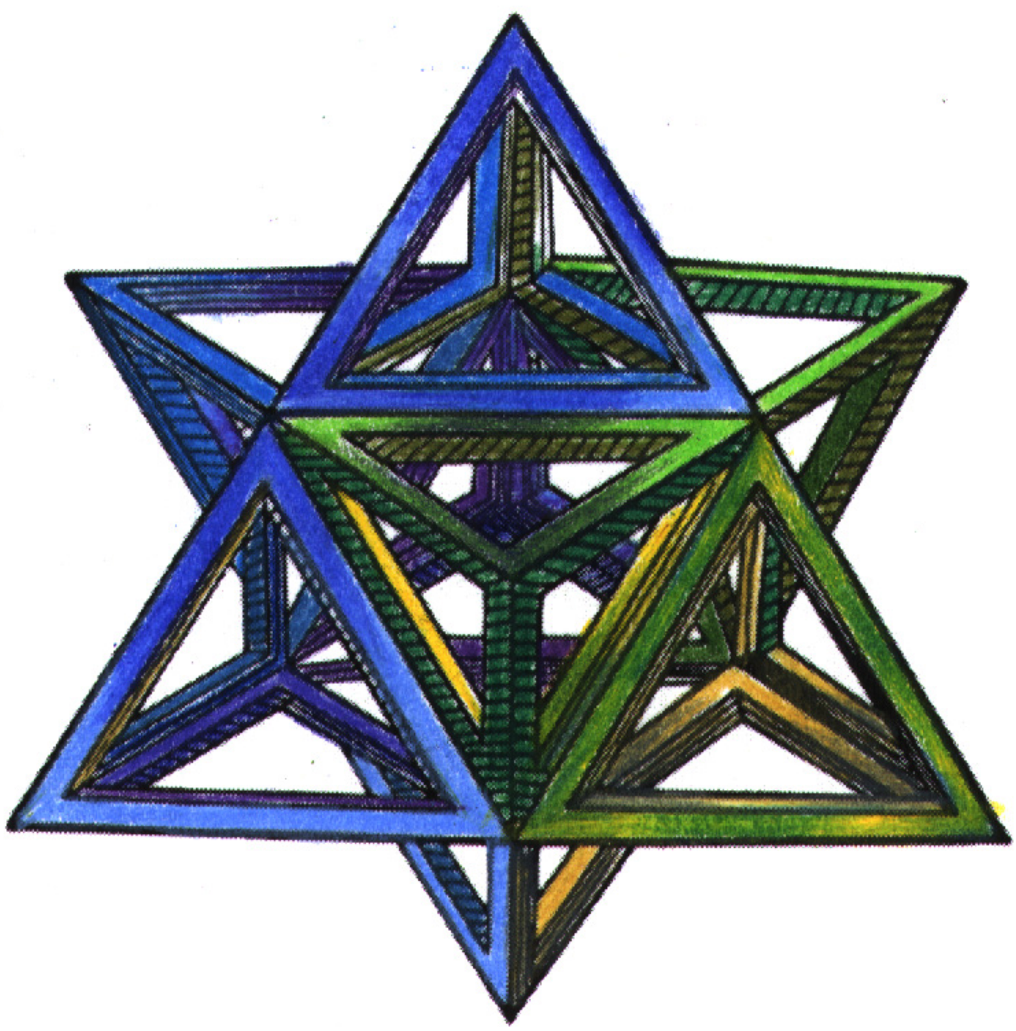
Solmu

Matematiikkalehti
3/2001

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 3/2001

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

Päätoimittaja *Pekka Alestalo*
Toimitussihteerit *Jouni Seppänen* ja *Mika Koskenoja*

Sähköposti
toimitus@solmu.math.helsinki.fi

Toimituskunta:
Heikki Apiola
Matti Lehtinen
Marjatta Näätänen

Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*

Vuonna 2002 ilmestyvien numeroiden määräajat: 31.1., 31.3., 30.9.

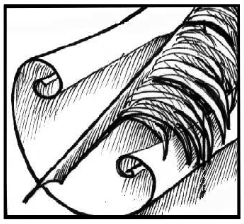
Kiitämme taloudellisesta tuesta Opetusministeriötä ja Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan nykyisin vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Mahdollisista tulostusongelmista pyydämme ilmoittamaan toimitukselle. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Täydellisen kokoelman Solmun jo ilmestyneitä paperikopioita voi pyytää esim. koulun kirjastoon niin kauan kuin niitä riittää. Ilmoittakaa postiosoitteenne ja mitkä numerot haluatte joko yllä mainittuun Solmun postiosoitteeseen tai sähköpostilla osoitteeseen toimitus@solmu.math.helsinki.fi.

Sisältö

Pääkirjoitus . . . 4
Toimitussihteerin palsta . . . 5
Descartesin merkillinen sääntö . . . 6
Frégier'n lause . . . 9
Sairaanhoitajatkin tarvitsevat matematiikkaa . . . 15
Matemaattis-luonnontieteelliset aineet ovat nyt ympäristöoppimme . . . 16
Suomalaisryhmä matematiikkaleirillä Balatonin rannalla . . . 18
Naisten matematiikan opiskelusta Ranskassa vuosina 1801–2001 . . . 20
Kompleksiluvuista ja kvaternioista . . . 22
Osataanko matematiikkaa? . . . 28



Pääkirjoitus

Suomi siirtyy vuodenvaihteessa euro-aikaan yhdessä 11 muun Euroopan maan kanssa.

On tietysti selvää, että virallisen tuntuisissa esitteissä euron ja markan muuntokertoimeksi esitetään luku 5,94573. Tavallisella kauppareissulla tästä ei pitäisi tulla ongelmaa, koska hinnat on ainakin aluksi ilmoitettava molemmissa rahayksiköissä, ja kun markkahinnoista sitten kokonaan luovutaan, olemme toivottavasti jo oppineet vertailemaan hintatasoa suoraan eurojen avulla.

Mutta rahamääriä on pystyttävä vertailemaan muuallakin kuin kaupassa. Toivon hartaasti, ettemme saa kuulla julistuksia siitä, että täsmällistä muuntokerrointa on aina käytettävä; näyttäisihän selvältä, että useimmissa tapauksissa voi aivan hyvin käyttää lukua 6. Jos välttämättä haluaa käyttää tarkkaa muuntokerrointa, voi tietysti kantaa mukanaan taskulaskinta. Toivon seuraavien esimerkkien tuovan esille sen, ettei se todellakaan ole välttämätöntä, jos vain kertotaulu on vielä hyvässä muistissa. Lisäksi kertolaskun vaihdannaisuus ja liitännäisyys yhtälöiden $6 \cdot a = 2 \cdot (3 \cdot a) = 3 \cdot (2 \cdot a)$ muodossa saa aivan uutta arvoa.

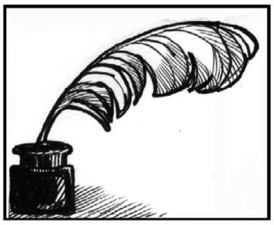
Aloitetaan yksinkertaisilla vaateostoksilla; hyvien tapojen vastaisesti laskemme seuraavassa pelkillä lukuarvoilla. Jos housut maksavat 45 euroa, niin paljonko se on markoissa? Käytämme nyt tietoa $6 = 3 \cdot 2$, joten päässälaskuna $6 \cdot 45 = 3 \cdot (2 \cdot 45) = 3 \cdot 90 = 270$. Tarkka arvo on 267,56. Takki puolestaan maksaa 53 euroa. Nyt on helpompi käyttää yhtälöä $6 = 2 \cdot 3$, jolloin aluksi $3 \cdot 53 = 159 \approx 160$ ja lopullinen hinta-arvio on $2 \cdot 160 = 320$. Tarkka arvo on tässä tapauksessa 315,12, ja osa erosta selittyy kahden markan pyöristysvirheen avulla. Sen sijaan 22 euron arvoisten hansikkaiden kohdalla on mukavampaa käyttää yhtälöä $a(b+c) = ab+ac$, joka on nimeltään osittelulaki. Tämän avulla laskemme suoraan $6 \cdot 22 = 6 \cdot (20+2) = 6 \cdot 20 + 6 \cdot 2 = 120 + 12 = 132$, joka poikkeaa tarkasta arvosta 130,81 vain vähän. Hankalissa tapauksissa voi vielä yhdistellä molempia yllä kuvattuja menetelmiä.

Entäpä suuremmat hankinnat? Tutkikaamme 100 000 euron asuntolainaa, jonka maksuaika on 10 vuotta. Jos unohdamme koron merkityksen, niin tarkalla kertoimella ja kuutossäännöllä laskettujen lainan loppusummien ero on 5 427 markkaa. Tämä on paljon rahaa, mutta koko laina-aikana se vastaa n. 45 markkaa kuukaudessa. Ainakaan itse en osaa suunnitella talouttani niin tarkasti, että summa vaikuttaisi esimerkiksi päätökseeni lainan ottamisesta.

Jos oma päässälaskutaito tuntuu välillä puutteelliselta, ei tietenkään ole mikään häpeä tarkistaa laskelmia taskulaskimen avulla. Toisaalta kehotan myös laskimen käyttäjiä tarkistamaan tuloksensa päässälaskuna, ainakin sen varmistamiseksi, että desimaalipilkku on ollut oikeassa kohdassa!

Solmun tilaushinnan muuttaminen euroiksi on puolestaan hyvin helppoa; se on markkamääräisenä täsmälleen sama kuin euroina! Kaiken lisäksi muuntokertoimena voidaan käyttää mitä tahansa reaali- tai jopa kompleksilukua.

Pekka Alestalo



Toimitussihteerin palsta

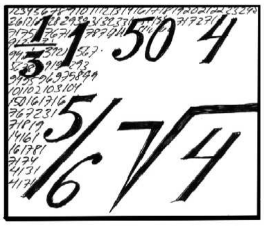
On ehkä paikallaan muistuttaa Solmua paperilla lukevia siitä, että lehti ilmestyy myös verkossa osoitteessa http://solmu.math.helsinki.fi. Vaikka tietokoneen ruudulta lukeminen on usein hankalampaa kuin paperilta, Solmun verkkoversiolla on joitakin hyviä puolia.

Tässä numerossa ilmestyvä Simo K. Kivelän artikkeli Frégier'n lauseesta on kirjoitettu Mathematica-nimisellä ohjelmalla, ja jos koulullasi on sama ohjelma, voit hakea tiedoston verkko-Solmusta ja kokeilla laskuja itse. Ilmankin Mathematicaa voit katsoa Frégier'n lausetta havainnollistavaa animaatiota, joka luonnollisesti puuttuu lehden paperiversiosta. Samoin Maija Salmelan matkakertomukseen sisältyvä luokkakuva ja pari ylimääräistä kuvaa löytyvät värillisinä verkosta.

Artikkelien liitteiden lisäksi verkossa on yläasteen opetusta tukeva linkkikokoelma, jonka on koonnut ja luokitellut Riitta Snellman. Kokonaan oma osasto on varattu unkarilaiseen matematiikanopetukseen liittyvälle materiaalille. Harjoitusarkkeja alkuopetukseen on ensimmäisen opetusvuoden tarpeisiin; toinen vuosi on tekeillä. Verkko-Solmu sisältää myös unkarista käännettyjä esiopetusta käsitteleviä kirjoituksia. Unkarin kielen harrastajia voi kiinnostaa pieni unkarilais-suomalainen matematiikkasanasto.

Verkko mahdollistaa myös jonkin verran helpomman keskustelun lukijoiden ja kirjoittajien välillä. Solmun keskustelupalstalla voit esittää kysymyksiä ja toivomuksia tulevien artikkelien aiheiksi.

Jouni Seppänen



Descartesin merkillinen sääntö

Matti Lehtinen

Historia tuntee *René Descartesin* (1596–1650) sinä filosofina, joka totesi *cogito, ergo sum*, ajattelen, olen siis olemassa, ja rakensi tästä vastaansanomattomasta totuudesta lähtien rationaalisen filosofian järjestelmän. Huomionarvoista on myös, että Descartes ei arvostanut aikaista ylösnousua. Hän arveli saaneensa kaikki merkittävät ajatuksensa aamupäivisin sängyssä loikoillessaan. Matemaatikoille Descartes eli *Cartesius* on arkipäivää suorakulmaisen, *karteesisen* koordinaatiston ja joukkojen *karteesisen tulon* myötä.

Descartes ei tiettävästi koskaan esittänyt tai käyttänyt suorakulmaista xy-koordinaatistoa, vaikka hänen matemaattista pääteostaan *La Géométrie* syystä pidetään analyyttisen geometrian perustajana. Samasta kirjasta on peräisin myös tämän kirjoituksen aihe, *Descartesin merkkisääntö*. Suppea kysely osoitti, että tämä sääntö ei ole kovin monelle tuttu.

Descartesin merkkisääntö koskee yhtä matematiikan keskeisimmistä ongelmista, polynomiyhtälön ratkaisemista. n:nnen asteen yhtälö voidaan aina kirjoittaa muotoon

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{1}$$

Jos $n = 1$ tai $n = 2$, yhtälön ratkaisu on hyvin tunnettu, ja jos $n = 3$ tai $n = 4$, ratkaisu voidaan, joskin työläästi, aina löytää. Mutta yleisessä tapauksessa ei pelkästään yhtälöä katsomalla usein edes pysty sanomaan, toteutuuko yhtälö millään reaaliluvulla saati kertomaan, millä x:n arvoilla yhtälö ehkä toteutuu. Descartesin sääntö ei sekään kerro yhtälön ratkaisuja edes likimäärin. Mutta se antaa hyvin yksinkertaisen keinon, jonka avulla voi päätellä jotain yhtälön ratkaisuista.

Yhtälön (1) polynomin kertoimet muodostavat reaalilukujonon $(1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0)$. Jonon luvuista osa voi olla nollia. Unohdetaan ne. Loput ovat joko positiivisia tai negatiivisia. Täten yhtälöön liittyy yksikäsitteinen symbolien $+$ ja $-$ jono:

$$(+, \pm, \pm, \ldots, \pm). \tag{2}$$

Descartesin merkkisääntö sanoo, että *yhtälöllä (1) on enintään niin monta positiivista ratkaisua, kuin jonossa (2) on merkin vaihtoja, siis* $(+, -)$ *tai* $(-, +)$ *-tyyppisiä kohtia. Jos kaikki kertoimet* a_k *ovat nollasta eroavia, niin negatiivisia ratkaisuja on enintään niin monta kuin jonossa (2) on peräkkäisiä samoja merkkejä, siis tyyppiä* $(+, +)$ *tai* $(-, -)$ *olevia kohtia.*

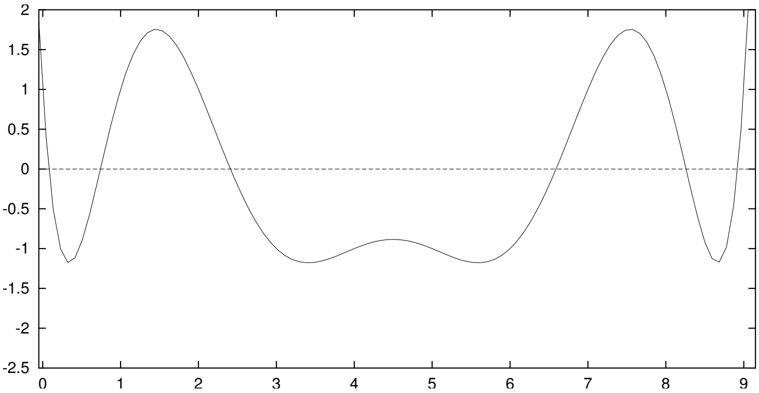
Descartes antaa esimerkiksi yhtälön

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

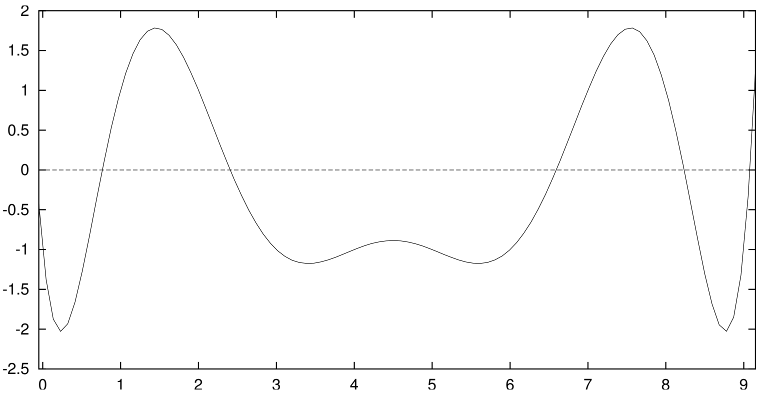
Sen merkkijono on $(+, -, -, +, -)$. Merkinvaihtoja on kolme ja yksi merkin säilyminen. Yhtälöllä onkin kolme positiivista ratkaisua: 2, 3 ja 4, ja yksi negatiivinen ratkaisu, $x = -5$. Descartes muuten kutsui yhtälön negatiivisia ratkaisuja *vääriksi*.

Jotkin säännön erikoistapaukset ovat selviä. Jos kertoimet a_k ovat positiivisia, ei yhtään positiivista juurta voi olla. Jos kertoimet $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ ovat kaikki negatiivisia, merkinvaihtoja on 1. Tällöin myös $P(0) = a_0 < 0$, mutta $P(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$. Nollakohtia on oltava ainakin yksi. Mutta merkkisäännön mukaan niitä ei voi olla myöskään enempää. Siis niitä on tasan yksi.

Yleisessä tapauksessa Descartesin sääntö tarvitsee perustelun. Sitä ei kannata etsiä Descartesin teoksesta, koska tämä kertoo sääntönsä vain faktana, ilman todistusta. Mutta onneksi meillä on käytössä keino, jota Descartesilla ei vielä ollut: differentiaalilaskenta. Hyötyä on myös polynomifunktioiden kuvaajia koskevasta intuitiosta. Seuraavassa malliksi pari kuvaajaa:



$$P(x) = \frac{1}{1440}x^8 - \frac{1}{40}x^7 + \frac{53}{144}x^6 - \frac{57}{20}x^5 + \frac{17849}{1440}x^4 - \frac{1189}{40}x^3 + \frac{2537}{72}x^2 - \frac{77}{5}x + 1$$



$$Q(x) = \frac{13}{20160}x^8 - \frac{13}{560}x^7 + \frac{491}{1440}x^6 - \frac{21}{8}x^5 + \frac{32491}{2880}x^4 - \frac{2111}{80}x^3 + \frac{16451}{560}x^2 - \frac{279}{28}x - 1$$

Nojaudumme Descartesin merkkisäännön perustelussamme polynomin ja sen derivaatan nollakohtien vuorovaikutukseen, joka näkyy edellisissä kuvissakin. Oletamme seuraavassa, että f on polynomifunktio. f:n derivaatta f' on myös polynomifunktio. Jos a ja b, $a < b$, ovat f:n kaksi peräkkäistä positiivista 0-kohtaa, siis $f(a) = f(b) = 0$, mutta $f(x) \neq 0$, kun $a < x < b$, niin f saa välillä $[a, b]$ joko positiivisen maksimiarvon jossain pisteessä c tai negatiivisen minimiarvon jossain pisteessä c. Kummassakin tapauksessa $f'(c) = 0$. Polynomin kahden nollakohdan välissä on siis ainakin yksi derivaatan nollakohta. Jos f:n kaikki positiiviset nollakohdat ovat $x_1, x_2, \ldots, x_m$, niin f':lla on ainakin $m-1$ nollakohtaa väleillä $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{m-1}, x_m)$.

Entä väli $[0,\, x_1]$? Jos $f(0) > 0$ ja $f'(0) < 0$, ei f':lla tarvitse olla yhtään nollakohtaa välillä $[0,\, x_1]$. Tästä on esimerkki polynomi P yllä. Mutta jos $f(0) \geq 0$ ja $f'(0) > 0$, f saa pienillä positiivisilla arvoilla suurempia arvoja kuin $f(0)$. Tällöin f saa välttämättä myös positiivisen maksimiarvon välillä $(0,\, x_1)$. Silloin f':lla on nollakohta myös välillä $(0,\, x_1)$. Vastaavasti, jos $f(0) < 0$ ja $f'(x) > 0$, ei f':lla tarvitse olla nollakohtaa välillä $(0,\, x_1)$, mutta jos $f(0) \leq 0$ ja $f'(0) < 0$, tällainen nollakohta on olemassa. Esimerkkinä polynomi Q yllä. Jos $f'(0) = 0$, derivoidaan lisää, kunnes tullaan nollasta eroavaan derivaatan arvoon $f^{(k)}(0)$. Samat johtopäätökset, jotka edellä tehtiin $f(0)$:n ja $f'(0)$:n merkeistä voidaan nyt johtaa $f(0)$:n ja $f^{(k)}(0)$:n merkeistä.

Jos edellinen päättely luetaan toisin, se merkitsee, että polynomin derivaatan positiivisten nollakohtien lukumäärä antaa ylärajan itse polynomin positiivisten nollakohtien lukumäärälle. Ja tämä yläraja riippuu siitä, ovatko $f(0)$ ja $f'(0)$ (tai $f(0)$ ja pienintä kertalukua k oleva $f^{(k)}(0)$) erimerkkisiä vai ei. Jos $f(0)$ ja $f'(0)$ eivät ole erimerkkisiä, jokaisen kahden nollakohdan ja 0:n ja pienimmän positiivisen nollakohdan välissä on ainakin yksi derivaatan nollakohta. Funktion positiivisten nollakohtien määrä ei siis voi ainakaan ylittää derivaatan positiivisten nollakohtien määrää. Mutta jos $f(0)$ ja $f'(0)$ ovat erimerkkiset, tiedetään vain, että jokaisen kahden funktion positiivisen nollakohdan välissä on derivaatan nollakohta, mutta tällaista ei välttämättä ole 0:n ja funktion pienimmän positiivisen nollakohdan välissä. Tässä tapauksessa funktiolla voi olla yksi positiivinen nollakohta enemmän kuin derivaatalla.

Mutta miten tämä liittyy Descartesin merkkisääntöön eli polynomin P kertoimien merkeistä koostuvaan jonoon? Lasketaan P:n ja sen derivaattojen arvot nollassa: ilmeisesti $P(0) = a_0$, $P'(0) = a_1$, $P''(0) = 2a_2$ ja yleisesti

$$P^{(k)}(0) = k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_k = k!a_k.$$

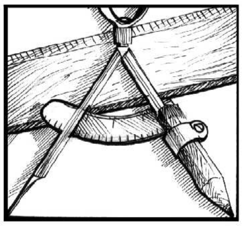
Erityisesti $P^{(n)}(x) = P^{(n)}(0) = n!$ kaikilla x. P:n kertoimien merkit ovat siis samat kuin P:n nollassa laskettujen eri kertaluvun derivaattojen merkit. Mutta nyt voidaan soveltaa edellistä päättelyä. Olkoot $m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_k$ ne indeksit m, joilla $a_m \neq 0$. Nyt siis $n - 1 \geq m_1 > m_2 > \cdots > m_k \geq 0$. Funktiolla $P^{(n)}(x)$ ei ole yhtään nollakohtaa. Ensinnäkin $P^{(n)}(0) > 0$. Jos $a_{m_1} > 0$ eli $P^{(m_1)}(0) > 0$, niin funktiolla $P^{(m_1)}$ ei ole yhtään positiivista nollakohtaa, mutta jos $a_{m_1} < 0$ eli $P^{(m_1)}(0) < 0$, niin funktiolla $P^{(m_1)}$ voi olla yksi positiivinen nollakohta. Samoin, jos a_{m_1} ja a_{m_2} ovat samanmerkkiset, $P^{(m_2)}$:n positiivisten nollakohtien määrä on enintään sama kuin $P^{(m_1)}$:n positiivisten nollakohtien määrä, kun taas a_{m_1}:n ja a_{m_2}:n erimerkkisyys sallii $P^{(m_2)}$:lle mahdollisesti yhden nollakohdan enemmän kuin mitä $P^{(m_1)}$:llä on. Mutta nämä havainnot on helppo muuttaa induktiotodistukseksi sille, että merkinvaihtojen määrä jonossa $(1,\, a_{m_1},\, a_{m_2},\, \ldots,\, a_{m_k})$ antaa enimmäismäärän polynomin P positiivisten nollakohtien määrälle. Descartesin merkkisäännön positiivisia nollakohtia koskevalle osalle on saatu perustelu.

Negatiivisten juurien lukumäärää koskevasta osuudesta selviämme helpommin. Polynomin $P(x)$ negatiiviset juuret ovat polynomin $Q(x) = P(-x)$ positiivisia juuria. Siitä, miten etumerkki käyttäytyy parillisessa ja parittomassa potenssissa seuraa, että jos kaikki kertoimet a_k ovat $\neq 0$, niin jokaisesta kahdesta peräkkäisestä P:n samanmerkkisestä kertoimesta tulee kaksi peräkkäistä erimerkkistä Q:n kerrointa ja jokaisesta peräkkäisestä erimerkkisestä P:n kertoimesta tulee kaksi peräkkäistä samanmerkkistä Q:n kerrointa. Näin ollen Q:n kertoimien jonossa on merkinvaihto aina silloin, kun P:n kertoimien jonossa ei ole. Mutta tämä merkitsee, että Q:n positiivisten nollakohtien lukumäärä on enintään yhtä suuri kuin P:n kertoimien merkkijonossa olevien peräkkäisten samojen merkkien parien lukumäärä. Tämä perustelee Descartesin merkkisäännön negatiivisia juuria koskevan osan.

Muistutetaan vielä, että merkkisääntö antaa juurten lukumäärälle vain *ylärajan*. Juuria voi olla vähemmän. Merkkisääntö sallisi esimerkiksi polynomille

$$P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$$

viisi positiivista juurta, mutta koska $P(x) = (x-1)(x^4 + x^2 + 1)$, tällaisia juuria ei ole kuin yksi.



Frégier’n lause

Simo K. Kivelä

Kevään 2001 ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan kokeessa oli seuraava tehtävä:

> Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla $y = x^2$; suoran kulman kärki on paraabelin huipussa. Osoita, että jokaisen tällaisen kolmion hypotenuusa leikkaa paraabelin akselin samassa pisteessä. Määritä tämä piste.

Kyseessä on yleisemminkin voimassa oleva tulos, jota kutsutaan *Frégier’n lauseeksi*. Suoran kulman kärjen ei tarvitse olla paraabelin huipussa eikä käyränkään tarvitse olla paraabeli. Se voi olla mikä tahansa toisen asteen käyrä – ellipsi, paraabeli tai hyperbeli – ja suoran kulman kärki voi olla mikä tahansa sen piste. Tällöin kolmion hypotenuusa kulkee aina saman pisteen kautta. Paraabelin akselia vastaa tällöin sellainen käyrän normaali, joka kulkee suoran kulman kärkipisteen kautta. Yleinen Frégier’n lause kuuluu siten seuraavasti:

> Olkoon P toisen asteen käyrällä sijaitseva piste ja olkoot PA ja PB kaksi tämän pisteen kautta kulkevaa toisiaan vastaan kohtisuoraa käyrän jännettä. Tällöin on olemassa kiinteä piste Q, jonka kautta suora AB kulkee riippumatta siitä, missä asennossa jänteet PA ja PB ovat. Piste Q sijaitsee pisteeseen P asetetulla käyrän normaalilla.

Kuva tilanteesta ellipsitapauksessa on edempänä.

Frégier’n lauseen todistus voi perustua analyyttiseen geometriaan. Ylioppilastehtävässä tämä on hyvinkin yksinkertainen, mutta esimerkiksi ellipsitapauksessa laskuista tulee jonkin verran hankalia. Tämän johdosta on luontevaa käyttää hyväksi jotakin symbolisen laskennan ohjelmaa, jolloin ei tarvitse huolehtia monimutkaisista sievennyksistä ja näissä herkästi syntyvistä virheistä. Ei symbolisten ohjelmienkaan käyttö ongelmatonta ole: niillä on omat heikkoutensa, joita on opittava varomaan.

Seuraavassa esitetään Frégier’n lauseen todistus ellipsitapauksessa Mathematica-nimistä symbolista ohjelmaa käyttäen, jolloin mekaaniset laskut voidaan antaa ohjelman tehtäviksi. Itse asiassa tämä kirjoitus on kokonaisuudesaan laadittu Mathematican avulla; se nimittäin sisältää myös ainakin jonkintasoiset mahdollisuudet tekstinkäsittelyyn ja matemaattisten kaavojen kirjoittamiseen.

Todistus

Tarkasteltavana oleva ellipsi voidaan sijoittaa origokeskiseksi, ilman että probeemaa mitenkään rajoitetaan. Muodostetaan siis aluksi origokeskisen ellipsin yhtälö ja talletetaan tämä nimelle `ellipsi`:

```
ellipsi = x^2 / a^2 + y^2 / b^2 == 1
```

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} == 1$$

Lauseessa esiintyvä piste P valitaan ellipsin kehältä. Jokainen kehäpiste voidaan esittää muodossa $(a\cos t, b\sin t)$. Tässä t on ns. parametri, joka voi saada arvot väliltä $0 \leq t < 2\pi$; tällöin jokainen kehäpiste tulee huomioiduksi. Annetaan pisteen koordinaateille lyhyemmät nimet `x0` ja `y0`, jolloin niihin on helpompi myöhemmin viitata.

```
{x0, y0} = {a Cos[t], b Sin[t]}

{a Cos[t], b Sin[t]}
```

Pisteen koordinaatit voidaan sijoittaa ellipsin yhtälöön, jolloin se todellakin toteutuu:

```
ellipsi /. {x -> x0, y -> y0} // Simplify

True
```

Tämän pisteen kautta asetetaan kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa suoraa. Annetaan näiden yhtälöt vektorimuodossa, jolloin niitä on näppärää käsitellä. Vektorit esitetään Mathematicassa kahden alkion listoina, esimerkiksi $2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ muodossa `{2,3}`. Koska suorat ovat kohtisuoria, tulee niiden suuntavektoreiden skalaaritulon olla $= 0$. Jos suuntavektorit kirjoitetaan muotoon `{p,q}` ja `{-q,p}` tämä ehto täyttyy, mutta muulla tavoin ei suorien suuntia ole rajoitettu. Vektoriesityksessä tarvittava parametri olkoon u:

```
suora1 = {x, y} == {x0, y0} + u {p, q}

{x, y} == {p u + a Cos[t], q u + b Sin[t]}

suora2 = {x, y} == {x0, y0} + u {-q, p}

{x, y} == {-q u + a Cos[t], p u + b Sin[t]}
```

Etsitään erikseen kummankin suoran ja ellipsin leikkauspisteet. Näitä on kummassakin tapauksessa kaksi ja niistä toinen on luonnollisesti ellipsillä oleva piste P eli `{x0,y0}`, jonka kautta suorat asetettiin. Ratkaisujen sieventäminen edellyttää useampaa sievennyskäskyä peräkkäin aseteltuina:
`//FullSimplify//PowerExpand//FullSimplify` :

```
ratk1 = Solve[{ellipsi, suora1}, {x, y, u}] // FullSimplify //
   PowerExpand // FullSimplify
```

$$\Big\{\Big\{u \to -\frac{2\,a\,b\,(b\,p\,\mathrm{Cos}[t] + a\,q\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,p^2 + a^2\,q^2},$$
$$x \to \frac{a\,((-b^2\,p^2 + a^2\,q^2)\,\mathrm{Cos}[t] - 2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,p^2 + a^2\,q^2},$$
$$y \to \frac{b\,(-2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Cos}[t] + (b\,p - a\,q)\,(b\,p + a\,q)\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,p^2 + a^2\,q^2}\Big\},$$
$$\{u \to 0,\ x \to a\,\mathrm{Cos}[t],\ y \to b\,\mathrm{Sin}[t]\}\Big\}$$

```
ratk2 = Solve[{ellipsi, suora2}, {x, y, u}] // FullSimplify //
   PowerExpand // FullSimplify
```

$$\Big\{\{u \to 0,\ x \to a\,\mathrm{Cos}[t],\ y \to b\,\mathrm{Sin}[t]\},\ \Big\{u \to \frac{2\,a\,b\,(b\,q\,\mathrm{Cos}[t] - a\,p\,\mathrm{Sin}[t])}{a^2\,p^2 + b^2\,q^2},$$
$$x \to \frac{a\,((a\,p - b\,q)\,(a\,p + b\,q)\,\mathrm{Cos}[t] + 2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Sin}[t])}{a^2\,p^2 + b^2\,q^2},$$
$$y \to \frac{b\,(2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Cos}[t] + (-a^2\,p^2 + b^2\,q^2)\,\mathrm{Sin}[t])}{a^2\,p^2 + b^2\,q^2}\Big\}\Big\}$$

Edellisessä tapauksessa edellinen ratkaisu antaa etsityn pisteen. Jälkimmäisessä tapauksessa tämä on jälkimmäinen. Talletetaan saatujen toisten leikkauspisteiden A ja B koordinaatit omille nimilleen:

```
{x1, y1} = {x, y} /. First[ratk1]
```

$$\Big\{\frac{a\,((-b^2\,p^2 + a^2\,q^2)\,\mathrm{Cos}[t] - 2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,p^2 + a^2\,q^2},$$
$$\frac{b\,(-2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Cos}[t] + (b\,p - a\,q)\,(b\,p + a\,q)\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,p^2 + a^2\,q^2}\Big\}$$

```
{x2, y2} = {x, y} /. Last[ratk2]
```

$$\Big\{\frac{a\,((a\,p - b\,q)\,(a\,p + b\,q)\,\mathrm{Cos}[t] + 2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Sin}[t])}{a^2\,p^2 + b^2\,q^2},$$
$$\frac{b\,(2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Cos}[t] + (-a^2\,p^2 + b^2\,q^2)\,\mathrm{Sin}[t])}{a^2\,p^2 + b^2\,q^2}\Big\}$$

Saatujen pisteiden kautta kulkeva suora on kolmion hypotenuusan määräämä suora. Muodostetaan sille tavanomainen x- ja y-koordinaatit sitova yhtälö:

```
hypo = y - y1 == (y2 - y1) / (x2 - x1) (x - x1)
```

$$y - \frac{b\,(-2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Cos}[t] + (b\,p - a\,q)\,(b\,p + a\,q)\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,p^2 + a^2\,q^2} ==$$
$$\Bigg(\Big(x - \frac{a\,((-b^2\,p^2 + a^2\,q^2)\,\mathrm{Cos}[t] - 2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,p^2 + a^2\,q^2}\Big)$$
$$\Big(-\frac{b\,(-2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Cos}[t] + (b\,p - a\,q)\,(b\,p + a\,q)\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,p^2 + a^2\,q^2}$$
$$\frac{b\,(2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Cos}[t] + (-a^2\,p^2 + b^2\,q^2)\,\mathrm{Sin}[t])}{a^2\,p^2 + b^2\,q^2}\Big)\Bigg) \Big/$$
$$\Big(-\frac{a\,((-b^2\,p^2 + a^2\,q^2)\,\mathrm{Cos}[t] - 2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,p^2 + a^2\,q^2} +$$
$$\frac{a\,((a\,p - b\,q)\,(a\,p + b\,q)\,\mathrm{Cos}[t] + 2\,a\,b\,p\,q\,\mathrm{Sin}[t])}{a^2\,p^2 + b^2\,q^2}\Big)$$

Lukija saattaa ihmetellä, miksi toisinaan suoralle käytetään vektorimuotoista, toisinaan xy-muotoista yhtälöä. Molemmat ovat periaatteessa yhtä hyviä. Edellä olevat valinnat on tehty tavoitteena mahdollisimman yksinkertaiset ja toisaalta symbolisen ohjelman käyttömahdollisuuksia mahdollisimman hyvin valaisevat laskut.

On ehkä aika piirtää tilanteesta kuvio. Tätä varten on aluksi ladattava Mathematican lisäpaketti:

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
```

Piirtämistä varten muodostetaan suorille PA ja PB xy-muotoiset yhtälöt eliminoimalla vektoriesityksestä parametri:

```
suora1xy = Eliminate[suora1, u]
```

```
p y + a q Cos[t] - b p Sin[t] == q x
```

```
suora2xy = Eliminate[suora2, u]
```

```
-q y + a p Cos[t] + b q Sin[t] == p x
```

Kuvio piirretään seuraavilla lukuarvoilla:

```
lukuarvot = {a -> 3, b -> 2, t -> 1.2, p -> 2, q -> 3}
```

```
{a → 3, b → 2, t → 1.2, p → 2, q → 3}
```

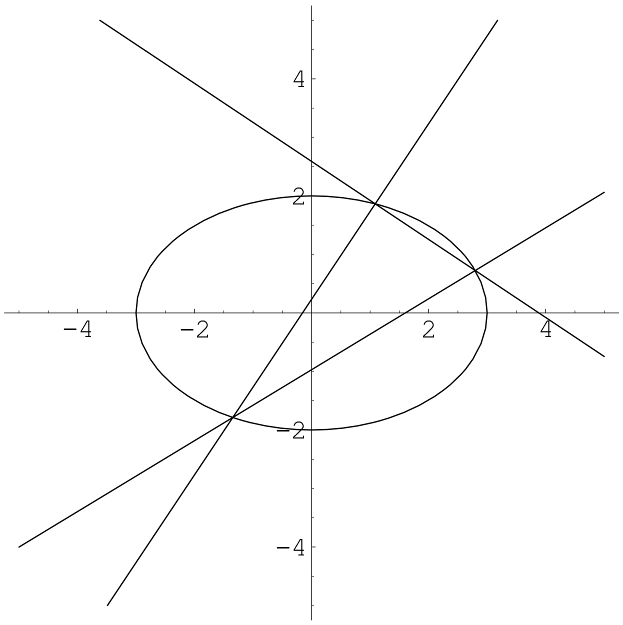
Lähtökohtana oleva piste P on tällöin

```
{x0, y0} /. lukuarvot
```

```
{1.08707, 1.86408}
```

Tämän jälkeen voidaan piirtää itse kuva:

```
kuva1 = ImplicitPlot[
  Evaluate[{ellipsi, suora1xy, suora2xy, hypo} /. lukuarvot],
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



Frégier'n lause väittää, että hypotenuusasuora kulkee aina saman pisteen kautta riippumatta kohtisuorien suorien asennosta. Miten tämä piste voidaan löytää?

Yhtenä mahdollisuutena on toistaa edellä oleva lasku siten, että suorien PA ja PB suunnat ovat erilaiset (mutta edelleen toisiaan vastaan kohtisuorat), jolloin saadaan jokin toinen hypotenuusasuora. Kahden hypotenuusasuoran leikkauspisteestä saadaan ainakin sopiva ehdokas etsityksi pisteeksi.

Uudet suuntavektorit olkoot **`{r,s}`** ja **`{-s,r}`**. Uusi hypotenuusasuora saadaan hyvin yksinkertaisesti: korvataan aiemmassa hypotenuusasuorassa vanhat suuntavektorin komponentit uusilla:

```
hypo2 = hypo /. {p -> r, q -> s}
```

$$y-\frac{b\,(-2\,a\,b\,r\,s\,\mathrm{Cos}[t]+(b\,r-a\,s)\,(b\,r+a\,s)\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,r^2+a^2\,s^2} == \left(\left(x-\frac{a\,((-b^2\,r^2+a^2\,s^2)\,\mathrm{Cos}[t]-2\,a\,b\,r\,s\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,r^2+a^2\,s^2}\right)\left(-\frac{b\,(-2\,a\,b\,r\,s\,\mathrm{Cos}[t]+(b\,r-a\,s)\,(b\,r+a\,s)\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,r^2+a^2\,s^2}\;\frac{b\,(2\,a\,b\,r\,s\,\mathrm{Cos}[t]+(-a^2\,r^2+b^2\,s^2)\,\mathrm{Sin}[t])}{a^2\,r^2+b^2\,s^2}\right)\right) \Big/ \left(-\frac{a\,((-b^2\,r^2+a^2\,s^2)\,\mathrm{Cos}[t]-2\,a\,b\,r\,s\,\mathrm{Sin}[t])}{b^2\,r^2+a^2\,s^2}+\frac{a\,((a\,r-b\,s)\,(a\,r+b\,s)\,\mathrm{Cos}[t]+2\,a\,b\,r\,s\,\mathrm{Sin}[t])}{a^2\,r^2+b^2\,s^2}\right)$$

Tämän jälkeen voidaan ratkaista hypotenuusasuorien leikkauspiste ja sievennetään se:

```
ratk = Solve[{hypo, hypo2}, {x, y}]

piste = {x, y} /. ratk[[1]] // Simplify
```

$$\left\{\frac{a\,(a^2-b^2)\,\mathrm{Cos}[t]}{a^2+b^2},\ \frac{b\,(-a^2+b^2)\,\mathrm{Sin}[t]}{a^2+b^2}\right\}$$

Sieventämättömänä tulos on monimutkainen[1], mutta se sievenee yllättäen sangen yksinkertaiseen muotoon. Lopputulos näyttää lisäksi olevan riippumaton suuntavektoreiden komponenteista `p`, `q`, `r` ja `s`. **Mutta tämä merkitsee, että Frégier'n lause on tullut todistetuksi:** On löytynyt kahdella hypotenuusasuoralla sijaitseva piste, joka ei riipu lähtökohtana olleista suuntavektoreista; se siis sijaitsee hypotenuusasuoralla valittiinpa suuntavektorit miten tahansa!

Ratkaisu ei luonnollisestikaan mene edellä esitetyllä tavalla, jos `p = r` ja `q = s`. Tätä ei laskussa ole mitenkään suljettu pois. Mathematica kuitenkin käsittelee tällaisessa tilanteessa ns. geneeristä tapausta, ts. tapausta, missä mitään rajoittavia erikoisehtoja ei vallitse. Itse asiassa oletetaan siis `p ~= r`, `q ~= s`.

Lukija miettiköön, mistä seuraa, että löydetty piste on pisteen P kautta kulkevalla ellipsin normaalilla. Solmun verkkoversiossa oleva animaatio antanee ainakin viitteitä.

Esimerkkitapauksessa hypotenuusasuorien leikkauspiste on

```
numpiste = piste /. lukuarvot

{0.418105, -0.716953}
```

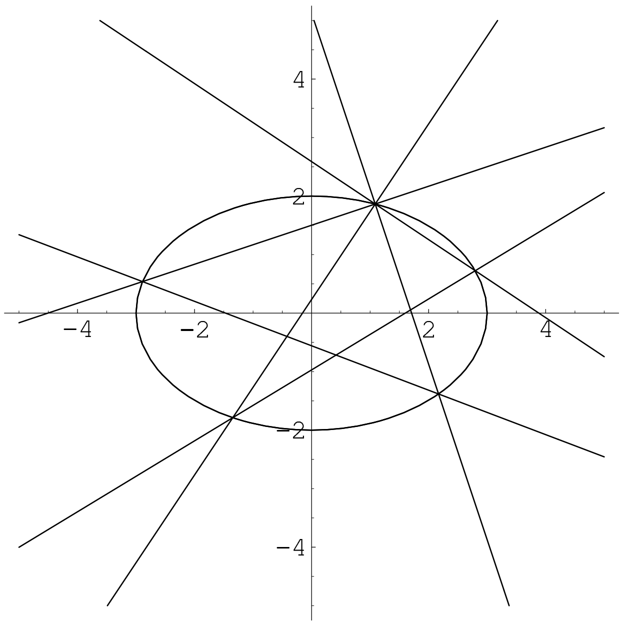
[1] Tämän voi todeta Solmun verkkoversiosta.

Tilanteesta saadaan havainnollisempi kuva piirtämällä kaksi keskenään kohtisuoraa suoraparia, näitä vastaavat hypotenuusasuorat ja hypotenuusasuorien leikkauspiste:

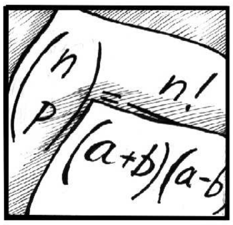
```
lukuarvot2 = {a -> 3, b -> 2, t -> 1.2, p -> 3, q -> 1}

{a → 3, b → 2, t → 1.2, p → 3, q → 1}

kuva2 = ImplicitPlot[
   Evaluate[{ellipsi, suora1xy, suora2xy, hypo} /. lukuarvot2],
   {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, DisplayFunction → Identity];
Show[kuva1, kuva2, Graphics[{PointSize[0.03], Point[numpiste]}]]
```



Solmun verkkoversiossa asiaa havainnollistetaan myös animaatiolla.



Sairaanhoitajatkin tarvitsevat matematiikkaa

Marjatta Näätänen
Dosentti, matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

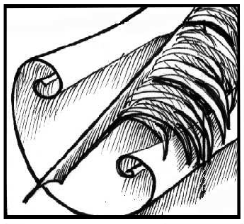
Hoitoalalle aikovat tytöt – samoin kuin pojatkin – luulevat, ettei matematiikan tietoja tarvita enää koulun jälkeen ja saattavat siksi laiminlyödä koulussa matematiikan opiskelun. Ammattikorkeakoulussa he ovat hämmästyneitä, kun matematiikka tuleekin heitä vastaan. Vaikeudet voivat silloin olla niin suuret, että valmistuminen jää kiinni lääkelaskuista.

Viime aikoina on ammattikorkeakouluille tullut sairaaloista yhä enemmän viestejä tyyliin: "Millaisia hoitajia te oikein koulutatte?! Tehostakaa lääkelaskujen oppimista, hoitajat eivät osaa niitä!" Tässä vaiheessa opintoja ei kuitenkaan enää voida alkaa käydä läpi koulukurssia, vaan sen oppimisen aika oli jo koulussa.

Esimerkiksi kirurgisen osaston hoitaja vastaa lääkityksen jakamisesta. Potilaita voi olla kymmeniä, lääkitys on annettava nopeasti ja täsmällisesti. Laskutulosten virheettömyyttä ei ennätä eikä voi tarkistuttaa muilla, vaan siitä on hoitajan itse vastattava. Teho-osastolla on kyse potilaan hengestä. Lääkelaimennukset ja tiputuksen nopeus on osattava laskea päässä äkkiä ja oikein. Myös oikean tuloksen suuruusluokka olisi osattava vaikka puoliunessa – tiputettavan nesteen määrä ei voi olla litroja eikä vahvan lääkkeen grammoja – muuten menee potilaalta henki.

Lääkelaskuissa tulee osata soveltaa erilaisia laskemisen tapoja nopeasti ja oikein. Potilaan henki voi olla vaarassa, jos lääkkeen annostelussa tapahtuu virhe. Kiivaassa työrytmissä ei ole juuri aikaa käytettäväksi varsinaisiin laskutoimituksiin. Lääkelaskuissa tarvittavat laskutaidot eivät vaadi matemaattista erityisosaamista, vaan tietoja ja taitoja, joita jokaisella koulutetulla kansalaisella on tärkeää olla. Korkeakouluopiskelijoiden osaamiseen tulisi myös hoitoalalla liittyä matemaattista osaamista sekä matemaattista "lukutaitoa", jotta he pystyvät ymmärtämään lääkitystä ja suorittavat lääkkeiden annosteluun liittyvät laskutehtävät oikein.

Myös opiskelijat ovat huomanneet puutteen, ja jotkut heistä ovat toivoneet lisää matematiikkaa koulutukseen. Koulukurssin tietojen oppimisen paikka ja aika oli kuitenkin jo koulussa. Jos matematiikan pohja on alusta alkaen hatara, ei "täsmäpaikkaus" myöhemmin onnistu, vaan tulosten saamiseksi tulisi aloittaa alusta jotta saadaan kestävä pohja, jolle voi rakentaa jatkoa. Tässä suhteessa matematiikka eroaa monista muista aineista: asiat perustuvat aikaisemmin opittujen ymmärtämiseen.



Matemaattis-luonnontieteelliset aineet ovat nyt ympäristöoppimme

Nokian tutkimusjohtaja *Juhani Kuusi* kertoi Solmulle käsityksiään matematiikan merkityksestä, niitä kirjasi *Marjatta Näätänen*:

On aivan virheellinen käsitys, että vain jotkut pitkälle erikoistuneet ammattilaiset tai tutkijat tarvitsisivat matemaattis-luonnontieteellistä pohjakoulutusta. Päinvastoin, nykyisin kaikki tarvitsevat näiden alojen perustietoja. Niillä on samantapainen asema kuin aikaisemmin ympäristöopilla: ne ympäröivät meitä nyky-yhteiskunnassa kaikilla tahoilla, vaikka emme sitä aina selvästi huomaisikaan.

Matematiikka on opittava nuorena, asenne siihen on hyvin tärkeä. Koneet eivät tee matematiikan opiskelua tarpeettomaksi, sillä matematiikka ei ole laskentoa, vaan paremminkin loogisen ajattelun oppimista. Koulun alkuopetuksessa rakennetaan perusta ja muodostetaan asenteet, samoin varsinaisen opiskelun alkuvuodet ovat tärkeitä ja silloin on tärkeää saada hyvää opetusta – ja mielellään vaikuttavilta opettajapersoonallisuuksilta.

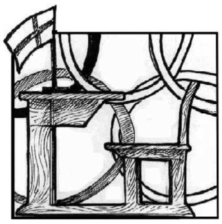
Koulussa tehdään peruuttamattomia päätöksiä, joilla tytöt sulkevat pois monia aloja myöhemmistä opiskelumahdollisuuksistaan. Esimerkiksi tietotekniikan kehittäminen sopisi erittäin hyvin tytöille; nyt he ajautuvat valitsemillaan naisvaltaisilla aloilla tietotekniikan käyttäjiksi, mutta eivät tietotekniikka-alan kehittäjiksi. Naiset sopisivat erittäin hyvin alalle, jolla etuja olisivat sellaiset ominaisuudet kuin äly, tarkkaavaisuus, sitkeys ja kiinnostus arkielämän tasolla toimimiseen.

Nokian tutkimuskeskuksissa on töissä 1200 henkilöä ympäri maailman. Heistä 55 % on Helsingissä, 20 % Tampereella ja 25 % ulkomailla seuraavissa kaupungeissa: Dallas, Boston, Mountain View Kaliforniassa, Peking, Tokio, Bochum ja Budapest. Tällä hetkellä Suomessa Nokian tutkimuslaitoksissa työskentelevistä on ulkolaisia neljäsosa. Kansallisuuksia on 37, näistä suurimmat ryhmät ovat kiinalaiset ja intialaiset. Rekrytointi on erittäin valikoivaa; ympäri maailmaa tulee tarjouksia nuorilta tohtoritasoisilta henkilöiltä, jotka ovat lukeneet nokialaisten tutkimuksia ja kirjoituksia. Nokialla voi tutkijana toiminut siirtyä yhtiön sisällä myös liiketoimintayksiköihin. Näin tekeekin 5–10 %, ja aina firman huipulle asti on mahdollista edetä. Hyvä matemaattinen pohja ei suinkaan sulje pois liike-elämän puolella etenemistä, päinvastoin. Nykyisin asiat tapahtuvat liike-elämässä hyvin nopeasti, samanaikaisesti on tehtävä sekä päätöksiä että perustyötä. Loogista ajattelua ja näkemystä tarvitaan entistä enemmän. Historiasta tunnettuja esimerkkejä laaja-alaisesti toimivista tiedemiehistä ovat vaikka Sokrates ja Pythagoras, aikansa merkittäviä valtiomiehiä.

On äärettömän tärkeää saada matemaattis-luonnontieteelliset perustiedot. Ne takaavat pohjan, jolta kyvykäs henkilö voi tehdä mitä vain. Jos taas perustiedot puuttuvat, on jo yhteiskunnan yleisellä tasolla suuri määrä asioita, joihin ei voi ottaa kantaa.

Nokian johto korostaakin julkisuudessa esiintyessään opetustoimen merkitystä, se tulisi saada jälleen kunniaan. Koulu on oppilaan työpaikka eikä viihdyttäjä; kuten Marimekon Kirsti Paakkanen napakasti totesi: "Työpaikka ei ole mikään klubi".

Koululaisten harteille ei voida sälyttää päätöksiä, joihin he eivät ole vielä kypsiä, sillä he eivät voi tehdä valintoja asioista, joita eivät tiedä. Päättäminen on luovutettava niille, joilla on tarpeellinen tieto ja joihin voi luottaa. Tärkeitä perusaineita on useita, mutta erilaiset harrastukset olisi erotettava perusaineista. Matematiikka oli vielä 1950-luvulla ylioppilaskirjoituksissa pakollinen aine, eikä se ollut mitenkään huono asia. Kunnon pohjakoulutuksen saaminen on tärkeintä, ja juuri se on koulun tehtävä. Koulussa olisi myös opittava työnteko. Presidentti Kekkonen puhui aikanaan askeesin nautinnosta, matematiikan suhteen voisi puhua oivaltamisen onnesta. Tätä olisi hyvä päästä maistamaan koulussa niin paljon, että oppisi kaipaamaan oppimisen iloa. Tämä kannustaisi ponnistelemaan.



Suomalaisryhmä matematiikkaleirillä Balatonin rannalla

Viime kesäkuussa onnistui suomalaisen koululaisryhmän osallistuminen unkarilaisten jokavuotiseen matematiikkaleiriin Balatonin rannalla. Leiri pidettiin Balatonberényissä 18.–23. 6. Unkarilaisten puolelta olivat ohjaajina suomalaisille jo tutut professorit István Hortobágyi ja András Ambrus Budapestin ELTE-yliopistosta. Suomalaiset oppilaat olivat Maunulan matematiikkalukiosta, heidän opettajanaan oli lehtori *Maija Salmela*, joka myös osallistui leirin järjestelyihin. Tässä on Maija Salmelan lyhyt kertomus matkan annista:

Terveisiä Balatonberényistä! Meillä oli hieno leiri. Oppilaat viihtyivät hyvin, kehuivat oppitunteja ja koko leiriä järjestelyineen (ihan jees reissu, matikka oli törkeen paljon hauskempaa kuin Suomessa, lähtisin mielelläni uudestaan vastaavanlaiselle matkalle, kiva kun oli niin paljon vapaata aikaa). Tosiasiassa matematiikkaa opiskeltiin reilusti yli 30 oppituntia eli yhden lukiokurssin verran, mutta jäihän sitä vapaa-aikaakin. Oppilaat työskentelivät innolla, tekivät parhaansa ja oppivat uskoakseni aika paljon hienoa matematiikkaa. Aiheet oli etukäteen sovittu ensimmäisen vuoden lukiokursseja tukeviksi, mutta käsitellyt ratkaisutavat olivat oppilaille uusia.

Suomalaisoppilaiden työskentelymenetelmä tuntui olevan hiukan vieras István Hortobágyille ja András Ambrusille: Kun opettaja antoi tehtävän, alkoi kauhea pölinä, koska oppilaat pohtivat tehtävää yhdessä. Näinhän nämä minun oppilaani ovat tottuneet työskentelemään. Unkarilaiset opettajat ilmeisesti olettivat, että kukin alkaisi heti laskea itsekseen. "Oh, they are discussing the problem", totesi András Ambrus eräällä tunnilla tehtävän annettuaan, kun hän erotti suomenkielisestä puheesta jonkin tehtävään liittyneen termin. Pölinävaiheen jälkeen tuli sitten hiljaista, kun jokainen jatkoi tehtävän työstämistä omaan paperiinsa.

Itse toimin oppitunneilla tarvittaessa tulkkina. Käsitellyt asiat olivat pääosin samoja aihepiirejä, joista István Hortobágyi luennoi toukokuussa Suomessa, joten olinpa tyytyväinen, että tuli se kevään kurssi kuunneltua kunnolla. Olin yhden askeleen verran edellä oppilaitani eli osasin myös hiukan neuvoa, en pelkästään tulkata.

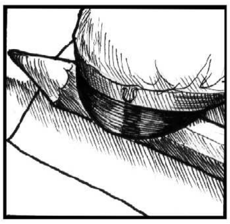
Unkarilaisiin oppilaisiin tutustuminen jäi vähäiseksi, syynä olivat kielivaikeudet (kumpikaan osapuoli kun ei osannut oikein kunnolla englantia) ja myöskin yhteisen tekemisen puute. Kun Unkariin toiste lähdetään, tämä puoli pitää miettiä ja suunnitella etukäteen. Nythän se ei ollut mahdollista, koska minulla ei ollut tietoa leirin päiväohjelmista etukäteen. Samoin leirille olennaisena osana kuuluneet matematiikka- ja urheilukilpailut jäivät suomalaisryhmälle etäisiksi, mikä johtui osittain siitä, etten osannut niistä tarpeeksi kertoa hyvissä ajoin ennen ilmoittautumista. Niitä täytyy myös mainostaa jo ennen lähtöä, koska tämäntapainen kilpailutoiminta on suomalaisille melko vierasta.

Itse pärjäsin opettajien kanssa ihan mukavasti, vaikka yhteisen kielen löytäminen oli välillä vaikeaa. Oma saksan kielitaitoni on melko olematon ja englantia eivät opettajista osanneet juuri muut kuin István Hortobágyi ja András Ambrus sekä englanninopettajat (jotka kaikki parhaansa mukaan selittivät minulle opettajainhuoneessa ollessamme englanniksi, mistä keskusteltiin). Monta hauskaa juttua ja mielenkiintoista keskustelua jäi silti ymmärtämättä, koska ne käytiin unkariksi.

Balatonissa oli mukava uida (vaikka ranta oli kyllä kovin matala), joskin unkarilaiset olivat sitä mieltä, että vesi on liian kylmää. Kolme päivää oli lisäksi aivan käsittämätön myrsky ja sateista (melkoinen kokemus), leirin alku ja loppuaika leiristä puolestaan lämmintä ja aurinkoista. István Hortobágyi oli meitä vastassa tulopäivänä ja oli järjestänyt kaiken sille päivälle ja seuraavan päivän junamatkan aivan loistavasti. Juna oli tupaten täynnä viikonlopuksi Balatonille lähteviä budapestilaisia ja jäljessä aikataulusta, mutta saimme silti jokainen istumapaikan. András Ambrus puolestaan matkusti kanssamme Balatonberényistä takaisin Budapestiin ja saattoi meidät edelleen lentokentälle. Olin todella kiitollinen tästä huolenpidosta, olinhan itsekin ensimmäistä kertaa Unkarissa. Ensi kesänä menemme jälleen.

Maija Salmela
lehtori
Helsingin matematiikkalukio

Luokkakuvassa ryhmämme opettajat professorit András Ambrus ja István Hortobágyi, leirin johtaja professori Ferenc Pintér, toinen leirin englannin opettajista ja matematiikkalukion ryhmä.



Naisten matematiikan opiskelusta Ranskassa vuosina 1801–2001

Marjatta Näätänen
Dosentti, matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Napoleon suoritti Ranskan lyseoreformin vuonna 1801. Lopputuloksena oli, että pojat saivat lyseoita, tytöt vain uskonnollista opetusta. Vuonna 1881 Jules Ferry perusti tytöille koulun, École Normale Supérieure de Jeunes Filles, jossa koulutettiin naisopettajia tyttöjen kouluihin. Sisäänpääsykoe oli vaativa. Naisopiskelijoista tuli siis opettajia, eivätkä he saaneet esimerkiksi kuunnella luentoja Pariisin yliopistossa. Naisten koulu sijaitsi Sèvresissä, ei Pariisin keskustassa. Matematiikasta kiinnostuneet lahjakkaimmat naiset saattoivat kuitenkin pyrkiä vaativan pääsykokeen kautta miehille tarkoitettuun rue d'Ulmin kouluun, École Normale Supérieure rue d'Ulm. Tätä mahdollisuutta jotkut naiset myös käyttivät.

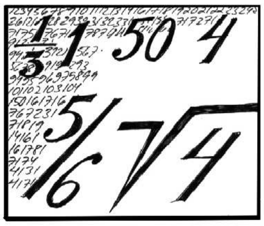
Vuonna 1938 sosialistihallitus päätti, että École Normale Supérieure de Jeunes Filles tulisi tarjoamaan tytöille samantasoisen tieteellisen koulutuksen kuin rue d'Ulmin koulu siihen asti pääosin miehille, eivätkä tytöt enää voisi päästä rue d'Ulmin kouluun. Tyttöjen koulun rehtoriksi nimitettiin huomattava fyysikko (nainen) ja hän valitsi matematiikan opettajaksi rue d'Ulmin käyneen matemaatikon, Jacqueline Ferrandin (jonka kvasikonformikuvausten alalla tekemää tutkimustyötä monet suomalaisetkin tuntevat). Reformi alkoi heti, mutta sota keskeytti sen. Sodan jälkeen 1945 uudistettu naisten koulu pääsi täyteen vauhtiin. Kouluun pääsi vain naisia ja opiskelupaikkoja oli rajoitettu määrä. Tämä koulu oli siis rinnakkainen miesten École Normale Supérieure (rue d'Ulm):ille. Näiden virallinen asema oli täsmälleen sama. Sisäänpääsytutkinto oli yliopiston toisen vuoden tasolla, tehtävät ja aineet olivat samat molemmille oppilaitoksille, taso erittäin vaativa. Opintojen sisältö oli sama: yliopistotutkinto, erityisiä kursseja ja seminaareja jotka valmistivat matematiikan eri aloihin, valmistuminen vaativaan tutkintoon, joka avasi parhaat opetusvirat ja antoi jatkomahdollisuuden tutkimuksesta kiinnostuneille. Tähän tutkintoon saattoivat osallistua myös muut naiset, nekin, jotka eivät olleet koulun kasvatteja.

Saatuaan oman, yhtä korkeatasoisen koulunsa kuin miehillä oli, naiset olivat tyytyväisiä. He sanoivat, että rue d'Ulmin koulun opiskelijoiden tuli näyttää hyvin itsevarmoilta, nopeilta ja oppineilta, eivätkä useimmat nuoret naiset pitäneet tällaisesta ilmapiiristä. Saatuaan oman koulunsa he osallistuivat mieluummin omiin matematiikan seminaareihinsa, vaikka olisivat voineet osallistua miesten seminaareihin. Toinen huomiota kiinnittävä seikka Ranskan naismatemaatikkojen suhteen on, että paljon yli puolet niistä, jotka päätyivät yliopiston opettajatasolle, menivät naimisiin samantasoisen miesmatematikon kanssa. Viime aikoina on myös naimattomien tai eronneiden naisten määrä lisääntynyt.

Sodan aikana tuli matemaatikon yliopistovirkoja avoimeksi miesten ollessa sotavankeina, sotaa paossa tai taistelemassa. Tällöin muutamat naiset aloittivat yliopistouransa. Myöhemmin yliopistot laajenivat. Silloin, kun työntekijöitä tarvitaan, yhteiskunta värvää myös naisia. Ranskassa on kansainvälisesti katsottuna melko paljon naisia yliopistoissa. Seuraavat seikat on kuitenkin huomattava: naisten osuus suurissa laitoksissa on pienempi kuin pienissä (joissa matemaattinen elämä ei ole yhtä mielenkiintoista); naisia on enemmän alemmissa tehtävissä yliopistoissa; kun yliopistot eivät enää laajenneet, oli naisten miehiä vaikeampi vaikea löytää yliopisto- tai tutkimustyötä.

Vuonna 1986 lopetettiin tasa-arvokeskustelun jälkeen poliittisista syistä naisten oma École Normale Supérieure. Nais- ja miesopiskelijoiden tuli osallistua samaan sisäänpääsykokeeseen yhdessä ja opiskella samassa École Normale Supérieuressa. Kokemukset ovat kuitenkin olleet odottamattomia: Matematiikassa sisäänpäässeiden naisten määrä romahti. Kymmenen vuoden aikana pääsi tähän eliittikouluun matematiikkaa opiskelemaan keskimäärin 40 miestä, naisten keskiarvo oli 4. (Aikaisemmat luvut olivat olleet 15 naista, 30 miestä).

Tämän epäonnistumisen syistä keskustellaan, mutta niistä ei ole yksimielisyyttä.



Kompleksiluvuista ja kvaternioista

Jorma Merikoski
Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto

1 Johdanto

Nykyisessä koulumatematiikassa kompleksiluvut vain mainitaan ohimennen jos sitenkään. (Analyysin syventävällä kurssilla niitä saatetaan käsitellä enemmän, ks. [MVLS].) Niille *Solmun* lukijoille, jotka eivät ollenkaan tunne kompleksilukuja, riittää tämän kirjoituksen ymmärtämiseksi seuraava esitieto. Kuvitellaan, että on olemassa *imaginaariyksikkö* i (imaginaarinen = kuviteltu, näennäinen < lat. imaginarius < imago = kuva), jolla on kummallinen ominaisuus $i^2 = -1$, ja, mikä on ehkä vieläkin kummallisempaa, että luvun i ja reaalilukujen välillä voidaan suorittaa laskutoimituksia. Näin syntyy *kompleksiluku* $z = x + yi$, missä x ja y ovat reaalilukuja.

2 "Väärät" ja "mahdottomat" luvut

Matematiikan historiassa jokainen lukukäsitteen laajennus on vaatinut vuosisatoja aikaa ja aiheuttanut paljon hämmennystä ja kritiikkiä. Descartesin[1] mielestä [EHH, s. 19] negatiiviluvut olivat "vääriä lukuja", kun taas Stifelin[2] mielestä [EHH, s. 33] irrationaaliluku ei ollut "oikea luku". Kompleksilukuja kutsuttiin alunperin "mahdottomiksi luvuiksi" (quantitates impossibiles) [EHH, s. 55]. Cardano[3] käytti negatiiviluvun neliöjuurelle nimitystä "muodollinen luku" (quantitas sophistica) [EHH, s. 57].

Klinen [Kl, s. 253] mukaan Cardano piti kirjassaan *Ars Magna* kompleksiluvuilla laskemista jopa "henkisenä kidutuksena" kirjoittamalla: "Kiinnittämättä huomiota asian vaatimaan henkiseen kidutukseen, kerro keskenään $5 + \sqrt{-15}$ ja $5 - \sqrt{-15}$; tulos on $25 - (-15)$ eli 40". Ebbinghaus ja kumppanit [EHH, s. 57] ovat kuitenkin eri mieltä Klinen käännöksestä. Heidän mukaansa alkuperäistekstin "dismissis incruciationibus" tarkoittaakin vain sitä, että imaginaariset termit kumoutuvat. He jatkavat (erittäin vapaasti suomennettuna ja lyhennettynä): "Olisi houkuttelevaa lukea nämä sanat sanaleikkinä, jolla olisi myös 'henkisen kidutuksen huomiotta jättämisen' merkitys, mutta tämä tulkinta ei todennäköisesti ole oikeutettu".

Cardano piti negatiivilukujen neliöjuuria koskevia tutkimuksiaan "yhtä hienostuneina kuin hyödyttöminä" [Bo, s. 405, Kl, s. 253], mutta jo Leibniz[4] oli jälkimmäisestä eri mieltä kirjoittamalla [EHH, s. 55]: "Ex irrationalibus oriuntur quantitates impossibiles seu imaginarie, quarum mira est natura, et tamen non contemnenda utilitas" (Irrationaaliluvuista ovat syntyneet mahdottomat eli kuvitellut luvut, joiden luonne on hyvin omituinen, mutta joiden hyödyllisyyttä ei pidä väheksyä).

(Cardano oli monessa mukana [Bo, EHH, Ev, Kl, Le1, Le2, Sa]. Hän mm. joutui vankilaan laadittuaan Jeesuksen horoskoopin [EHH, s. 57; Ev, s. 221]. Stifelkin oli monessa mukana ja hänkin kävi vankilassa. Hän oli nimittäin "laskenut", että maailmanloppu tulee 3. 10. 1533, ja kun se ei tullutkaan, hänen oli paettava vankilaan niitä talonpoikia, jotka hän oli saanut luopumaan omaisuudestaan taivaaseenpääsyn takia [Ev, s. 217].)

3 "Oikeat" luvut

Kompleksilukujen haltuunotto ei siis ehkä vaatinutkaan "henkistä kidutusta", mutta sitäkin enemmän työtä. Tämän työn tärkeän välivaiheen toteutti Hamilton[5], kun hän 1835 määritteli "oikeat" kompleksiluvut täsmällisesti *järjestettyinä reaalilukupareina*. Lukija voi nyt tehdä samoin. Ajattele sinulla olevan epämääräistä tietoa kompleksiluvuista sen verran kuin johdannossa on sanottu. Laske summa $(x+yi)+(z+ui)$ ja tulo $(x+yi)(z+ui)$ kuvittelemalla, että kaikki tavanomaiset laskusäännöt ovat voimassa. Samasta reaaliluku x "reaalisen kompleksiluvun" $(x,0)$ kanssa ja "puhdas imaginaariluku" yi "puhtaasti imaginaarisen kompleksiluvun" $(0,y)$ kanssa. Näin voit Hamiltonin tapaan määritellä kompleksiluvut järjestettyinä reaalilukupareina, joille määritellään yhteenlasku

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$$

ja kertolasku

$$(x,y)(u,v)=(xu-yv,xv+yu).$$

Pääset kompleksiluvun tavanomaiseen esitysmuotoon huomaamalla, että

$$(x,y)=(x,0)(1,0)+(y,0)(0,1)=x1+yi=x+yi,$$

missä $1=(1,0)$ ja $i=(0,1)$.

Kompleksiluvut, tason pisteet ja tason vektorit vastaavat siis täysin toisiaan. On selvää, että kompleksilukujen yhteenlasku vastaa vektorien yhteenlaskua, ja on helppo osoittaa, että kompleksiluvun kertominen kompleksiluvulla $\cos\theta+i\sin\theta$ vastaa vektorin kiertämistä kulman θ verran.

Voidaan todistaa, että kaikki reaalilukujen yhteen- ja kertolaskun perusominaisuudet (vaihdantalait, liitäntälait, osittelulaki, nollan ominaisuus yhteenlaskussa, vastaluvun olemassaolo, ykkösen ominaisuus kertolaskussa, nollasta eroavan luvun käänteisluvun olemassaolo) ovat voimassa myös kompleksilukujen yhteen- ja kertolaskulle. Toisin sanoen kompleksiluvut (kuten myös rationaaliluvut ja reaaliluvut) muodostavat *kunnan*.

Mutta voidaanko järjestettyjen reaalilukuparien joukossa $\mathbb{R}^2$ määritellä kertolasku *jollakin muulla tavalla* niin, että saadaan kunta, kun yhteenlasku on määritelty vektorien yhteenlaskuna?

Ei voida millään olennaisesti erilaisella tavalla [EHH, s. 68; NP, s. 16]. Yksinkertainen tapa $(x,y)(u,v)=(xu,yv)$ ei onnistu. Nimittäin tällöin ykkösalkio (siis se, jolla kerrottaessa luku ei muutu) on $(1,1)$, joten esimerkiksi alkiolla $(1,0)$ ei ole käänteisalkiota, sillä $(1,0)(x,y)=(1,1)$ ei ole koskaan voimassa.

4 Miten jatketaan

Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ laajennettiin kokonaislukujen joukoksi $\mathbb{Z}$, jotta yhtälöllä $a+x=b$ olisi aina ratkaisu. Joukko $\mathbb{Z}$ laajennettiin rationaalilukujen joukoksi $\mathbb{Q}$, jotta yhtälöllä $ax=b \quad (a\neq 0)$ olisi aina ratkaisu. Eräs syy laajentaa joukko $\mathbb{Q}$ reaalilukujen joukoksi $\mathbb{R}$ oli, että yhtälöllä $x^2=a \quad (a\geq 0)$ olisi aina ratkaisu. Joukko $\mathbb{R}$ laajennettiin kompleksilukujen joukoksi $\mathbb{C}$, jotta yhtälöllä $x^2=-1$ olisi ratkaisu.

Kaikkien laajennusten $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ motiivina on siis ollut tarve saada tietyt yhtälöt ratkeaviksi. Siksi on johdonmukaista kysyä, mitkä kompleksialueella ratkeamattomat yhtälöt kannattaa ottaa uuden laajennuksen lähtökohdiksi, mutta tällaisia yhtälöitä ei ole. Nimittäin laajennus $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ onnistui yli odotusten sikäli, että *jokaisella n. asteen kompleksikertoimisella polynomiyhtälöllä* ($n \geq 1$) *on ratkaisu*. Tämän tärkeän *algebran peruslauseen* [EHH, luku 4; NP, s. 39, 156] todisti Gauss[6] väitöskirjassaan 1799. Ratkaisuja on täsmälleen n, kun kukin ratkaisu otetaan mukaan niin monta kertaa kuin sen kertaluku osoittaa.

Monet muutkin yhtälöt käyttäytyvät kompleksialueella miellyttävästi. Nimittäin mielenkiintoisen ja syvällisen *Picardin lauseen* [NP, s. 167, 373] mukaan jokainen kaikkialla määritelty ja derivoituva kompleksimuuttujan kompleksifunktio, joka ei ole vakio, *saa kaikki arvot paitsi mahdollisesti yhtä*. Esimerkiksi kompleksinen eksponenttifunktio $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, missä $z = x + yi$, saa kaikki muut arvot paitsi arvon 0. Ei kuitenkaan ole järkevää marssittaa matemaattiselle näyttämölle jotakin kummallista uutta otusta, joka tekee tämän funktion nollaksi. Siksi laajennus $\mathbb{C} \to$ **?** täytyy tehdä muulla perusteella.

Koska kompleksiluvut määritellään järjestettyinä reaalilukupareina, niin tuntuu luonnolliselta tutkia seuraavaksi *järjestettyjä reaalilukukolmikkoja* eli geometrisesti ajatellen kolmiulotteisen avaruuden pisteitä tai sen vektoreita. Tarkastelemme siis kysymystä, voidaanko järjestettyjen reaalilukukolmikkojen joukossa $\mathbb{R}^3$ määritellä kertolasku niin, että saadaan kunta, kun yhteenlasku on määritelty vektorien yhteenlaskuna. (Yksinkertaisesti alkioittain kertomalla sitä ei voida tehdä, vrt. kohdan 3 loppu.)

5 Mitä Hamilton kaiversi siltaan 16. 10. 1843

Hamilton mietti viisitoista vuotta kysymystä siitä, miten kolmiulotteisille vektoreille voitaisiin määritellä kertolasku, jolla olisi yhteys vektorin kiertoon. Myöhemmin hän kirjoitti pojalleen [EHH, s. 189]: "Joka aamu, kun tulin aamiaiselle, sinulla oli tapana kysyä: 'Isä, joko sinä osaat kertoa kolmikoita?'. Minun oli aina pudistettava surullisesti päätäni ja sanottava: 'En osaa; minä osaan vain laskea niitä yhteen ja vähentää'".

Vihdoin Hamilton onnistui. Hän kuvaa ratkaisun löytämisen kokemusta [EHH, s. 191-192] (erittäin vapaasti suomennettuna ja lyhennettynä):

> Huomenna on kvaternioiden viisitoistavuotispäivä. Ne syntyivät täysikasvuisina 16. lokakuuta 1843, kun olin Lady Hamiltonin kanssa kävelemässä Dubliniin ja kun tulimme Broughamin sillalle. Silloin minusta tuntui ikäänkuin ajatuksen sähkövirta olisi kulkenut lävitseni ja sen kipinöissä olivat i:n, j:n ja k:n perusyhtälöt... En voinut vastustaa kiusausta – niin epäfilosofinen kuin se ehkä olikin – kaivertaa veitsellä sillan erääseen kiveen peruskaavaa
>
> $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Kiertäessään maailmaa juttu alkaa tavallisesti muuttua, ja niin kävi Hamiltonin kaiverrustenkin. Esimerkiksi Boyerin [Bo, s. 814] mukaan Hamilton piirsi kiveen vain $i^2 = j^2 = k^2 = ijk$, kun taas Evesin [Ev, s. 391] mukaan hän piirsi "peruskvaternioiden" 1, i, j ja k kertotaulun, joka seuraa helposti peruskaavasta.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Yhtäkaikki, Hamilton varmaan kaiversi jotakin. Hänellä on täytynyt olla mukanaan melkoinen lapinleuku, kun hän sai piirretyksi kiveen kaavoja. Vai oliko silta tehty hiekkakivestä, joka ei tunnu kovin luotettavalta materiaalilta.

6 Kvaterniot

Hamilton ei kylläkään ratkaissut ongelmaansa aivan alkuperäisessä muodossaan. Hän ei siis määritellyt avaruudessa $\mathbb{R}^3$ kertolaskua, joka vastaa vektorin kiertoa. Nimittäin nykyisin jokainen tutkijankoulutuksen saanut matematiikko pystyy parissa tunnissa tai ainakin parissa päivässä (tai ainakin hänen pitäisi pystyä) osoittamaan, että tuollaista kertolaskua ei voida määritellä. (Tällä en suinkaan vähättele Hamiltonin neroutta, vaan päinvastoin, sillä on paljon helpompaa työskennellä valmiissa systeemissä kuin keskeneräisessä.) Osoitamme tämän mahdottomuuden [EHH, s. 189-190].

Teemme vastaoletuksen, että avaruudessa $\mathbb{R}^3$, jossa alkiot $(x, y, 0)$ vastaavat kompleksilukuja (x, y), on määritelty kertolasku niin, että liitäntä- ja osittelulaki sekä vaihdantalaki reaalisen tekijän kanssa ovat voimassa. Merkitsemme $1 = (1, 0, 0), i = (0, 1, 0)$ ja $j = (0, 0, 1)$. Olkoon $ij = (x, y, z) = x1 + yi + zj$. Koska $i^2 = -1$, niin $i(ij) = i^2 j = -j$, joten

$$\begin{aligned}(-1)j = -j = i(ij) = i(x1 + yi + zj) = xi - y1 + zij = xi - y1 + z(x1 + yi + zj) = \\ (zx - y)1 + (zy + x)i + z^2 j.\end{aligned}$$

Vertaamalla j:n kertoimia saamme $z^2 = -1$, mikä sisältää ristiriidan, koska z on reaalinen.

Hamiltonin hieno oivallus oli, että *haluttaessa kertoa kolmiulotteisia vektoreita niin, että kertolasku vastaa kiertoa, täytyy siirtyä neliulotteiseen avaruuteen*. Siksi hän määritteli kvaterniot järjestettyinä *reaalilukunelikköinä* (t, x, y, z), joiden yhteenlaskun hän määritteli vektorien yhteenlaskuna. Kertolaskun hän määritteli merkitsemällä $(t, x, y, z) = t1 + xi + yj + zk$ ja vaatimalla, että edellä esitetty peruskvaternioiden $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ ja $k = (0, 0, 0, 1)$ kertotaulu sekä tavanomaiset laskusäännöt ovat kertolaskun vaihdantalakia lukuunottamatta voimassa.

7 "Algebran vapautuminen"

Kertolaskun vaihdantalakia Hamilton ei siis saanut laajennuksessaan toimimaan eikä sitä saa kukaan muukaan. Mutta taisi olla pikemminkin voitto kuin tappio huomata, että kannattaa tutkia myös sellaisia algebrallisia järjestelmiä, joissa kertolasku ei ole vaihdannainen. Monet historioitsijat, esimerkiksi Eves [Ev, luku 13.8] ja Lehtinen [Le1, luku 11.1; Le2, luku 13.1], kutsuvat tätä huomiota "algebran vapautumiseksi" ja vertaavat sitä epäeuklidisen geometrian aikaansaamaan "geometrian vapautumiseen".

8 Kvaterniot ja vektorialgebra

Samastamme nyt peruskvaternion 1 reaaliluvun 1 kanssa sekä peruskvaterniot i, j ja k kolmiulotteisen avaruuden perusvektorien i, j ja k kanssa. Tällöin voimme ajatella kvaterniota $u = (t, x, y, z)$ kummallisena summana

$$\mathbf{u} = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

jossa skalaari t ja kolmiulotteinen vektori $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ lasketaan yhteen. Jos $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, niin $\mathbf{u}$ on *skalaari(kvaternio)*, ja jos $t = 0$, niin $\mathbf{u}$ on *vektori(kvaternio)*. Voidaan melko helposti osoittaa, että vektorikvaternioiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ tulolla $\mathbf{uv}$ on näiden vektorien skalaaritulon $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ja vektoritulon $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ kanssa mielenkiintoinen yhteys

$$\mathbf{uv} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

joka on voimassa myös toisin päin,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{uv} - \mathbf{vu}), \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{2}(\mathbf{uv} + \mathbf{vu}).$$

Täten kvaternioalgebraa voidaan soveltaa kolmiulotteiseen vektorialgebraan [EHH, s. 198-199].

Hamiltonin tavoite määritellä kolmiulotteisessa avaruudessa tulo, joka vastaa vektorin kiertoa, toteutuu tavallaan vektorikvaternioiden tulona, sillä nehän muodostavat kolmiulotteisen avaruuden (mutta kertolasku on suoritettava neliulotteisessa avaruudessa). Tämä kiertotulkinta on pitkä ja ehkä vaikeakin [EHH, § 7.3], joten emme käsittele sitä tässä.

9 Pietari, Herodes ja kvaterniot

"Quaternion" tarkoittaa "neljän ryhmää". Hamilton oli (toisaalta melkoinen ryyppyveikko [Be, luku XIX], mutta toisaalta) syvästi uskonnollinen, joten hän on saattanut ottaa tuon termin Raamatusta. Nimittäin, kun Herodes vangitsi Pietarin (Ap. t. 12:4), niin (erään käännöksen mukaan [EHH, s. 194]) "he put him in prison, and delivered him to four quaternions of soldiers to keep him". (Toisaalta sanan "quaternion" sijasta on joissakin käännöksissä käytetty jotakin muuta sanaa, esimerkiksi "squad", enkä tiedä, mikä sana oli Hamiltonin raamatussa.) Suomenkielinen käännös on "Herodes pani Pietarin telkien taakse ja määräsi häntä vartioimaan neljä nelimiehistä sotilasvartiostoa".

10 $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{H} \to$?

Kvaternioiden joukkoa merkitään tavallisesti $\mathbb{H}$:lla Hamiltonin kunniaksi. Hamilton uskoi [Be, s. 357], että kvaternioalgebra tekisi "kuolemattomaksi sekä hänet itsensä että hänen rakkaan Irlantinsa ja tulisi säilymään ikuisesti suurimpana matemaattisena saavutuksena sitten Newtonin *Principian*". Hän oli väärässä, sillä se osoittautui vain yhdeksi kompleksialkioisten 2×2-matriisien algebraksi muiden joukossa vailla kovin suurta merkitystä [EHH, s. 193]. Hamilton kuuluu matematiikan historian suurmiehiin aivan muiden töidensä takia.

Myöskään lukukäsitettä ei kannata laajentaa $\mathbb{H}$:sta eteenpäin, sillä seuraavassa laajennuksessa, jolloin täytyy operoida $\mathbb{R}^8$:ssa, menetetään kertolaskun liitäntälakikin. On siis parasta lopettaa tähän ja todeta, että kompleksiluvut ovat sittenkin "se oikea lopullinen" lukualue.

Kvaternioalgebra pysyy kuitenkin edelleen kiinnostavana tutkimuskohteena. Näpyteltyäni 17. 10. 2001 – kvaternioiden 173-vuotispäivänä – *Zentralblatt für Mathematik* -lehden sähköiseen tietokantaan hakusanan "quaternion" sain 707 viitettä. Siis vuodesta 1931 alkaen on julkaistu noin monta matemaattista tutkimusta, joiden otsikossa esiintyy tämä sana. (Hakusana "complex" antoi peräti 15598 viitettä, joten matemaattista tietoa on maailmalla suorastaan hirvittävä määrä, ja lisää tulee koko ajan.) Minäkin olen ollut tekemisissä kvaternioiden kanssa sikäli, että olen joutunut miettimään kvaternioalkioisen matriisin determinantin määritelmää. Kun kertolasku ei ole vaihdannainen, niin determinantin tavanomainen määritelmä ei toimi kunnolla.

Kiitokset

Kiitän Tuomas Sorvalia, Ari Virtasta ja Keijo Väänästä heidän käsikirjoituksestani tekemistään huomautuksista.

Henkilöviittaukset

1. René Descartes (1596–1650), ranskalainen matemaatikko ja filosofi.
2. Michael Stifel (1486–1567), saksalainen matemaatikko ja teologi.
3. Girolamo Cardano (1501–1576), italialainen matemaatikko, astrologi, lääkäri ja keksijä.
4. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), saksalainen matemaatikko ja filosofi.
5. William Rowan Hamilton (1805–1865), irlantilainen matemaatikko.
6. Karl-Friedrich Gauss (1777–1855), saksalainen matemaatikko. "Matemaatikkojen kuningas".

Kirjallisuusviittaukset

[Be] E. T. Bell, *Matematiikan miehiä*. WSOY, 1963.

[Bo] C. Boyer, *Tieteiden kuningatar. Matematiikan historia, osat I–II.* Art House, 1994.

[EHH] H. D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel and R. Remmert, *Numbers*. Graduate Texts in Mathematics 123. Corrected third printing. Springer, 1995.

[Ev] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*. Fourth edition. Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[Kl] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Third printing. Oxford Univ. Pr., 1974.

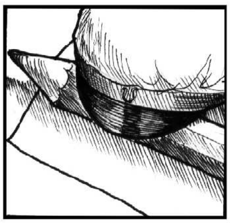
[Le1] M.Lehtinen, *Matematiikan lyhyt historia*. Yliopistopaino Helsinki Univ. Pr., 1995.

[Le2] M.Lehtinen, *Matematiikan historia*. http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/

[MVLS] J. Merikoski, K. Väänänen, T. Laurinolli ja T. Sankilampi, *Matematiikan taito 13. Analyysi*. Weilin+Göös, 1996.

[NP] R. Nevanlinna ja V. Paatero, *Funktioteoria*. Otava, 1963.

[Sa] E. Saksman, *Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa*. http://solmu.math.helsinki.fi/2000/2/, 5–12.



Osataanko matematiikkaa?

Yliopisto-lehdessä on käyty numeroissa 9/01, 10/01 ja 11/01 Puheenvuoro-palstalla keskustelua matematiikan osaamisesta. Lehden luvalla julkaisemme tässä prof. *Olli Martion* ja prof. *Peter Lindqvistin* puheenvuorot.

Osataanko matematiikkaa sittenkään?

Yliopisto-lehden numerossa 9/2001 opetusneuvos Eero Nurminen kehuu suomalaisten koululaisten matematiikan ja luonnontieteiden osaamista ainakin osittaisena menestystarinana. Hänen käsityksensä perustuvat vuoden 1999 TIMSS-raporttiin.

Tason paranemista on monenlaista. Vertaileva tilastollinen tutkimus selvittää vain suhteellisen paremmuuden. Tilanteen ymmärtämiseksi pitää katsoa historiaan. Viimeisten kolmenkymmenen vuoden aikana on matematiikan opetuksessa koettu useita kansallisia ja kansainvälisiä muutoksia. 1970-luvulla työntyi muutos koulukirjoihin "uuden matematiikan" nimikkeellä. Päämoottorina oli muutos muutoksen vuoksi ja aalto kohtasi koko läntisen Euroopan. Sen alullepanosta syytetään, aiheettomasti, ranskalaista Bourbakiryhmää, joka edusti akateemista ranskalaista ensyklopedia perinnettä. Koulukirjojen kirjoittajat ja kasvatustieteilijät luulivat, että "uusi matematiikka" ratkaisee myös matematiikan opetuksen ongelmat. Vanhojen kulttuurimaiden koululaitokset eivät kuitenkaan omaksuneet tätä linjaa kovin yhtenäisesti, mikä johtui näitten maitten koulutusjärjestelmien monimuotoisuudesta. Suuria muutoksia ei myöskään tapahtunut itäisen Euroopan maissa. Pahimmin nämä virtaukset vaikuttivat pienissä maissa ja erityisesti Skandinaviassa, missä koululaitos oli hallinnollisesti pitkälle yhdensuuntaistettu. Tämän seurauksena varsin pitkään naurettiin joukkoviivalle, jolla lehmiä erotettiin lampaista. Ensimmäisenä havahduttiin USA:ssa avaruuden kilpajuoksun yhteydessä, mutta useista muistakin maista alkoi kuulua varottavia ääniä. Yliopistojen ja teknillisten korkeakoulujen painostus johti suuntauksen hylkäämiseen. Suomessa toimi Leikolan komitea, joka suositteli muutoksia matematiikan ja luonnontieteiden oppikursseihin. Samaan aikaan oli kuitenkin keksitty ns. probleemanratkaisu, jonka painoarvo nousi uudistuksessa aivan suhteettomaksi, vaikka Leikolan komitea suositteli varsin varovaisia muutoksia. Samat piirit kuin aikaisemminkin innostuivat jälleen.

Matematiikassa on aina ratkaistu probleemoja. Yli 45-vuotiaat muistavat vielä kouluajoiltaan ongelmat, missä tarhassa oli lampaita ja kanoja ja yhteensä 32 jalkaa. Kuinka monta kanaa ja lammasta tarhassa, kun lampaita oli 7? Ongelman tarkoituksena oli harjoittaa yhtälön muodostamista ja sen ratkaisemista. Tällaiset probleemat eivät kelvanneet uusille probleemanratkaisijoille. Koko opetuksen pitää perustua "käytännön" ongelmiin. Matematiikalle pyrittiin antamaan vain välinearvo, vaikka kauan on tiedetty matematiikan merkitys ajattelun kehittäjänä. Suomalaisena sovelluksena koulukursseihin ilmestyi mm. talousmatematiikka, kokoelma alkeismatematiikkaa, lähinnä prosenttilaskua, ja pinnallista tilastotiedettä. Näistä ei kehity yhtenäistä matemaattista kokonaisuutta. Vaikka talouselämä ja sen problematiikka tarjoavat hyviä matematiikan ongelmia, on virhe luulla, että tämä lähestymistapa olisi tehokas matematiikan opetuksessa.

Prosessi kohtasi samat maat kuin "uusi matematiikkakin". Koulukirjoja ja oppimääriä rustattiin uuteen uskoon ja seminaareja pidettiin. Matematiikan oppimääristä muodostui tilkkutäkkejä. Useassa Euroopan maassa, mutta ei kaikissa, suuntauksen kannattajat ovat miehittäneet matematiikan kouluopetuksesta määräävän tason. Tämä näkyy selvästi TIMSS-raportissa: raportin päätekijät ovat aatteen kannattajia. Tehtiin jälleen erehdys, sillä ongelmaratkaisu ei riitä rakentamaan systemaattista pohjaa matematiikassa. Matematiikan opetuksen antamat työkalut jäävät olemattomiksi. Kirjainsymbolit ovat kauhistus. Kaavoja ei osata johtaa ja käsitteitä ei ymmärretä. Matematiikan opetus katkeaa TIMSS-tasolle, jossa tyypillistä probleemanratkaisua edustaa pallojen päällekkäin asettelu. Aatteen perillemeno ilmenee selvästi, kun tutkii suomalaisten koululaisten suoritustasoa TIMSS:in yksittäisten tehtävien kohdalla. Monilla tehtävillä on hyvin vähän tekemistä matematiikan tai sen sovellusten kanssa. Kyseessä on opetuksen vinosuuntaus samalla tavalla kuin "uuden matematiikan" tapauksessa. TIMSS raporttia pitää tulkita oikein ja kysyä, mitkä ovat tällaisen opetuksen eväät tulevaisuuteen. Ei ole ihme, että monet Euroopan maat tähyävät siirtolaisia maista, joissa matematiikkaa opetetaan kunnolla. Raporttiin perehtyminen paljastaa, että matematiikan ja sen keskeisten sovellusalueiden kannalta tulokset vastaavat Suomen osalta melko tarkasti Kassel-projektin tuloksia.

TIMSS-raportista käy selville, että keskihajonnat suomalaisten osaamisessa matematiikassa ovat poikkeuksellisen pieniä. Osaamishaitari ei leviä ylöspäin. Matematiikan oppituntien lukumäärissä Suomen alapuolella ovat vain Makedonia ja Kypros. Maita on mukana 38. Tilastollisesti tästä voitaisiin vetää johtopäätös, että matematiikan opetusta kannattaa Suomessa edelleen vähentää, koska näin vaatimattomalla opetuksella saadaan tuloksia, jotka riittävät keskivaiheille. Keskivaiheille pääseminen ei ole vaikeaa, sillä itäisen Euroopan koululaitos on romahtanut ja TIMSS-raportissa on mukana monia yllä kuvatun prosessin läpikäyneitä maita. Artikkelissaan "Matematiikan osaaminen TIMSS-tutkimuksen perusteella" (Dimensio 3/01) P. Kupari ja P. Reinikainen mainitsevat, että TIMSS-selvityksen perusteella ei voi havaita, että matematiikan oppimisen taso Itä-Euroopan maissa on pudonnut. Näiden maiden (Unkari, Slovenia, Venäjä, Slovakia, Tshekin tasavalta, Bulgaria, Latvia, Romania, Liettua, Moldovia) opetustilanteeseen perehtyneet tietävät, että useimmissa näistä maista koulutusjärjestelmä on romahtanut. Oppimistulokset eivät ole huonontuneet samassa suhteessa, koska vanhan järjestelmän arvostamia alansa hallitsevia opettajia on vielä käytettävissä. Tämä yhdistettynä monissa Keski-Euroopan maissa tapahtuneeseen taantumiseen pitää nämä maat yhä keskikastissa ja auttaa myös Suomea sijoittumaan keskivälille. Jos Suomessa olisi vältetty matematiikan oppimäärien em. poukkoilut, keskitetty koulujen matematiikan opetus olennaiseen ja matematiikan tuntimäärät olisivat lähellä kansainvälistä tasoa, niin Suomi sijoittuisi TIMSS-selvityksessä lähelle kärkeä. Tämän skenaarion toteuttaminen ei olisi maksanut yhtään enempää kuin toteutuneenkin skenaarion. Jossittelu on tietysti turhaa ja Suomessa on havahduttu tilanteen korjaamiseen. Samanlaista poliittista tahtoa kuin esimerkiksi Englannissa ei kuitenkaan näytä löytyvän.

Suomessa ei koululaisille tarjota vaihtoehtoja ja eväät jatkoon eivät riitä matematiikasta ja sen sovelluksista kiinnostuneille. Tämän ovat lukion matematiikan opettajat todenneet monessa yhteydessä. Vaativampaa teoreettista matematiikkaa ei pidä tuputtaa kaikille, mutta perusteet kolminaisuuden "reading, writing, arithmetic" hallintaan koulun pitäisi tarjota.

Olen seurannut matematiikan osaamistason vaihtelua 34 vuoden ajan. Korkeakoulut ovat perinteisesti saaneet parhaan aineksen. Osallistuin Vaasassa 16. 3. 2001 seminaariin, jonka olivat järjestäneet ammattikorkeakoulut aiheena matematiikka ja luonnontieteet ammattikorkeakouluissa. Käsitykset matematiikan kouluopetuksen nykytasosta olivat vielä pessimistisemmät kuin korkeakoulujen piirissä. Usealla ammattikorkeakoulun linjalla ei TIMSS-testitehtävien taso luotaa sitä pohjaa, jolle opinnot voidaan perustaa.

LUMA-hankkeen hyödyllisyydestä olen samaa mieltä opetusneuvos Eero Nurmisen kanssa. Hankkeessa asetettuihin määrällisiin tavoitteisiin ei tulla pääsemään, mutta laatu on toki aina määrää tärkeämpää. Opettajien täydennyskoulutus on tarpeellista, mutta sen pitäisi suuntautua enemmän aineen hallintaan. Uusien matematiikan opettajien koulutukseen ei myöskään ole panostettu riittävästi. Toimenpiteitä ja rahoituksen suuntaamista on jatkossa harkittava huolellisesti.

Olli Martio
professori, esimies
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Norjassa vielä surkeampaa

Luettuani professori Olli Martion puheenvuoron Osataanko matematiikkaa sittenkään? (Yliopistolehti 10/01) tahdon kertoa, kuinka huonoksi tilanne voi mennä.

Täällä Norjassa matematiikan opettajatilanne on ajautunut umpikujaan, eikä nyt tiedetä, miten tämä huolestuttava tilanne voitaisiin korjata. Norjalaiset heräsivät liian myöhään. Tänä vuonna koko valtakunnassa valmistui kolme (!) opettajaa, joilla on matematiikka pääaineena. Lukumäärä on ollut katastrofaalisen alhainen jo yli kymmenen vuoden ajan. Onneksi vanhoja alansa hallitsevia opettajia on toistaiseksi ollut käytössä. "Pedagogit" ovat Norjassa miehittäneet vahvasti yhdensuuntaistetun koulujärjestelmän. Onneksi Suomessa on vielä mahdollisuus estää tällainen kehitys.

Peter Lindqvist
Matematiikan professori
Trondheim, Norja