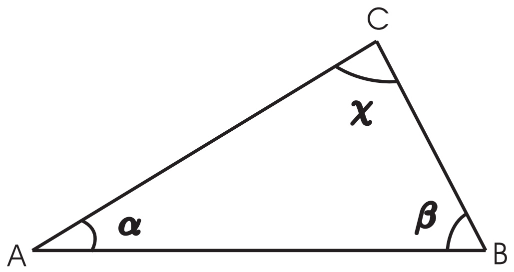
3. Piirrä suuri kolmio ja mittaa jokainen kulma. Laske kolme kulmaa yhteen. Vertaa vastaustasi vierustoveriesi vastauksiin.

   Millaisen johtopäätöksen voit tehdä?

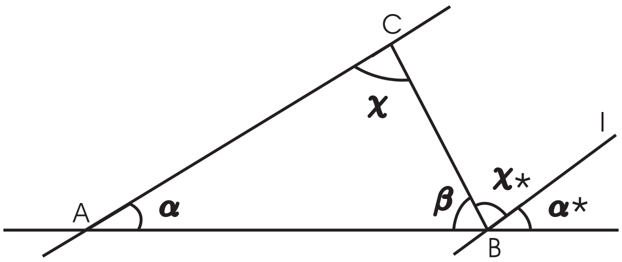
Nämä tulokset havainnollistavat sitä tosiasiaa, että kolmion kulmien summa on aina 180 astetta.

Kuinka voimme osoittaa tämän?

Olkoon ABC kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja χ.



1. Piirrä pisteen B kautta kulkeva, kyljen AC kanssa yhdensuuntainen suora l.

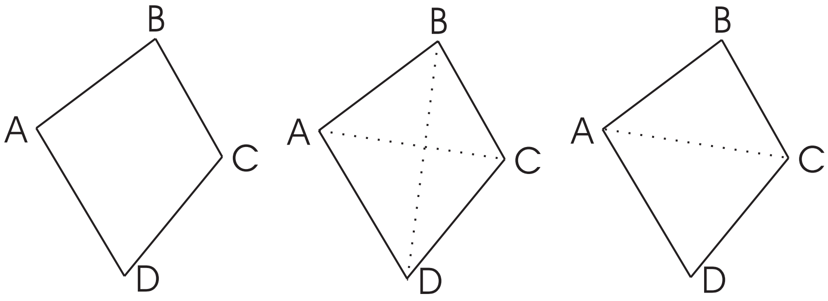


2. Jatka kulman α kylkiä. Löydätkö kulmat α ja χ kolmion ABC ulkopuolelta? Kulmat α ja α^* sekä χ ja χ^* ovat samat, koska yhdensuuntaisten suorien väliset vastinkulmat ovat yhtäsuuret. Kulmat α ja α^* ovat samassa asennossa ja kulmat χ ja χ^* vastakkaisessa asennossa.
3. Jos et usko todistusta, niin voit tehdä sen itse. Piirrä kulma α^* läpinäkyvälle paperille ja aseta se kulman α päälle.
   Mitä huomaat?

Missä voimme käyttää tietoa, että kolmion kulmien summa on 180 astetta?

Tämä on hyödyllinen tieto, kun haluamme laskea monikulmion kulmien summan. Yritämme laskea erilaisten monikulmioiden kulmien summan.

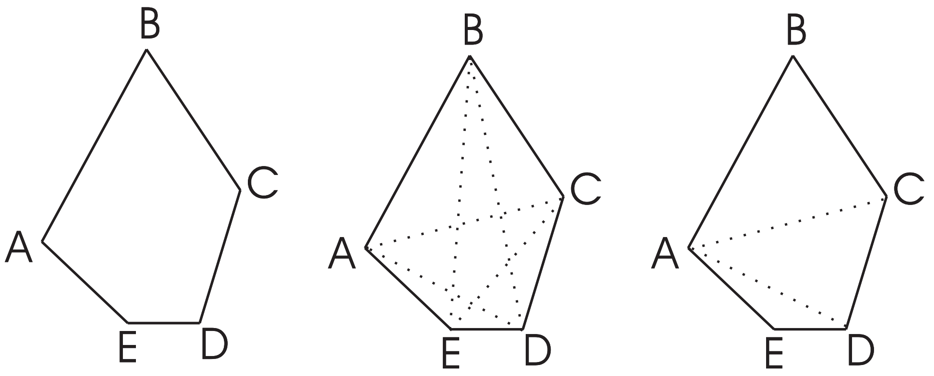
Nelikulmio



Kuinka monta lävistäjää voit piirtää nelikulmiolle? (2)
Kuinka monta erilaista lävistäjää voit piirtää nelikulmiolle? (2)
Löydätkö nelikulmiosta yhtään tuttua kuviota? (Toivon, että oppilaat löytävät kolmioita.)
Nyt voit käyttää tietoa, että kolmion kulmien summa on 180 astetta.
Miten voit laskea nelikulmion kulmien summan? $(2 \cdot 180°)$

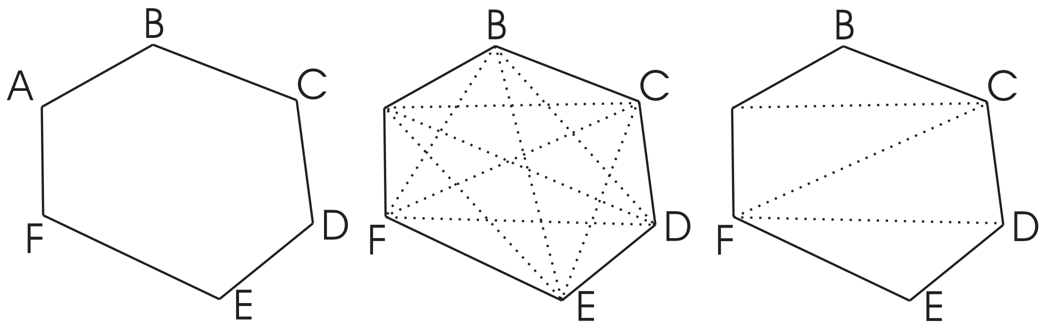
Seuraavaksi tarkastelemme vain konvekseja monikulmioita.

Viisikulmio



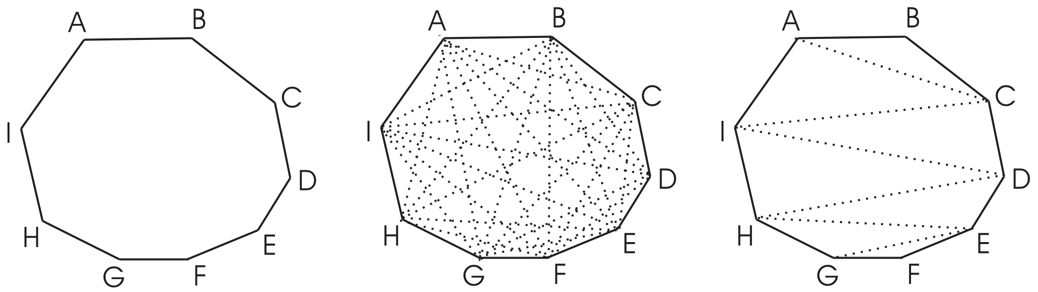
Kuinka monta erilaista lävistäjää voit piirtää? (5)
Kuinka monta kolmiota voit vähintään piirtää? (3)
Kuinka monta astetta on viisikulmion kulmien summa? $(3 \cdot 180°)$

Kuusikulmio



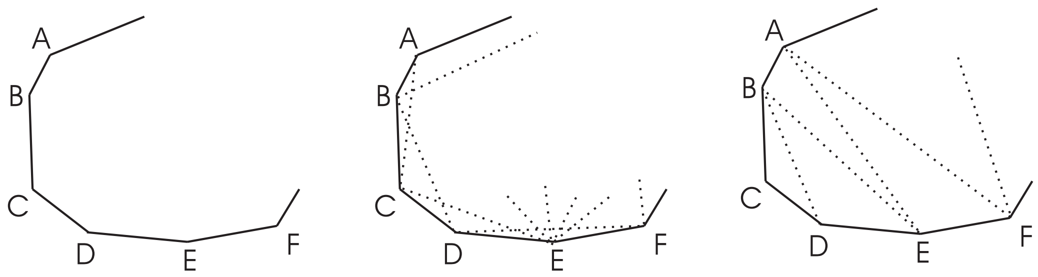
Kuinka monta erilaista lävistäjää voit piirtää? (9)
Kuinka monta kolmiota voit vähintään piirtää? (4)
Kuinka monta astetta on kuusikulmion kulmien summa? $(4 \cdot 180°)$

9-kulmio



Kuinka monta erilaista lävistäjää voit piirtää? (27)
Kuinka monta kolmiota voit vähintään piirtää? (7)
Kuinka monta astetta on 9-kulmion kulmien summa? $(7 \cdot 180°)$

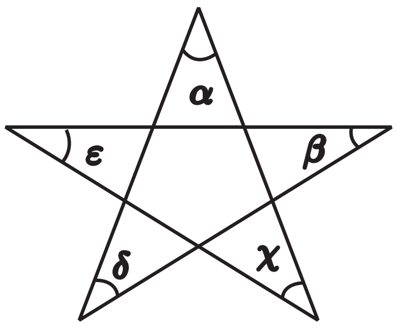
n-kulmio



Kuinka monta erilaista lävistäjää voit piirtää? $\left(\frac{n(n-3)}{2}\right)$
Kuinka monta kolmiota voit vähintään piirtää? $(n-2)$
Kuinka monta astetta on n-kulmion kulmien summa? $((n-2) \cdot 180°)$

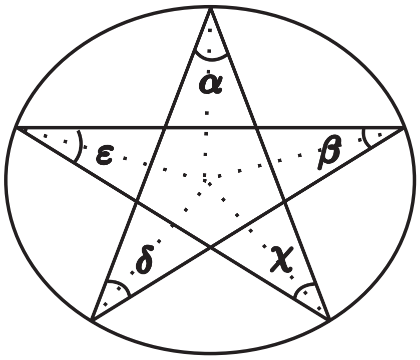
Ongelma

Mikä on tähtikuvion kulmien α, β, χ, δ ja ϵ summa?

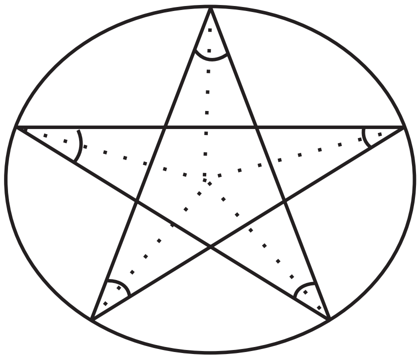


Ensimmäinen ratkaisu

1. Jos tähtikuvio on säännöllinen, niin voit piirtää ympyrän tähtikuvion ympärille siten, että tähtikuvion kärjet ovat ympyrän kehällä.

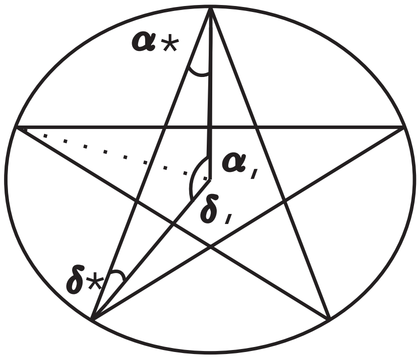


2. Piirrä kulmien α, β, χ, δ ja ϵ puolittajat ympyrän keskipisteeseen.



Mitä huomaat? (Toivon, että oppilaat löytävät viisi kulmaa.)

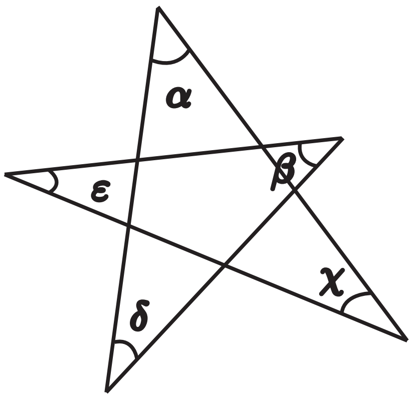
Minkä kokoisia kulmat ovat?
Miten saat vastauksen?
Kuinka monta astetta on ympyrä?
Voit jakaa 360 astetta viiteen osaan: $360/5 = 72$ astetta.



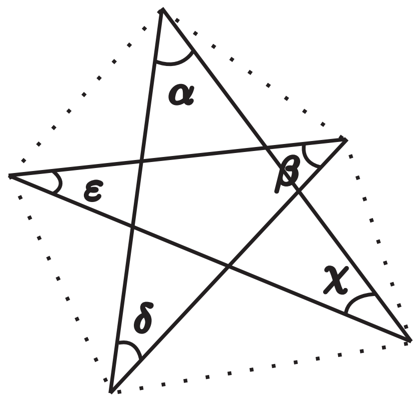
Sitten voit piirtää kolmion ympyrän sisään.
Tiedämme, että kolmion yksi kulma on $\alpha' + \delta' = 144$ astetta. Nyt voimme laskea kulmien α^* ja δ^* suuruudet: $(180 - 144)/2 = 18$ astetta. Kulmien α, β, χ, δ ja ϵ summa on siten $10 \cdot 18 = 180$ astetta.

Yleinen tapaus

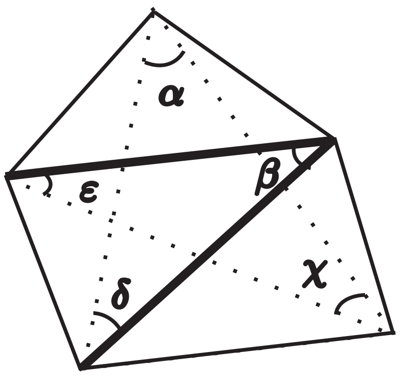
Jos tähtikuvio ei ole säännöllinen, mutta on konveksi, niin voit laskea toisella tavalla kulmien α, β, χ, δ ja ϵ summan.



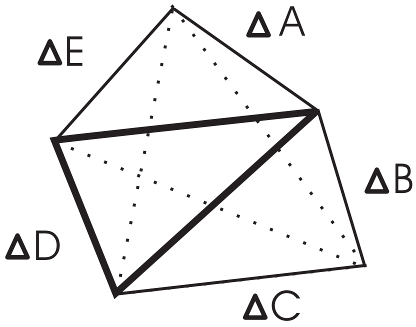
Ensin sinun on täydennettävä tähtikuvio viisikulmioksi.



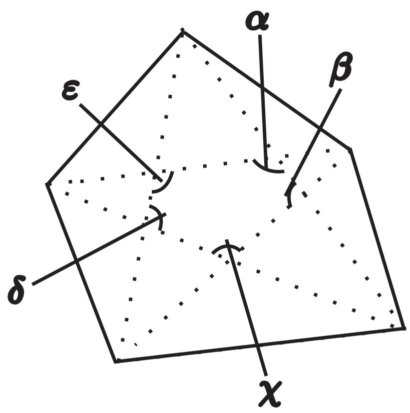
Kuinka monta kolmiota löydät viisikulmiosta, jos et ajattele vanhaa tähtikuviota?



Tällaisia kolmioita on kolme kappaletta, joten niiden kulmien summa on $3 \cdot 180$ astetta.
Nyt kuviomme ei kuitenkaan ole tähtikuvio, vaan kulmat α, β, χ, δ ja ϵ ovat liian suuria. Kuinka voimme tehdä niistä pienempiä?
Meidän on poistettava kuviosta kolmiot A, B, C, D ja E. Tällöin kulmien summa on $3 \cdot 180 - 5 \cdot 180$.



Onko tämä oikein? Nyt olemme poistaneet kuviosta liikaa, kulmat α^*, β^*, χ^*, δ^* ja ϵ^*. Mitä meidän nyt on tehtävä? Meidän on lisättävä kulmat α^*, β^*, χ^*, δ^* ja ϵ^* takaisin. Lisäämme viisikulmion monikulmion sisään.



Nyt saamme kulmien α, β, χ, δ ja ϵ summaksi $3 \cdot 180 - 5 \cdot 180 + 3 \cdot 180 = 180$ astetta.