$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leq \sqrt{x_1+x_2+\cdots x_n}$ – epäyhtälön johto käänteisellä induktiolla ja sen käyttö ääriarvotehtävissä

Irmeli Pietilä

1 Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välinen epäyhtälö

Ensiksi todistetaan. että $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$ on totta, kun $x_1, x_2 > 0$.

Todistus.

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geq x_1 x_2, \tag{1.1}$$

operaatio on sallittu, koska molemmat puolet ovat positiivisia.

$$\frac{{x_1}^2+2x_1x_2+{x_2}^2}{4} \geq x_1 x_2, \tag{1.2}$$

$${x_1}^2+2x_1x_2+{x_2}^2 \geq 4x_1 x_2, \tag{1.3}$$

operaatio on sallittu, koska 4 on positiivinen.

$${x_1}^2-2x_1x_2+{x_2}^2 \geq 0, \tag{1.4}$$

$$(x_1-x_2)^2 \geq 0. \tag{1.5}$$

Edellisessä epäyhtälössä yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $x_1 = x_2$.

Seuraavaksi todistetaan epäyhtälö yleisessä tapauksessa:

$$\frac{x_1+x_2+...x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}, \qquad x_1, x_2, ..., x_n > 0. \tag{1.6}$$

Askel 1 $(n = 2^k)$

Epäyhtälö todistettiin tapauksessa $n = 4$. Seuraavaksi voidaan todistaa matemaattisella induktiolla epäyhtälö todeksi, kun $n = 2^k$ ja $k > 1$.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}. \tag{1.8}$$

Geometristen keskiarvojen aritmeettinen keskiarvo!

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}. \tag{1.9}$$

Yhtäsuuruus toteutuu, jos $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$.
Yhtäsuuruus toteutuu, jos $x_1 x_2 = x_3 x_4$.
Kummatkin ylläolevista ovat tosia, jos $x1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Askel 2

Käänteisellä induktiolla näytetään todeksi, että epäehtälö on voimassa tapauksessa $n = 3$, kun se on voimassa tapauksessa $n = 4$.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}, \quad x_1, x_2, x_3 > 0. \tag{1.10}$$

Valitaan

$$x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad \text{joten } x_1 + x_2 + x_3 = 3 \cdot x_4. \tag{1.11}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{3 \cdot x_4 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}, \tag{1.12}$$

$$x_4 \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}, \tag{1.13}$$

$$x_4^4 \geq x_1 x_2 x_3 x_4, \tag{1.14}$$

$$x_4^3 \geq x_1 x_2 x_3, \tag{1.15}$$

$$x_4 \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}. \tag{1.16}$$

Kuten muistamme, $x_4 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, joten

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \tag{1.17}$$

Yhtäsuuruus pätee, kun $x_1 = x_2 = x$. Samalla tavalla voisimme todistaa epäyhtälön todeksi kaikilla n:n arvoilla.

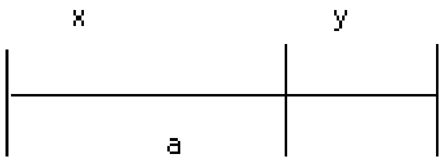
$\square$

2 Maksimiarvo-ongelmat

Edellisen luvun epäyhtälöä voidaan käyttää maksimiarvotehtävissä, jos funktio voidaan kirjoittaa tekijöidensä tuloksi siten, että samojen tekijöiden summa on vakio.

Ongelma 1

Jana a on jaettu kahteen osaan kuvan osoittamalla tavalla. Mikä on pinta-alan suurin arvo, jos se on määritelty $A = x^2y$ maksimiarvo? Mikä on x:n arvo siinä tapauksessa?



Kuva 1: $a = 10$, $x, y > 0$

Muista!

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

$$\begin{aligned}
A(x) &= x \cdot x \cdot (10 - x), \\
2A(x) &= x \cdot x \cdot 2(10 - x), \quad \text{voidaan kertoa 2:lla, koska } 2 > 0, \\
2A(x) &\leq \left(\frac{x + x + 20 - 2x}{3} \right)^3, \\
2A(x) &\leq \frac{20^3}{3^3}, \\
A(x) &\leq \frac{4000}{24} \approx 148.148\ldots.
\end{aligned}$$

Edellisessä epäyhtälössä yhtäsuuruus toteutuu, jos $x_1 = x_2 = x_3$. Silloin

$$\begin{aligned}
x &= 20 - 2x, \\
x &= \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}, \qquad y = 3\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Vastaus ongelmaan 1:

$$A(x) \leq \frac{4000}{24} \approx 148.148\ldots.$$

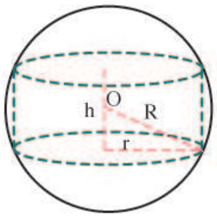
Yhtäsuuruus, kun

$$x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3},\ y = 3\frac{1}{3}.$$

Ongelma 2

Ympyrän sisälle on piirretty sylinteri. Mikä on sylinterin maksimitilavuus, kun ympyrän säde on R?

Sylinterin sädettä on merkitty r:llä ja korkeutta h:lla (kummatkin aidosti positiivisia ja pienempiä kuin R). Sylinterin tilavuus on siten



Kuva 2:

$$\begin{aligned}
V &= \pi r^2 h,\\
r^2 + \frac{h^2}{4} &= R^2. \quad \text{Katso kuvaa! Pythagoras.}\\
r^2 &= R^2 - \frac{h^2}{4}, \quad \text{tämä sijoitetaan } r^2\text{:n tilalle } V\text{:n kaavassa}\\
V &= \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot \pi \cdot h,\\
\frac{V(h)}{\pi} &= \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot h, \quad \text{yhtälö voidaan jakaa } \pi > 0.
\end{aligned}$$

Yhtälö on positiivinen ja siksi voidaan korottaa neliöön.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{V(h)}{\pi}\right)^2 &= \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h^2, \\
\frac{V(h)}{\pi^2 \cdot 2}^2 &= \left(R^2 - \frac{h^2}{,}4\right)\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)\frac{h^2}{2} \leq \left(\frac{R^2 - \frac{h^2}{4} + R^2 - \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{2}}{3}\right)^3, \\
(V(h))^2 &\leq 2\pi^2\left(\frac{2R^2}{3}\right)^3 \\
V(h) &\leq \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Koska $\frac{4\pi R^3}{3}$ on pallon tilavuus $(= V(R))$, on sylinterin maksimitilavuus $V(h) = \frac{V(R)}{\sqrt{3}}$. Edellisessä epäyhtälössä yhtäsuuruus toteutuu, jos

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2 = x_3, \\
R^2 - \frac{h^2}{4} &= \frac{h^2}{2}, \\
\frac{3h^2}{4} &= R^2, \qquad h = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \\
r^2 &= R^2 - \frac{h^2}{4}, \\
r^2 &= R^2 - \frac{4R^2}{4 \cdot 3}, \qquad r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Vastaus Ongelmaan 2:

$$V(h) = \frac{V(R)}{\sqrt[3]{3}}$$

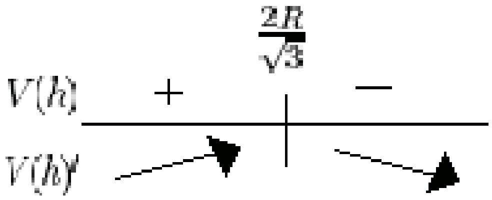
Yhtäsuuruus, kun

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \; r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}.$$

Ennen Hortobagyin kurssia en olisi ratkaissut tätä ongelmaa edellämainitulla tavalla, vaan olisin käyttänyt derivaattaa.

Ratkaisutapa 2

$$
\begin{aligned}
V(h) &= \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h,\\
V(h) &= \pi R^2 h - \pi\frac{h^3}{4},\\
V(h)' &= \pi R^2 - \pi 3\frac{h^2}{4},\\
V(h)' &= 0, \quad \text{kun } \pi R^2 - \pi 3\frac{h^2}{4} = 0,\\
h &= \pm\frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad \text{mutta vain } h > 0 \text{ on hyväksyttävä.}
\end{aligned}
$$



Kuva 3:

Funktio saavuttaa maksimiarvonsa, kun $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, silloin $r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ ja tilavuus on $V(h) = \frac{V(R)}{\sqrt{3}}$.

3 Minimiarvo-ongelmat

Ensimmäisen luvun epäyhtälöä voidaan käyttää minimiarvotehtäviin, jos funktio voidaan kirjoittaa termien summaksi ja samojen termien tulo on vakio.

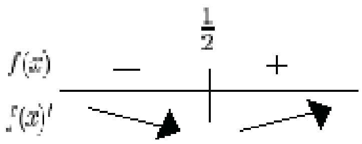
Ongelma 3

Mikä on funktion $f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$, $x > 0$, minimiarvo?

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 4x + \frac{1}{x},\\
&\frac{f(x)}{2} = \frac{4x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{4x\frac{1}{x}} \geq 2,\\
&f(x) \geq 4.
\end{aligned}
$$

Yhtäsuuruus pätee, jos $4x = \frac{1}{x}$, $4x^2 = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

Vastaus ongelmaan 3:
$f(x)$:n minimiarvo on 4.
Silloin $x = \frac{1}{2}$.



Kuva 4:

Ja derivaatalla:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x + \frac{1}{x}, \quad x > 0, \\
f(x)' &= 4 - \frac{1}{x^2}, \\
f(x)' &= 0, \\
4 - \frac{1}{x^2} &= 0, \\
x &= \pm\frac{1}{2}, \quad \text{mutta } x > 0, \text{ silloin ainoastaan } x = \frac{1}{2} \text{ kelpaa.}
\end{aligned}
$$