Esimerkki ääriarvo-ongelmasta, joka voidaan ratkaista alkeellisilla tavoilla

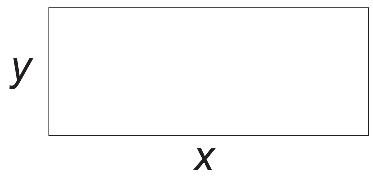
Prof. István Hortobágyi

Usein halutaan määrittää funktion suurin (maksimi) tai pienin (minimi) arvo sen määrittelyjoukossa. Tällaisia tehtäviä kutsutaan ääriarvo-ongelmiksi. Yleensä ne ratkaistaan differentiaalilaskennan keinoin. Jos differentiaalilaskentaa ei käytetä tehtävän ratkaisussa, sanotaan, että kyseessä on alkeellinen ratkaisu. Tässä käsitellään vain yhtä ongelmaa, ja annetaan sille useita ratkaisuja.

Tehtävä.

Halutaan rakentaa suorakulmainen puutarha, joka ympäröidään 100 metrin pituisella aidalla. Miten pitkiä tulee suorakulmion sivujen olla, jotta puutarhan ala olisi mahdollisimman suuri?

Ratkaisu 1.

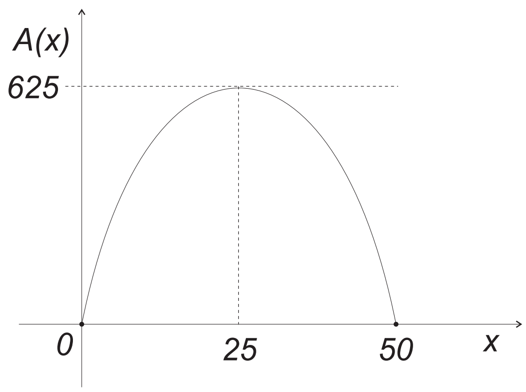


Kuva 1:

Merkitään suorakulmion kahta sivua x ja y. Koska $2(x+y) = 100$, niin $y = 50 - x$. Suorakulmion pinta-alaa kuvaa seuraava toisen asteen yhtälö:

$$A(x) = x(50 - x);\ \ 0 < x < 50$$

$A(x)$:n kuvaajasta (kuva 2) huomataan helposti, että suurin mahdollinen suorakulmion ala on 625 m^2, ja tämä tulos saadaan, kun $x = y = 25$.



Kuva 2:

Ratkaisu 2.

Kun täydennetään $A(x)$ neliöksi, saadaan

$$A(x) = x(50 - x) = -x^2 + 50x = -(x - 25)^2 + 625 \leq 625.$$

Tässä epäyhtälössä yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $x = 25$. Ratkaisuna on siis neliö. Ratkaisusta voidaan nähdä seuraava idea: Kyse on ekstremaalitehtävästä, joka ratkaistaan arvioimalla funktion ylärajoja ja löytämällä niistä pienin, joka on tässä tapauksessa myös funktion saama arvo, funktion maksimiarvo. Samoin funktion pienin arvo voidaan määrittää löytämällä vakio, joka on funktion saavuttama alaraja (siis funktion saama arvo). Tätä ratkaisutapaa kutsutaan estimoinniksi. Ala- ja ylärajojen löytämiseksi on useita mahdollisuuksia.

Ratkaisu 3.

Tunnemme seuraavan epäyhtälön aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välillä: Jos x_1 ja x_2 ovat kaksi positiivista lukua, niin

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

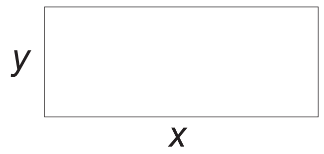
Yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $x_1 = x_2$. Käytetään tätä epäyhtälöä, kun $x = x_1$ ja $50 - x = x_2$. Tällöin

$$A(x) = x(50 - x) \leq \left(\frac{x + 50 - x}{2}\right)^2 = 625.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos $x = 50 - x$, joten $x = 25$.

Ratkaisu 4.

Johdetaan alueen pinta-alalle saavutettava yläraja käyttäen uutta muuttujaa z.



Kuva 3:

Koska $x + y = 50$, z voidaan kirjoittaa

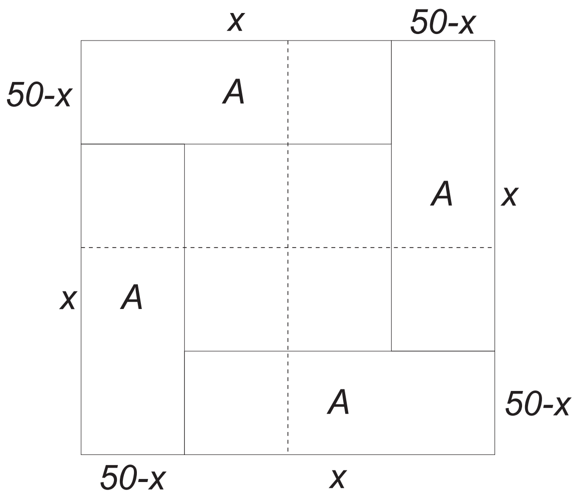
$$x = 25 - z, \quad y = 25 + z \text{ ja}$$

$$A(z) = xy = (25 - z)(25 + z) = 625 - z^2 \leq 625.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos $z = 0$. Tässä tapauksessa $x = y = 25$, joten ratkaisu on neliö.

Ratkaisu 5.

Johdetaan alueen pinta-alalle saavutettava yläraja geometrian keinoin. Otetaan neljä samanlaista, mielivaltaista suorakulmiota, joiden piirin pituus on 10 m ja ala A. Asetetaan ne kuvan 4 osoittamalla tavalla.



Kuva 4:

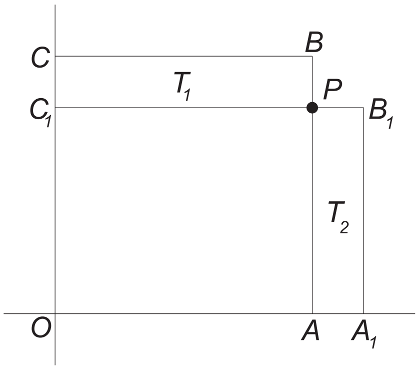
Huomataan, että kaikissa tapauksissa suorakulmiot ovat 50 m $\times$ 50 m neliön sisällä. Tästä seuraa, että

$$4A \leq 2500 \text{ ja } A \leq 625.$$

Yhtäsuuruus on voimassa kun neliön sisään ei jää "tyhjää tilaa". Tällöin suorakulmio on neliö, jonka sivun pituus on 25 m.

Ratkaisu 6.

Kuvaa 5 apuna käyttäen verrataan neliön $OABC$ alaa (sivut 25 m) mielivaltaisen suorakulmion $OA_1B_1C_1$ alaan (sivut x ja y).



Kuva 5:

Merkitään sivujen AB ja B_1C_1 leikkauspistettä P:llä ja suorakulmioiden C_1PBC ja AA_1B_1P aloja T_1:llä ja T_2:lla.

$$\text{Koska } OA_1 + OC_1 = OA + OC, \text{ niin } AA_1 = CC_1.$$

Lisäksi $CB > A_1B_1$, joten $T_1 > T_2$. Kun lisätään $OABC$:n ja $OA_1B_1C_1$:n leikkauksen $OAPC_1$ ala T_1:n ja T_2:n alaan, niin huomataan, että neliön ala on suurempi kuin suorakulmion ala.