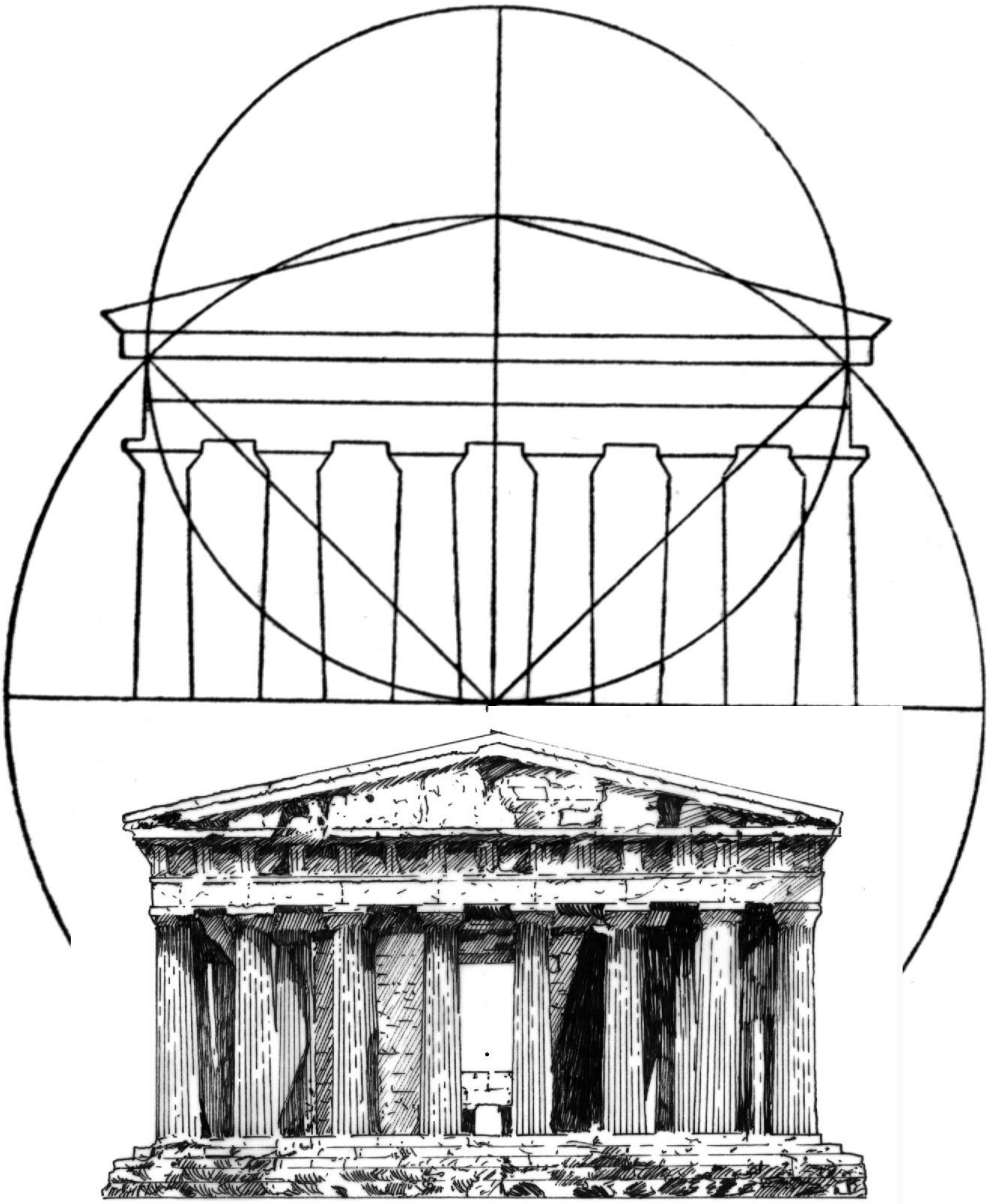
Solmu

Matematiikkalehti
2/2001

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 2/2001

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

Päätoimittaja *Pekka Alestalo*
Toimitussihteerit *Jouni Seppänen* ja *Mika Koskenoja*

Sähköposti
toimitus@solmu.math.helsinki.fi

Toimituskunta:
Heikki Apiola
Matti Lehtinen
Kullervo Nieminen
Marjatta Näätänen

Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*

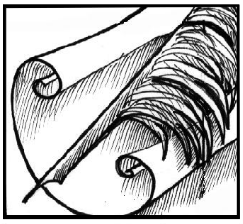
Seuraavaan lehteen tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään elokuun 2001 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Opetusministeriötä ja Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan nykyisin vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Täydellisen kokoelman Solmun jo ilmestyneitä paperikopioita voi pyytää esim. koulun kirjastoon niin kauan kuin niitä riittää. Ilmoittakaa postiosoitteenne ja mitkä numerot haluatte joko yllä mainittuun Solmun postiosoitteeseen tai sähköpostilla osoitteeseen toimitus@solmu.math.helsinki.fi.

Sisällys



Pääkirjoitus

Suhteellisuudentaju on tyypillinen inhimillinen ominaisuus: suurin osa meistä kuvittelee sitä omaavansa ainakin siihen saakka, kunnes ryhdymme vertailemaan käsityksiämme muiden kanssa. Pelkkä mielipiteistä kinasteleminen ei yleensä johda mihinkään, vaan pidemmän päälle olisi kummankin osapuolen tuotava mukaan myös asiatietoja.

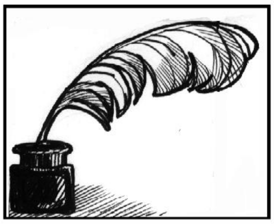
Numeroihin perustuvat tosiasiat ovat ainakin periaatteessa kaikkein yksinkertaisimpia. Vaikka esimerkiksi työttömien lukumäärästä ei olla täysin yksimielisiä, ongelmana eivät tietenkään ole yhteenlaskuun liittyvät ongelmat vaan se, mitä työttömällä oikeastaan tarkoitetaan. Valitettavasti numerotietoja mainittaessa ei useinkaan kiinnitetä tarpeeksi huomiota siihen, millä perusteilla luvut on saatu, ja ennen kaikkea, miksi perusteluina esitetään juuri näitä lukuja. Jälkimmäiseen kysymykseen törmää esimerkiksi jokainen, joka – omasta kannastaan riippumatta – yrittää seurata ydinvoimasta käynnissä olevaa keskustelua.

Kirjassaan *Numerotaidottomuus* John Allen Paulos tuo esille myös suhteellisuudentajuun liittyviä esimerkkejä. Seuraavassa muutamia numerotietoja, jotka ovat tulleet itselleni mieleen.

- Niin sanotun hullun lehmän taudin vuoksi (lähteistä riippuen) 50–80 % saksalaisista on olennaisesti vähentänyt naudanlihan syöntiään. Tautiin ei ilmeisesti ole Saksassa kuollut vielä yhtään ihmistä. Sen sijaan autokolareissa kuolee vuosittain n. 5000 saksalaista. Suomessa vastaavat luvut ovat nolla ja yli 300.
- Pyöräilijöille on jo pitkään ehdotettu kypäräpakkoa. Vuosittain liikenteessä kuolee n. 50 pyöräilijää. Sen sijaan kuolemaan johtaneita jalankulkijoiden liukastumisia sattuu n. 1000 tapausta.
- Petoeläimet kuten karhu ja susi surmasivat Suomessa viimeisten sadan vuoden aikana ilmeisesti yhden ihmisen. Samaan aikaan lemmikkieläinten, lähinnä koirien, uhreista saamme lukea vuosittain.
- Lopuksi näistä synkistä aiheista hieman harmittomampaan esimerkkiin: Suomessakin on ryhdytty joissakin säätiedotuksissa esittelemään koko maailman säätä. Niitä on mielenkiintoista seurata, mutta mikä lienee ennusteiden tarkoitus? Kun Etelä-Amerikkaan on luvassa puolipilvistä ja kuurosateita, niin kannattaa muistaa, että jo pelkästään Argentiinan pinta-ala on lähes $3\,000\,000$ km^2 eli sama kuin koko Länsi-Euroopalla.

Esimerkkeihin liittyvien numeroiden oikeellisuuden voi jokainen itsekin tarkistaa, mutten väitä, että aiheisiin pitäisi suhtautua niin suoraviivaisesti kuin numerotiedot näyttäisivät viittaavan. Sen sijaan epäilen, että esimerkkien valinta todistaa vain kirjoittajan huonosta suhteellisuudentajusta.

Pekka Alestalo



Toimitussihteerin palsta

Keskustelupalsta on toiminut Solmun verkkosivuilla vuoden 2000 alusta lähtien. Lukijoiden mielipiteille, kysymyksille ja muulle palautteelle tarkoitettu palsta on jo osoittanut tarpeellisuutensa sinne saapuneiden viestien perusteella.

Palautetta on voinut lähettää verkkosivujen www-lomakkeella ja sähkö- tai kirjepostina. Aluksi palautetta tuli ainoastaan lomakkeen välityksellä, mutta viime aikoina sitä on tullut myös sähköpostiviesteinä – tosin lomakkeellakin lähetetyt viestit tulevat toimitukselle sähköpostina. Sen sijaan kukaan ei vielä ole lähettänyt palautettaan Solmun toimitukseen perinteisenä kirjeenä.

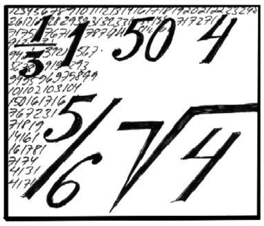
Kuluneen 15 kuukauden aikana (tammikuu 2000 – maaliskuu 2001) keskustelupalstalla on julkaistu noin 30 palauteviestiä ja toimituksen vastausta. Lähes kaikki viestit on lähetetty omalla nimellä varustettuna, joka vahvistaa palstan asiallisen ja tietoa välittävän luonteen. Sinänsä hyödyllistä kriittistä palautetta – jonka lähettäjät usein esiintyvät nimimerkin suojassa – on tullut hyvin vähän.

Merkittävä osa palautteesta on ollut lukijoita kiinnostavia matemaattisia ongelmia ja muita matematiikkaan liittyviä kysymyksiä, joihin Solmun toimitus on julkaissut ratkaisuja ja vastauksia. Aikaisempaa enemmän toivottaisiinkin lukijoiden omia ratkaisuja toisten lukijoiden esittämiin ongelmiin. Ratkaisu johonkin ongelmaan voisi syntyä monen palstalle saapuneen viestin seurauksena, jolloin viestien lähettäjät yhdessä ratkaisisivat ongelman pienin ja miksei suuremminkin askelin edeten kohti lopullista ratkaisua. Tällöin keskustelupalstan alkuperäinen idea – joissakin yhteyksissä väärin perustein käytettynä lähes kirosanan merkityksen saanut interaktiivisuus – tulisi parhaiten esille palstan toiminnassa.

Pari esimerkkiä keskustelupalstalle saapuneista viesteistä: Heti palstan perustamisen ja vuodenvaihteen 1999–2000 jälkeen nimimerkki *Totuuden etsijä* kysyi, että vietettiinkö vuosituhannen vaihtumista liian aikaisin. Voitte lukea *Matti Lehtisen* hyvin perustellun vastauksen tammikuun 2000 viesteistä Solmun verkkosivuilla. Maaliskuun 2001 viesteissä etsintäkuulutetaan yläasteen AHAA matematiikan kirjoja. Jos kirjahyllyssäsi on näitä kirjoja pölyttymässä, tarvittavat yhteystiedot löytyvät keskustelupalstalta.

Jos toivot Solmuun artikkelia jostakin tietystä matematiikan aiheesta, niin lähetä ehdotuksesi keskustelupalstalle. Solmun toimitus yrittää mahdollisuuksien mukaan toteuttaa toiveesi. Ja toki palstalle odotetaan saapuvan entistä enemmän lukijoita kiinnostavia matemaattisia ongelmia, joita muut lukijat ja toimitus voivat yhdessä ratkoa.

Mika Koskenoja



Miksi π on irrationaalinen?

Matti Lehtinen

Selailin erästä hiljattain ilmestynyttä lukion lyhyen matematiikan oppikirjaa. Siinä käsiteltiin, niin kuin oikein ja kohtuullista on, erityyppisiä lukuja. Irrationaaliluvuista ensimmäisenä esimerkkinä oli "kuuluisin irrationaaliluku" $\pi = 3{,}14145926\ldots$. Kirja ei kerro, miksi π, ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien suhde, on irrationaalinen. Eipä tietoa löydy muistakaan oppikirjoista. Kaikki me kuitenkin pidämme asiaa tunnettuna ja selvänä. Mutta eihän matematiikassa saa luottaa kuulopuheisiin, väitteet on perusteltava!

Irrationaalilukuja on

Reaaliluvut ovat joko rationaalisia, kokonaislukujen osamääriä $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, tai sitten ei. Reaaliluvut, jotka eivät ole rationaalisia, ovat irrationaalisia. Jo lähes 2500 vuotta sitten kreikkalaisen kulttuurin piirissä tehtiin se merkittävä ja matematiikan kehitykseen syvällisesti vaikuttanut havainto, että muutamat janojen pituuksien suhteet kuten neliön sivun ja lävistäjän pituuksien suhde tai säännöllisen viisikulmion sivun ja lävistäjän pituuksien suhde eivät ole ilmaistavissa kokonaislukujen suhteena, toisin sanoen ne ovat irrationaalisia. Irrationaalisuustodistukset ovat epäsuoria: jos neliön sivu olisi 1 ja sen lävistäjän ja sivun suhde olisi $\frac{p}{q}$, ja p:llä ja q:lla ei olisi yhteisiä tekijöitä (sellaisethan voidaan aina supistaa murtoluvusta pois), niin Pythagoraan lauseen mukaan olisi

$$\frac{p^2}{q^2} = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Tällöin olisi $p^2 = 2q^2$. Mutta nyt p olisi parillinen, $p = 2s$, ja saataisiin $4s^2 = 2q^2$, $q^2 = 2s^2$. Siis q:kin olisi parillinen, ja p:llä ja q:lla olisikin yhteinen tekijä 2.

Irrationaalilukuja on paljon

Irrationaalilukuja on siis olemassa. Itse asiassa niitä on kovin paljonkin. Umpimähkään valittu reaaliluku on melkoisella varmuudella irrationaalinen. Rationaalilukujen joukko on nimittäin *numeroituva*. Jokaiselle rationaaliluvulle voidaan antaa ikioma järjestysnumero luonnollisten lukujen joukosta. Itse asiassa tullaan toimeen vain näennäisesti pienellä osalla kaikista luonnollisista luvuista. Jokainen rationaaliluku r voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muotoon

$$r = (-1)^k \frac{p}{q},$$

missä $k = 0$ tai $k = 1$, p on luonnollinen luku (0 on mukana) ja q nollasta eroava luonnollinen luku, jolla ei ole yhteisiä tekijöitä p:n kanssa. Jos $p = 0$, kiinnitetään vielä $q = 1$. Nyt jokaiseen rationaalilukuun r voidaan liittää esimerkiksi luonnollinen luku $f(r) = 2^k 3^p 5^q$. Kahteen eri rationaalilukuun tulee näin aina liitetyksi eri luonnollinen luku.

Väitetty rationaalilukujen "harvalukuisuus" seuraa edellisestä. Otetaan mikä hyvänsä positiivinen luku a, kuinka läheltä nollaa tahansa. Ympäröidään jokainen rationaaliluku r janalla, jonka pituus on $\frac{a}{2^{f(r)}}$. Näiden janojen yhteinen pituus on varmasti enintään

$$a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right).$$

Mutta geometrisen sarjan summakaavan mukaan summa on sama kuin

$$a\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2a.$$

Kaikki rationaaliluvut voidaan siis lukusuoralla eristää sellaiseen osaan, jonka pituus voidaan (a:n valinnalla) saada miten pieneksi tahansa. Kaikki, mitä yli jää, on irrationaalilukujen aluetta. (Asia ei tietenkään ole kovin havainnollinen. Rationaalilukuja on toisaalta tiheässä; esimerkiksi jokainen lukusuoran jana, miten lyhyt tahansa, sisältää äärettömän monta rationaalilukua.)

Mutta onko π irrationaalinen?

Vaikka irrationaaliluvut näyttävätkin muodostavan lukujen enemmistön, yksittäisen luvun irrationaalisuus ei yleensä ole helppo osoittaa. Lukua π (merkintä on peräisin 1700-luvulta) ounasteltiin irrationaaliseksi jo antiikin aikoina. Ensimmäisen, joskin hiukan aukkoisen todistuksen asialle on kuitenkin julkaissut sveitsiläinen Johann Heinrich Lambert vuonna 1766. Lambert johti tangenttifunktiolle ketjumurtolukuesityksen ja päätteli sen perusteella, että jos x on rationaalinen, $\tan x$ on irrationaalinen. Koska $\tan\frac{\pi}{4}=1$, $\frac{\pi}{4}$ ja siten myös π on irrationaalinen.

Seuraavaa π:n irrationaalisuustodistusta pidetään nykyisin yksinkertaisimpana. Se on koulutiedoin ymmärrettävissä, mutta on silti melko monipolvinen. Tämän todistuksen ajatuksen esittivät amerikkalainen I. Niven ja japanilainen Y. Iwamoto 1940-luvun lopulla.

Todistetaan itse asiassa vähän enemmän kuin π:n irrationaalisuus, nimittäin, että luku π^2 on irrationaalinen. Tämä riittää itse π:nkin irrationaaliseksi todistamiseen, koska rationaaliluvun neliö tietenkin on rationaalinen.

Muutamia polynomeja ja niiden derivaattoja

Lähdetään liikkeelle astetta $2n$ olevista polynomeista

$$p_n(x)=\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n, \quad n\geq 1.$$

On ilmeistä, että

$$0<p_n(x)<\frac{1}{n!}, \quad \text{kun } 0<x<1. \tag{1}$$

Väitämme, että polynomien p_n kaikkien kertalukujen derivaatat saavat pisteissä 0 ja 1 kokonaislukuarvon. Tämä nähdään oikeaksi induktiopäättelyn avulla. Ensiksikin $p_1(x)=x(1-x)=x-x^2$, joten $p_1'(x)=1-2x$, $p_1''(x)=-2$ ja p_1:n korkeammat derivaatat $p_1^{(k)}(x)$, $k>2$, ovat nollia. Väite on siis tosi, kun $n=1$. Tehdään sitten sellainen induktio-oletus, että polynomien $p_1(x),\ldots,p_{n-1}(x)$ kaikkien kertalukujen derivaatat saavat pisteissä 0 ja 1 kokonaislukuarvon. Nyt

$$\begin{aligned}p_n'(x)&=\frac{1}{n!}\left(nx^{n-1}(1-x)^n-nx^n(1-x)^{n-1}\right)\\&=\frac{1}{(n-1)!}(1-2x)x^{n-1}(1-x)^{n-1}\\&=(1-2x)p_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Tulon derivaattakaavaa toistuvasti soveltaen näemme, että $p_n(x)$:n kaikkien kertalukujen derivaatat ovat x:n ja polynomien $p_j(x)$, $j\leq n-1$, derivaattojen polynomeja. Induktio-oletuksesta seuraa, että kyseiset derivaatat saavat 0:ssa ja 1:ssä vain kokonaislukuarvoja.

Muodostetaan nyt polynomin p_n derivaatoista ja luvusta π seuraavanlainen polynomi:

$$\begin{aligned}P_n(x)=\pi^{2n}p_n(x)-\pi^{2n-2}p_n''(x)+\pi^{2n-4}p_n^{(4)}(x)-\\\cdots+(-1)^np_n^{(2n)}(x).\end{aligned}$$

$P_n(x)$:n lauseke on pantu kokoon tarkoitushakuisesti. Ensinnäkin havaitaan, että p_n:n ne derivaatat, joiden kertaluku on suurempi kuin $2n$, ovat nollia, onhan $p_n(x)$ polynomi, jonka aste on $2n$. Edelleen

$$\begin{aligned}P_n''(x)=\pi^{2n}p_n''(x)-\pi^{2n-2}p_n^{(4)}(x)+\\\cdots+(-1)^{n-1}p_n^{(2n)}(x),\end{aligned}$$

joten

$$\pi^2P_n(x)+P_n''(x)=\pi^{2n+2}p_n(x).$$

Muodostetaan nyt tulon derivointikaavan avulla funktion

$$f(x)=P_n'(x)\sin(\pi x)-\pi P_n(x)\cos(\pi x)$$

derivaatta $f'(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=P_n''(x)\sin(\pi x)+\pi P_n'(x)\cos(\pi x)\\&\quad-\pi P_n'(x)\cos(\pi x)+\pi^2P_n(x)\sin(\pi x)\\&=(P_n''(x)+\pi^2P_n(x))\sin(\pi x)\\&=\pi^{2n+2}p_n(x)\sin(\pi x).\end{aligned}$$

Mihin tätä tarvitaan? Se näyttää meille, että

$$\begin{aligned}\int_0^1\pi^{2n+2}p_n(x)\sin(\pi x)\,dx&=\Big|_0^1 f(x)\\&=\pi(P_n(1)+P_n(0)).\end{aligned} \tag{2}$$

Lopullinen hyökkäys

Tehdään nyt ratkaiseva vastaoletus. Oletamme, että

$$\pi^2 = \frac{a}{b},$$

missä a ja b ovat kokonaislukuja. Koska $P_n(x)$ koostuu π^2:sta, enintään potenssiin n korotettuna, ja $p_n(x)$:n derivaatoista, niin $P_n(0)$ ja $P_n(1)$ ovat muotoa $\frac{A}{b^n}$ ja $\frac{B}{b^n}$, missä A ja B ovat kokonaislukuja. Lisäksi $\pi^{2n+2} = \pi^2 \frac{a^n}{b^n}$ ja (2) saa muodon

$$\pi a^n \int_0^1 p_n(x) \sin(\pi x)\, dx = C,$$

missä C on positiivinen kokonaisluku. Mutta kun $0 < x < 1$, niin $0 < \sin(\pi x) < 1$. Kun otetaan mukaan epäyhtälö (1), nähdään, että edellisen integraalin integroitava funktio on koko integroimisvälillä positiivinen, mutta arvoltaan pienempi kuin $\frac{1}{n!}$. Koska integroimisvälin pituus on 1, itse integraali on positiivinen luku, joka on pienempi kuin $\frac{1}{n!}$. Mutta tämä merkitsee, että

$$\pi \frac{a^n}{n!} \geq C, \tag{3}$$

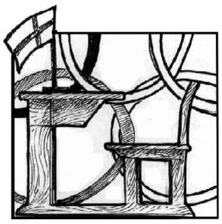
riippumatta n:n arvosta. Nyt tarvitsemme vielä yhden matematiikan yleistiedon. Jos a on mielivaltainen luku, niin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{4}$$

Tästä yhtälöstä on helppo vakuuttua vaikkapa ajattelemalla, että osamäärän osoittajassa ja nimittäjässä on molemmissa n tekijää, ja kun n kasvaa, nimittäjään kerääntyy enemmän ja enemmän tekijöitä, jotka ovat $> a$. Mutta (3) ja (4) ovat ilmeisessä ristiriidassa keskenään. Vastaoletus luvun π^2 rationaalisuudesta on siis väärä!

Mutta ongelmia vielä jääkin

Irrationaaliluvutkin jakautuvat kahteen luokkaan. Algebralliset luvut ovat jonkin kokonaislukukertoimisen polynomin nollakohtia. Muut irrationaaliluvut ovat transkendenttilukuja. Esimerkiksi $\sqrt{2}$ on algebrallinen, koska se on polynomin $x^2 - 2$ nollakohta. Osoittautuu, että algebrallisiakin irrationaalilukuja on ”vain” numeroituva määrä, joten ”melkein kaikki” reaaliluvut ovat transkendenttilukuja. Mutta kysymys yksittäisen luvun transkendenttisuudesta on yleensä vaikea ratkaista. Luku π todistettiin transkendenttiluvuksi vuonna 1882. Tämä ratkaisi yli 2000 vuotta pohditun ongelman ympyrän neliöinnistä, geometrisesta konstruktiosta, jolla voitaisiin (harppia ja viivoitinta käyttäen) löytää sellaisen neliön sivu, jonka ala on tunnetun, esimerkiksi yksikkösäteisen, ympyrän ala. Koska geometriset konstruktiot ovat suorien ja ympyröiden leikkauspisteiden etsimisiä ja näiden yhtälöt ovat ensimmäisen ja toisen asteen polynomeja, ei konstruktioilla päästä pisteistä, joiden koordinaatit ovat rationaalilukuja, pisteisiin, joiden koordinaatit ovat transkendenttilukuja. Luvun π transkendenttisuus merkitsee, että ”ympyrän neliöintiongelma” on ratkeamaton. Mutta siihen, miksi π on transkendenttinen, emme nyt puutu.



Matikkapää pilvissä

Marjatta Näätänen

”Suomalaisnuori kuvittelee osaavansa hienosti matematiikkaa, mutta plus-lasku on hänelle hepreaa” kirjoittaa ***Ylioppilaslehti* 5** (16.3.01).

”’Itsepetos on sivistynyt rikos. Uhrit ovat tyytyväisiä’, olisi voinut sanoa, kun Suomen koululaisten matematiikan osaaamista ylistettiin joulun alla.

Omakehun puuskan aiheutti kansainvälisen TIMSS 1999 -tutkimuksen tulosten julkaiseminen. ’Suomi sijoittui selvästi yli keskitason’, Helsingin Sanomat kirjoitti. Jopa presidentti Tarja Halonen innostui kiittelemään nuorten matikkataitoja uudenvuodenpuheessaan.

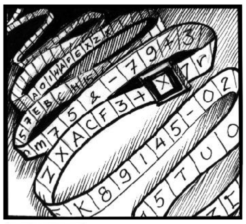
Suomalaiskoululaiset itsekin arvioivat tutkimuksessa omat matematiikan taitonsa hyviksi.

Tutkimusta ei taidettu lukea järin tarkkaan. Suomi sijoittui yli keskitason surkeassa joukossa. Vertailuun osallistui sellaisia maita kuin Indonesia, Tunisia, Marokko, Thaimaa, Chile, Filippiinit, Etelä-Afrikka ja Makedonia, joiden taloudelliset edellytykset kilpailla Suomen kanssa ovat kaikkea muuta kuin tasaveroiset. Poissa vertailusta olivat esimerkiksi Ranska, Saksa, Skotlanti, Norja, Ruotsi, Sveitsi ja Kreikka.”

Kirjoituksessa haastatellaan mm. prof. *Olavi Nevanlinnaa*, joka kertoo, että jopa Teknillisessä korkeakoulussa uusien opiskelijoiden huono osaaminen on ongelma. Hänen mielestään Luma-talkoiden *”lopputulos on, että lukiot tarjoavat kaikkea kivaa ja eksoottista, ja opiskelijat oppivat vähän sitä sun tätä, eivätkä mitään kunnolla. Meidän on pian pakko tehdä oma linjaus siitä, millaiset pohjatiedot opiskelijoilla pitää olla ennen Otaniemeen tuloa.”*

Erityisopettaja *Juha Pitkänen* Helsingin palvelualojen oppilaitoksesta kertoo, että *”Opiskelijoilta ovat jopa yksinkertaiset plus- ja miinuslaskut hukassa. Mittaamme opiskelijoiden taidot aina lukuvuoden alussa ja nykyään noin joka kolmannella on ongelmia matematiikan kanssa. Joudumme aloittamaan matematiikan kertauksen ihan ala-astetasolta.”* Puutteelliset taidot ovat korostuneet osaksi sen vuoksi, että palvelualojen vaatimukset ovat koventuneet. *”Enää ei riitä, että ravintolakokki osaa laittaa ruokaa. Pitää pystyä tekemään kustannuslaskelmia ja olemaan tarkkana raaka-aineiden kanssa. Samaten vaatetuspuolella laskupää on tarpeen, sillä materiaalit maksavat, eikä heittoja saa tulla.”*

Tarkemmin TIMSS-tutkimuksesta: Solmu 1/2001
http://www.timss.org/timss1999i/math_achievement_report.html



Mitä tietokonevirheistä seuraa? Räjähdyksiä, uppoamisia ja tappavaa säteilyä

Juha Haataja

Tietotekniikan ongelmat aiheuttavat mitä ihmeellisimpiä virhetilanteita. Usein virheen syyksi paljastuu väärin toimiva ohjelmakoodi. Syynä voi olla triviaali virhe ohjelmakoodissa tai syvällinen suunnitteluvirhe ohjelmiston rakenteessa.

Klassinen esimerkki ohjelmistovirheestä on ”Wednesday-koodi”, joka toimi vain keskiviikkoisin. Tämä johtui siitä, että keskiviikon nimessä oleva y-kirjain kirjoitettiin seuraavan kentän päälle ja tämä y-merkki sai koodin toimimaan oikein (y = yes).

Miten luotettavia tietokoneohjelmistot ovat? Käytännön kokemus osoittaa, etteivät kovinkaan. Tilannetta kuvaamaan onkin syntynyt termi ”banaaniohjelmistot”: käyttäjät kypsyttävät raa’at tuotteet jotakuinkin käyttökelpoisiksi.

Esittelen seuraavassa muutamia tieteeseen ja tekniikkaan liittyviä tapahtumia, joissa tietoteknisillä virheillä on ollut merkittävä rooli. Tietotekniikan käyttö ei ole tietenkään pelkkiä virheitä ja ongelmia. Parhaimmillaan tietotekniikka on erinomainen työkalu ja apuväline. Tuon esille ongelmatilanteita eri tyyppisten virheiden havainnollistamiseksi. Ehkä kokemuksesta voi oppia.

Urbaaneja legendoja

Vuonna 1962 Nasa laukaisi Venukseen tarkoitetun Mariner I -luotaimen. Pian lähdön jälkeen raketti alkoi käyttäytyä holtittomasti, minkä takia se jouduttiin tuhoamaan. Luotain putosi Atlantin valtamereen.

Tapaturman syynä oli laitevirhe yhdistyneenä ohjelmistovirheeseen. Laitevian takia rakettia ohjattiin tutkan avulla maasta käsin. Tutkan antamissa mittaustiedoissa oli virhettä, minkä takia mittausarvoista olisi pitänyt laskea juokseva keskiarvo.

Ohjauskoodin suunnitelmista kuitenkin puuttui keskiarvostusta tarkoittava yläviiva nopeusmuuttujan päältä. Siten ohjaukseen käytetiin viimeisintä tutkan antamaa arvoa, jossa oli mukana satunnaista virhettä. Ohjausjärjestelmä kuvitteli raketin heittelehtivän ja yritti kompensoida tätä komennoilla, jotka todella saivat raketin käyttäytymään holtittomasti.

Mariner I -luotaimen tuhoutumisesta muodostui ydin monille tarinoille. Koska ongelman syy oli hiukan monimutkainen, puhutaan tarinoissa yleensä koodissa olleesta etumerkkivirheestä tai pilkkuvirheestä. Pilkkuvirhetarinan alkuperä löytyy ilmeisesti seuraavassa kuvatusta ongelmasta, joka tapahtui samoihin aikoihin.

Matkalla avaruuteen

Vuonna 1963 Nasassa kehitettiin ja testattiin aiemmilla Mercury-lennoilla käytettyä rakettisimulaattoria. Testauksessa havaittiin, että tulokset olivat kohtalaisen tarkkoja, mutta eivät kuitenkaan täysin vastanneet tunnettuja tuloksia. Usean viikon testauksen jälkeen Fortran-ohjelmakoodista löytyi rivi

```
DO 10 I=1.10
```

Tässä piti olla toistorakenne, jota suoritetaan kymmenen kertaa. Pilkun vaihtuminen pisteeksi muunsi lauseen kuitenkin sijoituslauseeksi, jossa muuttujaan `DO10I` sijoitettiin arvo `1.10`. Siispä kyseinen toistorakenne suoritettiin vain kerran. Saadut tulokset olivat riittävän tarkkoja aiemmilla lennoilla, jolloin rakettien tehot olivat pienempiä. Onneksi virheestä ei aiheutunut mitään todellisia vahinkoja. Nykyisessä Fortran-kielen versiossa tämänkaltaiset virheet huomattaisiin jo ohjelman käännösaikana.

Euroopassa kehitetyn Ariane 5 -raketin ensimmäinen laukaisu tapahtui 4.6.1996. Rakettia oli kehitetty vuosikymmenen ajan ja kehityskulut olivat luokkaa 50 miljardia markkaa. Noin 37 sekuntia laukaisun jälkeen raketti alkoi käyttäytyä holtittomasti ja lopulta räjähti. Raketin ja sen lastin arvo oli useita miljardeja markkoja.

Turman syy selvisi kahden viikon kuluessa. Ohjelmassa käytettiin Ariane 4 -raketille kehitettyä ohjauskoodia, jossa raketin vaakasuoraa nopeuttaa kuvaava 64-bittinen liukuluku muutettiin 16-bittiseksi kokonaisluvuksi. Tässä tapauksessa lukuarvo oli kuitenkin yli 32 768, joka on suurin 16-bittisessä kokonaislukuaritmetiikassa esitettävissä oleva luku. Prosessori antoi virhetilanteesta ilmoituksen ja tulosti virheraportin.

Virhetilanteen käsittelyä ei kuitenkaan määritelty Ada-koodissa, jolloin ohjausjärjestelmä yritti tulkita tuloksen raketin ohjauskomennoiksi. Seurauksena oli holtiton käyttäytyminen ja lopulta raketin itsetuhomekanismin käynnistyminen. Kyseinen osa ohjauskoodia ei ollut tarpeen Ariane 5:ssä ja oli joka tapauksessa ohjelmoitu poistumaan käytöstä 40 sekuntia laukaisun jälkeen.

Nasan Marsiin lähettämä Climate Orbiter -luotain on viimeisimpiä avaruusmatkailun takaiskuja. Luotain tuhoutui 23.9.1999 syöksyttyään Marsiin. Virheen syyksi selvisi mittayksikkövirhe ohjausrakettien tehon määrittelyssä. Lockheed Martin oli käyttänyt määrittelyissä englantilaisia yksiköitä ja Nasan Jet Propulsion Laboratory puolestaan oletti käytettävän metrijärjestelmän yksiköitä (paunat vs. Newtonit). Tämän johdosta raketti ajautui 80 kilometriä ohi kurssin ja törmäsi Marsiin.

Indeksit matkalla etelään

Vuonna 1982 Vancouverin pörssi otti käyttöön uuden pörssi-indeksin, jota päivitettiin jokaisen kaupan jälkeen. Indeksin alkuarvoksi asetettiin 1000. Indeksin arvo putosi 20 kuukauden kuluessa 520:een.

Syynä oli laskennassa käytetty katkaiseva aritmetiikka: päivitettyä indeksin arvoa ei pyöristetty lähimpään tuhannesosaan vaan arvo katkaistiin ja loput desimaalit unohdettiin. Pyöristystä käyttäen saatiin indeksin arvoksi 1099.

Tappavaa säteilyä

Vuosina 1985-87 aiheutui säteilyhoitoon käytetyn Therac-25 -laitteiston toimintavirheestä useita kuolemantapauksia ja loukkaantumisia. Laitteisto edusti uutta tekniikkaa ja oli aiemmista versioista poiketen kokonaan tietokoneohjattu. Turvallisuuden varmistaminen oli hoidettu ohjelmallisesti aiempien laitemekanismien sijaan. Riskianalyysissä unohdettiin huomioida mahdollisten ohjelmistovikojen vaikutukset toimintaan.

Vuosina 1985-87 tapahtui kuusi massiivista säteilyn yliannostusta potilaille. Säteilymäärät olivat pahimmillaan jopa yli satakertaisia normaaliin säteilyhoitoon verrattuna.

Ongelman syyksi osoittautui laiteoperaattorin käyttöliittymä: jos käyttäjä editoi koneelle annettavia komentoja liian nopeasti, hyväksyi kone virheellisen annostusmääräyksen. Koska annostusmääräystä ei tarkistettu eikä koneessa ollut yliannostuksen havaitsevia sensoreita, ei virhetilannetta havaittu ennen kuin potilaat valittivat säteilyn aiheuttamista akuuteista oireista. Säteilyn yliannostuksesta oli seurauksena ainakin kolme kuolemantapausta.

Ohjuksia väärään kohteeseen

Vuonna 1988 USA:n hävittäjäkone ampui alas Iran Air -lehtoyhtiön Airbus A300B2 -koneen. Lento 655 lähti Iranista Bandar Abbasin lentokentältä ja oli matkalla Dubaihin. Persianlahdella ollut risteilijä USS Vincennes havaitsi lennon Aegis-lennonvalvontajärjestelmässään. Vaikka lento oli jokaviikkoinen, ei sitä löydetty vakiolentojen aikataulusta.

Tietokonejärjestelmä oletti koneen olevan F-14 -hävittäjä, joten risteilijästä lähetettiin pyyntö iranilaiselle F-14 -hävittäjälle tunnistautua. Tällöin matkustajalentokone keskusteli yhä lennonjohdon kanssa.

Vahvistus lentokoneen vihamielisistä aikeista saatiin, kun Aegis-järjestelmä näytti ilmoittavan koneen olevan nopeassa syöksyssä normaalien lentoreittien ulkopuolella kohti Vincennessiä. Todellisuudessa kone oli yhä nousussa ja normaalilla lentoreitillä. Risteilijästä annettiin käsky ampua lentokone alas. Koneessa kuoli 290 ihmistä.

Vuoden 1991 alussa USA ja Irak kävivät sotaa Persianlahdella. Irak ampui Scud-ohjuksia amerikkalaisiin sotilaskohteisiin ja USA käytti torjuntaan Patriot-ilmatorjuntaohjuksia. Kuitenkaan 25. helmikuuta Patriot-ohjus ei osunut kohteeseensa ja Scud-ohjus tappoi 28 amerikkalaissotilasta.

Syyksi osoittautui ohjelmistovika. Patriot-ohjuksessa on kello, joka mittaa ajan kulumista kymmenesosasekunteina käyttäen kokonaislukulaskuria. Ohjusjärjestelmä oli ollut yhtäjaksoisesti toiminnassa yli 100 tuntia. Siis laskurin arvo oli suuruusluokkaa 3,6 miljoonaa.

Patriot-ohjus etsii tulevaa ohjusta alueelta, jonka paikka arvioidaan edellisen mittausarvon perusteella. Kulunut aika määrätään kertomalla aikalaskurin arvo luvulla 0,1. Koska luvun 0,1 binääriesitys katkaistiin 24 bittiin, oli tämän luvun esitysmuodossa suuruusluokkaa 10^{-7} oleva virhe. Tämä luku kerrottiin luvulla $3{,}6 \cdot 10^6$, joten tulokseen tuli virhettä noin 0,3 sekunnin verran. Tässä ajassa Scud-ohjus ehti lentää yli 600 metriä, joten Patriot-ohjus yritti paikantaa tulevaa ohjusta aivan väärältä suunnalta.

Pelataan lautanupotusta

Sleipner A -öljynporauslautta tuottaa öljyä ja kaasua Pohjanlahdella 82 metrin syvyisessä vedessä. Lautta on rakennettu betoniselle alustalle. Alustasta kohoaa neljä tornia, joiden varassa on lautan laitteistokansi.

Lautan alustaa testattiin painolastin avulla 23.8.1991 ennen kannen asennusta paikalleen. Testauksessa alustaan tuli vuoto ja se upposi vuonoon Stavangerin lähellä. Uppoaminen 220 metrin syvyyteen aiheutti järistyksen, jonka suuruus oli 3,0 Richterin asteikolla. Taloudelliset tappiot olivat miljardiluokkaa.

Tutkimuksissa kävi ilmi, että yhteen alustan seinämistä tuli vakava vuoto, jota pumput eivät pystyneet kompensoimaan. Syynä oli suunnittelu- ja rakennusvirhe. Alustan lujuuslaskelmat oli tehty elementtimenetelmällä käyttäen NASTRAN-ohjelmistoa. Alustan osasten liitoskohdan analyysissä oli käytetty vääränlaista elementtimallia, jolloin osaan vaikuttavia voimia aliarvioitiin lähes 50%. Tarkemmissa laskelmissa päädyttiin tulokseen, että rakenteen kestävyys pettäisi 62 metrin syvyydessä. Todellisuudessa rakenne petti 65 metrin syvyydessä.

Virheellistä laskuoppia

Vuonna 1994 havaittiin virhe Pentium-prosessorin jakolaskuoperaation tuloksissa. Virhe esiintyi harvoin, mutta oli potentiaalisesti merkittävä. Virheen suhteellinen suuruusluokka oli pahimmillaan 10^{-5} ja tuloksessa oli tarkkuutta vain 14 bittiä. (Tätä voi verrata Patriot-ohjuksen aritmetiikkavirheeseen.) Intelin maine koki virheen ansiosta pahan takaiskun. Lopulta Intel lupasi vaihtaa virheelliset prosessorit virheettömiin.

Vuonna 1998 Intelin Pentium II ja Pentium Pro -prosessoreissa havaittiin virhe ylivuototilanteen käsittelyssä. Jos liian iso liukuluku yritettiin muuntaa 16-bittiseksi kokonaisluvuksi, prosessorin olisi pitänyt antaa tilanteesta virheilmoitus. Kuitenkaan prosessori ei tehnyt tätä kaikissa tilanteissa, joten virhe jäi havaitsematta. Tätä virhettä voi verrata Ariane 5 -raketin aritmetiikkavirheeseen.

Ohjelmistojen luotettavuus

Tieteen ja tekniikan ohjelmistojen luotettavuutta on selvitetty useissa tutkimuksissa. Eräs perusteellisimmista oli lehdessä *IEEE Computational Science & Engineering* (April−June 1997) esitelty vertailu.

Lehdessä oli tutkittu FORTRAN 66/77 ja C-kielisiä tieteen ja tekniikan ohjelmistoja. Testi koostui kahdesta vaiheesta: ohjelmakoodien staattisesta analyysistä sekä seismisten analyysiohjelmistojen vertailusta. Lähdekoodin staattisessa analyysissä oli tutkittavana 55 FORTRAN-ohjelmistoa ja 68 C-kielistä ohjelmistoa, joissa oli yhteensä 3,3 miljoonaa FORTRAN-kielistä koodiriviä ja 1,9 miljoonaa C-kielistä koodiriviä. Eri sovellusalueita oli 40.

Suurin osa koodeista oli peräisin kaupallisista yrityksistä ja kaikki koodit olivat tuotantokäytössä. Koodien käyttäjät uskoivat koodien olleen täysin testattuja.

FORTRAN-koodeissa oli keskimäärin 12 vakavaa virhettä 1000 koodiriviä kohden; C-koodeissa puolestaan oli 8 vakavaa virhettä 1000 riviä kohden. Eräässä ydintekniikan koodissa oli 140 virhettä 1000 koodiriviä kohden. Tämä koodi onkin lähinnä hyvin kallis satunnaislukugeneraattori.

Proseduurien kutsut olivat yhteensopimattomia joka 7. tapauksessa FORTRAN-koodeissa ja joka 37. tapauksessa C-koodeissa. Ero johtunee lähinnä FORTRAN-koodien suuremmasta argumenttien lukumäärästä sekä automaattisten tarkistusten puutteesta. (Nykyisessä Fortran 95 -standardissa on kehittyneempiä virheentarkistuksia.)

Osa koodeista oli kirjoitettu käyttäen hyvin hämärää ja virhealtista ohjelmointityyliä. Pahimmassa esimerkissä oli 500 000 000 erilaista reittiä ohjelmayksikön läpi. Pienikin muutos tällaiseen koodiin saattaa muuttaa koodin käyttäytymisen täydellisesti. Siten kyseisen koodin ylläpidettävyys on olematon.

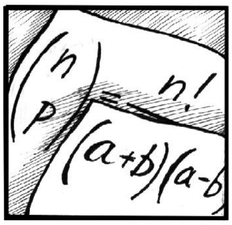
Ohjelmistovertailussa tutkittiin seismistä dataa käsitteleviä ohjelmistoja. Seismistä analyysiä käytetään maaperän rakenteen selvittämiseen, jotta voidaan valita oikea paikka koeporauksille. Yksi poraus voi maksaa kymmeniä miljoonia markkoja, joten tulosten pitäisi olla luotettavia.

Testattavina oli yhdeksän toisistaan riippumattomasti kehitettyä tuotetta. Seismisen datan analyysissä käytetty matemaattinen algoritmi on suhteellisen yksinkertainen ja käytössä kaikissa testatuissa ohjelmistoissa. Testissä annettiin kaikille ohjelmistoille sama syöttödata, jonka jälkeen tuloksia verrattiin sekä koodien kesken että ajamalla samaa koodia eri koneissa ja eri tarkkuuksilla.

Useista koodeista löytyi tyypillisiä ”yhdellä pielessä” indeksointivirheitä datan analyysissä. Toisaalta samalla ohjelmistolla eri koneissa ja eri tarkkuuksilla saadut tulokset olivat muutaman desimaalin tarkkuudella identtiset.

Ikävä kyllä ohjelmistojen keskinäinen vertailu paljasti, että saadut tulokset olivat erilaiset: tuloksissa oli yhteneväisyyttä noin yhden merkitsevän numeron verran. Lisäksi osa koodeista oli ilmeisen virhealttiita: laskennan kuluessa saadut tulokset erosivat yhä enemmän ”keskimääräistästä tuloksista”. Yksikään koodeista ei näyttänyt olevan hyvä kaikissa vertailupisteissä: kullakin tuntui olevan sokeat pisteensä. Yksi koodeista tosin oli johdonmukaisen huono, mutta muut kilpailivat menestyksellisesti huonouden kakkossijasta.

Tämä artikkeli on julkaistu lähes samassa muodossa *Tietoyhteys*-lehden numerossa 1/2001, ja se julkaistaan Solmussa *Tietoyhteys*-lehden luvalla.



Unkarilaisesta matematiikan opetuksesta Suomessa ja Englannissa

Marjatta Näätänen
Dosentti, matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

Miksi juuri Unkari?

Koulutusjärjestelmä on kuin pyramidi, jossa seuraavat vaiheet rakentuvat edellisten päälle. Jos pienen maan koulutusjärjestelmä tuottaa poikkeuksellisen hyviä tuloksia eri tasoilla mitattuna – aivan yläpäähän asti – syynä ovat todennäköisesti hyvät perinteet, varsinkin, jos taloudelliset resurssit ovat olleet niukat. Kansainvälisissä vertailuissa Unkari on tällainen niukoista resursseistaan huolimatta hyvin menestynyt maa. Kielisukulaisuuden takia unkarilaisilla on erittäin lämmin kiinnostus ja halu yhteistyöhön suomalaisten kanssa. Näin ollen Unkari on melko luonnollinen valinta yhteistyökumppaniksi Suomelle.

Unkarilaisen matematiikanopetuksen hyvät tulokset ovat herättäneet kansainvälistä huomiota. Englannissa on jo vuosia tehty kokeilua, jossa on sovitettu unkarilaisia vaikutteita englantilaiseen matematiikan opetukseen. Professori *David Burghes* Exeterin yliopistosta johtaa tätä projektia. Exeterin ryhmä valitsi yhteistyökumppaniksi Unkarin sen jälkeen, kun he olivat käyneet tutustumassa matematiikan opetukseen useissa maissa.

Englantilaisille oli yllätys Unkarissa opetetun ja ymmärretyn matematiikan korkea taso. Tämä päti myös ammattiin suuntautuvalla linjalla, jossa asiaan sopivaa yhteyttä käytettiin koko ajan. Unkarilaisten osoittama itseluottamus ja pystyvyys matematiikassa teki suuren vaikutuksen englantilaisiin.

Englantilaiset tulivat siihen tulokseen, että heillä on paljon oppimista Unkarista ja päättivät yrittää toteuttaa oppeja käytännön tasolla. He totesivat kuitenkin, että samantapaisia huomioita oltaisiin voitu tehdä muistakin maista, joissa on samantapaisia opetusstrategioita.

Verkosta löytyy tietoa tästä hankkeesta osoitteessa

http://www.intermep.org

Unkarin menestyksen avaimet

Unkarissa tiedetään, ettei matematiikkaan ole ”kuninkaan tietä”. Pitkät perinteet, työ ja matemaattisluonnontieteellisten alojen arvostus ovat nostaneet Unkarin matematiikan menestykseen. Jo sata vuotta sitten aloitettiin matematiikkalehti *Kömal*, joka tarjosi matemaattisia ongelmia ja lisämateriaalia toisen asteen kouluille, sekä matematiikkakilpailut. Nämä yhdessä mahdollistivat matemaattisten kykyjen löytämisen ja kehittämisen tasapuolisesti koko maassa.

Millaista on unkarilainen matematiikan opetus ala-asteella?

Matematiikkaa rakennetaan perustasta alkaen kuin taloa, niinpä alkuopetus on ensisijalla, kun uusia menetelmiä aletaan soveltaa. Paitsi peruskäsitteiden omaksumiseen, alkuopetus vaikuttaa voimakkaasti myös asenteisiin. Lastentarhassa tai esikoulussa varmistetaan Unkarissa, että tulevilla ensiluokkalaisilla on koulun aloittamista varten tarvittavat taidot ja tiedot, myös tarpeellinen kyky keskittyä. Näin ensimmäisen vuoden opettaja voi lähteä siitä, että kaikilla on tietty perustaso.

Poikkeuksellisen hyviä tuloksia tuottanut matematiikan opetuksen menetelmä etenee harkitusti ja rakentaa systemaattisesti pohjaa matematiikan käsitteiden omaksumiselle samalla kehittäen lasta monipuolisesti.

Äidinkieltä painotetaan; lapset oppivat vastaamaan kokonaisella lauseella ja kertomaan, miten he päättelevät asioita. Omaa kulttuuria (lasten lorut, sadut, laulut) tuodaan esille, samalla tutustutaan luontoon, eläimiin ja ympäristöön hauskojen päättelytehtävien ja leikkien avulla. Menetelmä on hyvin konkreettinen, leikin- ja askartelunomainen alkuvaiheessa, jolloin apuvälineitä käytetään paljon. Lapset pitävät tämäntyyppisestä toiminnasta ja se auttaa heitä oppimaan keskittymiskykyä sekä luo positiivisen suhtautumisen oppimiseen, matematiikka on suosittu ja tärkeä aine. Koulukurssiin kuuluvia matematiikan käsitteitä lähestytään konkreettisin tavoin, samaa asiaa useilla eri tavoilla. Opettaja johdattelee oppilaita itse oivaltamaan ja pukemaan sanoiksi oivaltamansa asian, mutta vasta siinä vaiheessa, kun mielikuva on kyllin selkeä verbalisointia varten. Jos pohja saadaan rakennettua hyvin, voi sille jatkossa rakentaa.

Myöhemmin koulussa abstraktissa muodossa esiin tulevia matematiikan käsitteitä (esim. funktio, yhtälö, epäyhtälö, lukusuora, jaollisuus) pohjustetaan alkuopetuksessa konkreettisilla apuvälineillä ja hauskoilla tehtävillä. Näin käsitteet ehtivät "kypsyä".

Englantilaisten havaintoja unkarilaisesta matematiikan opetuksesta

Ennen päätöstä yhteistyöstä nimenomaan Unkarin kanssa oli Exeterin ryhmä käynyt useissa maissa tutustumassa matematiikan opetukseen. Tämä kokemus ei kuitenkaan valmistanut heitä siihen radikaalisti erilaiseen opetusstrategiaan, joka vallitsee Unkarissa: Opettaja johtaa luokkaa innolla, huumorilla ja vauhdilla. Lopputulos on erikoinen yhdistelmä kurinalaista, jännittävää ja hauskaa toimintaa.

Ratkaisevan tärkeää on oppilaiden ja opettajan luottamuksen ja yhteistyön tunne. Kaikilla on selkeä ymmärrys siitä, että oppilas on koulussa tehdäkseen työtä ja edistyäkseen. Vallitsevana on koko luokan interaktiivinen opetustapa, johon on siroteltu lyhyitä itsenäisen työskentelyn palasia. Tällä opetustavalla saadaan kehitettyä jo alusta alkaen voimakas koko luokan yhteenkuuluvuuden tunne. Tällöin siis luokka työskentelee yhteistyössä, ja keskustellaan avoimesti virheistä ilman noloutta tai pelkoa joutua naurunalaiseksi. Opettaja seuraa jokaisen oppilaan edistystä koko ajan. Hän ohjaa oppituntia huolellisesti ja tarkkaan, mutta ei ole pelottava, joten oppilaat ottavat mielellään aktiivisen roolin oppimistapahtumassa – esittävät taululla ratkaisuja, selittävät niitä, tarjoavat vaihtoehtoisia menetelmiä, osoittavat virheitä ja yrittävät tarvittaessa selvittää asioita. Luokkahuoneen ulkoisissa järjestelyissä tämä näkyy niin, että oppilaat istuvat pareittain, kasvot opettajaan päin ja taululle on helppo mennä. Oppilaat pääsevät nopeasti taululle esittämään ratkaisujaan ja selittämään niitä, samoin opettajan on helppo liikkua luokassa.

Muita tärkeitä yksityiskohtia olivat huomion kiinnittäminen täsmälliseen, oikeaan matemaattisen kielen käyttöön ja merkintöihin. Kotitehtäviä käytetään, ne tarkastetaan interaktiivisesti joka tunnin alussa ja luokalta kerätään erilaisia ratkaisutapoja. Tunnin aikana annetaan harjoituksia ja ne käydään läpi tehtävä kerrallaan, niin että koko luokka työskentelee aina saman ongelman ratkaisemiseksi – mutta toiset pääsevät pidemmälle kuin toiset.

Kaavojen suhteen on pyrkimyksenä, että oppilaat ymmärtävät ne, jolloin muistaminen on helppoa eikä ole tarvetta kaavakokoelmien käytölle.

Englantilaisten kokemuksia unkarilaisen opetusstrategian toimeenpanosta

Kokeilun aikana on tullut esiin monenlaisia vaikeuksia, mutta kokonaisuutena tulokset ovat olleet hyviä. Paljon työtä on tehty materiaalien valmistuksessa, opettajien koulutuksessa sekä työnohjauksessa. Unkarilaiselle opetustyylille keskeisen koko luokan yhteishengen luomiseen ei riittänyt, että opettaja sai oppilaat esiintymään luokan edessä. Tämä oli tehtävä niin, että oppilaat myös selittivät, miten he olivat päätelleet. Luokka osallistui, oli joko samaa tai eri mieltä ja opettaja otti heti esiin virheet sekä keskusteli vaihtoehtoisista ratkaisumenetelmistä tai yleisistä väärinkäsityksistä. Kaikkia oppilaita pyrittiin rohkaisemaan. Samantapainen oli tilanne opettajan tekemien kysymysten suhteen. Jotkut englantilaiset opettajat luulivat, että oli hyvää interaktiivista opetusta kysyä paljon kysymyksiä, joihin oli selkeät vastaukset. Heidän tuli kuitenkin kysyä myös haasteellisempia kysymyksiä kannustaen luovaan ajatteluun ja kriittiseen keskusteluun.

Muita ilmeisiksi tulleita ongelmia olivat haluttomuus hyväksyä säännöllinen, vaikkakin lyhyt kotityö, kotityön tarkistus tehtävittäin, opettajan ollessa ensin täysin selvillä siitä, mitä kukin oli tehnyt. Vasta tämän jälkeen tehtävä käytiin läpi yhdessä, yleensä taululla avoimesti keskustellen siitä (ei siis niin, että oppilaille annetaan 1–10 tehtävää, opettaja kiertää neuvomassa niitä, jotka pyytävät). Koko luokan interaktiivinen opettaminen on mahdotonta, elleivät oppilaat istu niin, että voivat vaivatta nähdä opettajan, mennä taululle helposti ja opettaja voi mennä jokaisen oppilaan luo ongelmitta, mutta tämä järjestely on vaikeaa monissa täysissä ja huonosti suunnitelluissa luokkahuoneissa. Taulutyöskentelyn keskeisen aseman takia hyvälaatuinen ja laaja taulu oli tärkeä. Opettajan ja oppilaiden taulutyöskentelyn tuli olla selkeää ja täsmällistä, jotta muut saivat hyvän mallin seurattavakseen.

Englannissa opettajien poissaolot olivat ongelma monissa kouluissa, koska sijaisilla ei ollut kokeilua varten tarvittavaa koulutusta. Kaikkien koulujen opettajat eivät tukeneet yksimielisesti opetuskokeilua, eräänä syynä saattoi olla, että kokeilun opetustapa tuo näkyviin myös opettajan kyvyt, joten tavallinen opetustyyli tuntuu helpommalta ja vaarattomammalta. Kokeilussa mukana oleville tehtiin työnohjausta käymällä seuraamassa tunteja ja arvioimalla, miten tehokkaasti opettajat noudattivat opetusstrategiaa. Myös aiemmin tavalliseen tyyliin opetetut oppilaat tarvitsivat aikaa tottuakseen siihen, ettei aikaisempi passiivinen oppimistyyli enää riittänytkään.

Opettajan opetustyyliin tuli kuulua sopiva rytmi ja vauhti, innostus ja huumori, lisäksi jatkuva kaikkien oppilaiden seuranta. Harjoituksessa oli pääpaino omassa päässä tehdyllä työllä, erityisesti alkuvuosina. Laskimet otettiin mukaan myöhemmin, vasta sitten, kun tarvittava pohja oli hankittu. Opettajan tuli käyttää oppitunnille varattu aika hyvin, siis valmistaa oppitunnit ja pitää kaikki tarvittavat välineet käsillä. Opettajan tuli käydä läpi kaikki kysymykset ja harjoitukset etukäteen jotta tietäisi, missä voi syntyä ongelmia. Ollakseen selvillä oppilaiden tasosta hänen tuli testata säännöllisesti oppilaiden tietoja ja kerrata ongelmia aiheuttavia aiheita. Hänen tuli olla koko ajan tietoinen siitä, mitä kukin oppilas tekee, havainnoida itsenäistä työtä kattavasti ja tehokkaasti. Oli myös hyvä keskustella yleisistä virheistä ennenkuin kovin moni oppilas oli ennättänyt tehdä niitä, käydä läpi ja kerrata unohtuneita tai väärinkäsitettyjä käsitteitä heti, kun tuli esiin ongelmia.

Opettajan tuli saada mahdollisimman moni oppilas mukaan osallistumaan oppituntiin ja työskentelemään taululla, kysellä tehokkaasti, johdatellen oppilaita ajattelemaan itsenäisesti sekä yhdistää matematiikka oppilaan kokemuksiin ja luokkahuoneen ulkopuoliseen maailmaan. Opettajaa kehotettiin antamaan tunnustusta luovuudelle ja hyvälle työlle sekä kertaamaan tunnin lopuksi oppitunnin pääkohdat. Unkarilainen opetustyyli vaatii siis hyvin paljon opettajalta.

Englantilaiset huomasivat, että opetusvideot hyvin pidetyiltä oppitunneilta olivat erittäin tarpeellisia ja opettajat pitivät näistä paljon. Samalla seudulla olevien opettajien ryhmät tukivat toisiaan, aina kuitenkaan koulujen rehtorit eivät olleet myötämielisiä. Kaikki opettajat eivät ottaneet käyttöön kaikkia suosituksia.

Työstään englantilaiset saivat tuloksia. Merkittävää tulosten parantumista tapahtui, kun opettajat tulivat tutummiksi oppimateriaalin ja opetustyylin kanssa. Myös erittäin huonolla alueella olevia kouluja oli mukana ja niissä tapahtui jopa radikaalia oppimistulosten nousua. Oppilaiden luottamus omiin matematiikan taitoihinsa ja positiivinen suhtautuminen lisääntyivät huomattavasti ja tulokset paranivat. Englantilaiset seurasivat innostuneina unkarilaisten menetelmiä, mutta huomasivat, että pitkäaikainen menestys riippuisi merkittävien muutosten teosta myös alkuopetuksessa.

Unkarin koulujärjestelyistä

Unkarissa oppilaat tulevat kouluun 6-vuotiaina, yleensä kahden lastentarhavuoden jälkeen. Tämän tarkoitus on valmistaa koulunkäyntiin keskittymällä kielellisiin kykyihin, kuunteluun, keskittymiseen, hiljaa istumiseen, ohjeiden noudattamiseen. Matematiikassa luvut 1–10 esiintyvät, mutta niitä ei kirjoiteta.

Yleensäkin symbolit otetaan käyttöön vasta, kun niitä on pohjustettu eri tavoin, ala-asteella hyvin konkreettisesti. Matematiikassa pyritään rakentamaan kunnon perustaa, korostetaan merkintöjä, logiikkaa, käsitteitä, eikä kiirehditä suuriin lukuihin, esim. ensimmäisenä vuonna käsitellään vain luvut 1–20, mutta epäyhtälön ja yhtälön käsitteet ovat mukana. Tehokkaat laskutaidot saadaan tulokseksi kehitetystä vahvasta matematiikan pohjasta. Pitkäjänteisyys näkyy opetuksessa ja algebraan valmistautumisen saattaa nähdä jo aivan alkuvaiheesta alkaen. Äidinkielen käyttöä harjoitetaan esim. niin, että suulliseksi vastaukseksi annetaan kokonainen lause eikä vain vastausta ja oppilaat kertovat, miten ovat asian päätelleet. Kaikki opettajat, ensimmäisestä vuodesta lähtien, ymmärtävät matematiikan peruskäsitteet (ainakin osittain siksi, että ovat opiskelleet melko laajasti itse sitä jo ennen opettajankoulutusta). Oppilaille, joilla on oppimisvaikeuksia, annetaan iltapäivällä lisäharjoitusta muiden aktiviteettien sijasta, koska matematiikkaa ja äidinkieltä pidetään niitä paljon tärkeämpinä oppiaineina. Tukea tarvitseville oppilaille annettiin heille muokattuja lisäharjoitustehtäviä.

Ala-asteella käytettävät oppikirjat:

Varga-menetelmä on antanut paljon vaikutteita kirjasarjoihin. *Sandor Hajdulla* on tällä hetkellä suuri markkinaosuus Unkarin kouluissa käytettävistä kirjoista. Hänen kirjasarjansa kattaa koko kouluajan. Uusiakin kirjoja on juuri tulossa markkinoille. Ala-asteella Varga-menetelmää ovat soveltaneet oppikirjoihinsa *Eszter Neményi* ja *Márta Oravecz*. Edellytyksenä menetelmän käyttöön on Unkarissa opettajan kouluttautuminen menetelmän käyttöön. Myös luvuilla manipulointiin erikoistunut oppikirja esiintyy ala-asteella, eivätkä monet opettajat halua luopua siitä, koska sen mukaan opettaminen on vaivatonta.

Alkuopetuksen tuloksia Englannissa

Ensimmäistä vuotta tarkkaan ohjeiden mukaan opettaneet englantilaiset opettajat antoivat palautetta tyyliin: ”Olen opettanut aikaisemmin ensimmäistä luokkaa ja verratessani nykyisen tyylin tuloksia aikaisempaan olen aivan ällistynyt nykyisen luokkani saavutuksista.” ”Eivät vain parhaaseen ja keskiryhmään kuuluvat lapset opi päässälaskuja ällistyttävällä tavalla, vaan myös heikoimmat. He näyttävät kehittäneen nopeat, vilkkaat aivot, jotka saavat minut häpeämään omiani.”

Joillain kouluilla ja opettajilla oli vaikeuksia toteuttaa kokeilun opetustyyliä. Useille opettajille radikaaliin ja menestyksekkääseen opetustyyliin muuttamiseen riittää, että menetelmä selitetään ja esitetään videoiden avulla, yksityskohtainen kirjallinen tuki annetaan, ja että lisäksi erityisesti alkuopetuksessa annetaan yksityiskohtaiset tuntisuunnitelmat. Joidenkin opettajien opetustyylin muuttumiselle oli välttämätöntä opettajatoverin suorittama havainnointi oppitunnilla. Havainnoinnin ei tietenkään tule olla opettajalle uhkaavaa, eikä kritisoivan rehtorin tekemää, parasta olisi taitavan opettajan oppitunnin seuranta toisessa koulussa. Ongelmia tuottivat opettajien ja oppilaiden poissaolot, koska muutaman oppitunnin poissaolo voi aiheuttaa dramaattisia seurauksia oppilaan etenemiselle ja asian ymmärtämiselle jatkossa.

Englantilainen tutkijaryhmä toteaa tyytyväisenä seurantatutkimuksen tuloksiin, että opetustyylillä saa hyviä tuloksia, vaikka sen olennainen osa on tuotu maahan toisesta maasta ja sovellettu Englantiin. Englantilaiset ajattelevat, että tehokkain keino levittää opetuskäytäntöjä on opettajankoulutuksen kautta sekä toivovat, että lähitulevaisuudessa koittaa aika, jolloin Englanti on ylpeä matematiikan opetuksestaan ja kansalaiset luottavat kykyihinsä.

Englantilainen tutkimusryhmä päätyi seuraaviin suosituksiin Englannin matematiikan opetuksen suhteen:

Oppisisällöt:

1. Systemaattisempi käsittely, asioita käsiteltävä syvällisemmin eikä hypittävä edestakaisin.
2. Selkeästi määritellyt työtavoitteet eri suoritustasoille.
3. Enemmän painoa käytännön laskutaidolle, erityisesti niille, jotka eivät jatka matematiikan opintojaan yli 16 ikävuoden.

Matematiikan opetus:

1. Korostettava enemmän opetettavan perusidean tai käsitteen selkeää, täsmällistä kuvausta.
2. Virheetön, tarkka, järjestelmällinen tyyli puhutun ja kirjoitetun matematiikan suhteen.
3. Rajoitettu, mutta tehokas laskimen käyttö.
4. Rohkaistaan oman pään käyttöä ja tärkeiden faktojen ja kaavojen omaksumista ”ulkoa”.
5. Asiaan hyvin kuuluvien sovellusten käyttö kurssitöinä ja uusien aiheiden motivoinnissa.

Opetustyyli:

1. Enemmän koko luokan opetusta, vähemmän itsenäistä työtä, mutta hyvin suunniteltu kokonaisuus.
2. Selkeät tavoitteet ja rakenne kaikille oppitunneille.
3. Kotityö olennaisena oppimisen osana.
4. Yksittäisen oppilaan virheet käyttöön koko luokan opetuksessa.
5. Opettaja seuraa koko ajan jokaista oppilasta ja rohkaisee mahdollisimman monia, myös taululla koko luokan edessä työskenteleviä oppilaita.

Opetukseen liittyy myös säännöllinen oppimistulosten testaus.

Unkari on liittymässä EU:hun

Unkarissa on tällä hetkellä paljon tulevaisuuden kehityksestä huolestuneita matematiikanopettajia. Läntiset tuulet otetaan helposti vastaan ilman kritiikkiä ja oma, huolella kehitetty ja hyvin toimiva järjestelmä voi jäädä huonoja tuloksia tuottavien muotivirtausten ja säästöjen jalkoihin.

Kokemuksia Suomessa

Ensimmäisen luokan opetus Suomen kokeilussa aloitettiin syksyllä 2000 useissa kouluissa, pääosin Jyväskylässä ja Polvijärvellä unkarista käännetyillä Neményi–Oravecz oppikirjoilla. Unkarilainen kustantaja Nemzeti tankönyvkiado on suhtautunut hyvin ymmärtäväisesti varsin pienin resurssein aloitettuun kokeiluumme ja antanut kääntää oppikirjoja. Ehtona on, että käännöksiä käytetään vain nyt käynnissä olevaan kokeiluun, eikä niitä levitetä tämän ryhmän ulkopuolelle.

Opettajien kokemukset ovat olleet oikein hyviä ja he ovat innostuneita uuden menetelmän opettelun aiheuttamasta lisätyöstä huolimatta. Ainoa ongelma on, että jotkut lapset eivät ole tottuneet monisteiden käyttöön, vaan haluaisivat ”oikean” kirjan. Kirjojen hankkiminen kokeilua varten on kustannussyistä täysin mahdotonta. Tutkimustietoa ei vielä ole tuloksista, mutta sekä opettajien, vanhempien että lasten ensivaikutelmat ovat olleet kaiken kaikkiaan hyviä. Vaikuttaa myös siltä, että menetelmällä on kehittävä siirtovaikutus äidinkieleen.

Solmusta löytää yksityiskohtaista tietoa siitä, miten ensimmäisen vuoden matematiikan asiat opetetaan unkarilaiseen tyyliin. Ei kiirehditä suuriin lukuihin, ensimmäisenä vuonna luvut 0–20, ja pohjaa rakennetaan huolella. Tämä antaa aikasäästöä myöhemmin, sitten kun jo valmiiksi pohjustetut asiat tulevat vastaan. Käsitteiden omaksuminen abstraktimmalla tasolla varmistuu, kun niitä on lähestytty aikaisemmassa vaiheessa konkreettisesti.

TIMSS

Tyypillinen ero Unkarin ja Suomen oppimistuloksissa tuli esille tuoreessa kansainvälisessä vertailussa (TIMSS). Ensimmäisen asteen yhtälön $12x - 10 = 6x + 32$ osasi suomalaisista 7. luokkalaisista ratkaista vain 24 prosenttia, unkarilaisista 74, TIMSS:iin osallistuneiden maiden keskiarvo oli 44 prosenttia. Symbolien (kuten edellä x) käsittely on edellytys jatkon ymmärtämiselle ja oppimiselle, joten asia on aivan olennainen matematiikan taitojen kannalta ja tulee vastaan opintoja jatkettaessa. Unkarilaisessa menetelmässä näkyy ensimmäisen asteen yhtälön pohjustus jo ensimmäiseltä luokalta alkaen. TIMSS:in tuloksia tarkasteltiin matematiikkalehti Solmun numerossa 1/2001.

Unkarilaisen menetelmän vaarat Suomessa

On ollut erittäin ilahduttavaa, että opettajamme ovat itse huomanneet tarvitsevansa vahvempaa matematiikan pohjaa ja ovat halukkaita saamaan lisäoppia. Pystyäkseen pohjustamaan käsitteitä, niiden on oltava itsellä kirkkaana mielessä. Unkarilaisen menetelmän onnistunut käyttö edellyttää opettajilta paljon työtä ja unkarilaisten oppimateriaalien tarkkaa seuraamista. Unkarilainen, vuosikymmeniä opetustyötä tehnyt opettaja voi hyvin toimia ilman oppikirjaa, mutta suomalaisen opettajan, joka vasta opettelee menetelmän käytön alkeita, on parasta pitää kurinalaisesti kiinni valmiiksi kehitetystä oppimateriaalista.

Mielestäni on olemassa melkoinen vaara, että suomalaiset opettajat innostuvat unkarilaisen menetelmän leikistä ja hauskuudesta sekä haluavat jättää omat sormenjälkensä siihen esim. muuttelemalla opiskelujärjestystä ja poimimalla hosuen makupaloja sieltä täältä. Menetelmä on kuitenkin systemaattinen ja pitkän kehittelyn tulos. Sen hajottaminen palasiin ja eri järjestyksessä uudelleen kokoaminen tai välistä osan poisjättäminen merkitsisi ehkä vain huononnusta verrattuna nykyisin käytössä olevaan, lukuja painottavaan käytäntöömme. Englantiin valittu Hajdun kirjasarja on jonkin verran vaativampi ja hiukan vähemmän leikinomainen kuin Neményi–Oravecz. Erot eivät ole kuitenkaan suuret.

Pinnalta katsoen voi unkarilaisessa luokkahuoneessa äkkiseltään vieraileva luulla, että kyse on paluusta vanhaan suomalaiseen opetustyyliin. Vaikka luokkahuoneen pulpettijärjestelyt näyttävätkin ulkoisesti samanlaiselta kuin omamme vuosia sitten, ei kyse ole samasta opetustyylistä!

Pohjatietoa Unkarista

Unkarissa matematiikan opettajat ja yliopistomatemaatikot kuuluvat samaan järjestöön, János Bolyai -matemaattiseen yhdistykseen. Yhdistys julkaisee Unkarin 107 vuotta vanhaa matematiikka- ja fysiikkalehteä. Kömal sisältää nykyisin 37 000 sivua. Tämän vuoden kuluessa tulee valmiiksi Unkarin kouluverkon käyttöön Kömaliin kerätyt 20 000 eri tasoista matematiikan ja fysiikan tehtävää ratkaisuineen ja 3 000 lukiotasoista artikkelia. Kömal säilyttää satoja vuosia vanhan unkarilaisen matematiikan opetuksen ja kehittämisen tradition ja on ainutlaatuinen Euroopassa. Noin puolet sen tehtävistä on käännetty englanniksi, mutta ratkaisut ja artikkelit ovat yhä vain unkariksi. Kömalin osoite on

http://komal.elte.hu.

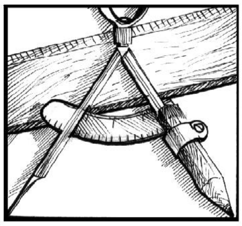
Yleistä tietoa Unkarin korkeakouluista löytyy osoitteesta

http://sulinet.hu.

Pieni maa – suuret aivot

Tutkijatasolla noin kymmenen miljoonan asukkaan Unkarilla on ehkä maailmanennätys laskettaessa ensi luokan matemaatikkojen lukumäärää suhteutettuna väkilukuun ja yli kymmenen Nobelin palkintoa aloilla, jotka vaativat hyvää matemaattista pohjaa. Taloudellinen murros Unkarissa on kuitenkin nyt hyvin voimakas, myös koululaitos näyttää joutuvan kärsimään säästöistä. Tulevaisuudessa voi pätevistä opettajista tulla pulaa Unkarissakin. Jotkut koulujen tulevaisuuden kehityksestä huolestuneet unkarilaiset sanovatkin jo, että heidän varmaan täytyy tulevaisuudessa ostaa takaisin oma menetelmänsä ulkomailta sitten, kun he ovat itse menettäneet korkean koulutustasonsa. Nykyinen korkea taso on tärkeä syy sille, että esim. Nokia on laajentanut tutkimus- ja kehitystoimintojaan Unkariin. Unkarilaiset ovat ylpeitä matematiikan osaamisestaan, he käyttävät siitä sanontaa *Pieni maa – suuret aivot*.

Osia kirjoituksesta on julkaistu lehdessä *Dimensio* n:o 2/2001.



Diofantoksen ongelmat

Kalevi Suominen
Professori, matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

1. *Etsittävä kaksi lukua, joista ensimmäisen kuution ja toisen luvun summa on sama kuin lukujen summan kuutio.*

2. *Jaettava annettu luku kahteen osaan, joiden tulo on erään luvun kuution ja itse luvun erotus.*

Nämä tehtävät ovat esimerkkejä yli sadasta antiikin matematiikan ongelmasta, jotka kreikkalainen matemaatikko Diofantos kokosi nimellä *"Aritmetiikka"* tunnettuun tehtäväkokoelmaansa. Teos on säilynyt vain osaksi, eikä sen historiaa tunneta. Itse Diofantos eli Egyptin Aleksandriassa luultavasti roomalaisajan loppupuolella, erään arvion mukaan 200-luvulla.

Yhteistä kaikille Diofantoksen ongelmille on, että niissä luvuilla tarkoitetaan rationaalilukuja; reaalilukuja ei tehtäviä laadittaessa vielä tunnettu. Siksi niiden ratkaisemiseen on käytettävä erilaisia keinoja kuin nykyisin tavanmukaisissa tehtävissä.

Esimerkiksi tehtävä 1 on nykyaikaisin merkinnöin helppo muotoilla yhtälöksi

$$x^3 + y = (x+y)^3. \tag{1}$$

Tämä on kolmannen asteen algebrallinen yhtälö kahden tuntemattoman, x:n ja y:n suhteen. Se toteutuu aina, kun $y = 0$, mutta on selvää, että Diofantos ei etsinyt tällaista ratkaisua. Jos luvulle x annetaan jokin kiinteä, riittävän pieni arvo, voidaan y aina valita niin, että yhtälö toteutuu. Mitään takeita ei kuitenkaan ole siitä, että saatu ratkaisu olisi rationaalinen. Asiaa ei auta, vaikka y valittaisiin ensin rationaaliseksi ja sitten ratkaistaisiin x.

Vaikka tehtävä siis vaikuttaakin aluksi helpolta, kun siinä asetetaan vain yksi ehto kahdelle tuntemattomalle, niin tällainen vapaus osoittautuukin ratkaisun suurimmaksi esteeksi! Itse asiassa voidaan ajatella, että ratkaisujen rationaalisuus on lisäehto, joka vastaa vähintään yhtä yhtälöä. Tämä on luonteenomaista kaikille Diofantoksen ongelmille.

Ratkaisut

Diofantoksen esittämät ratkaisut perustuvat siihen, että asetetaan uusia ehtoja tuntemattomien välille, kunnes yhtälöitä on yhtä monta kuin tuntemattomia. Silloin ratkaisuja jää vain äärellinen määrä. Jos ehdot on vielä valittu siten, että ratkaisu on yksikäsitteinen, niin sen löytäminen ei edes vaadi juurenottoa ja tulos on rationaalinen.

Esimerkiksi yhtälöstä (1) saadaan sijoituksella $y = 2x - 1$ kolmannen asteen yhtälö

$$0 = 26x^3 - 27x^2 + 7x. \tag{2}$$

Tällä on kolme ratkaisua: Triviaali juuri $x = 0$, arvoa $y = 0$ vastaava toinen juuri $x = 1/2$ ja lopuksi etsitty juuri $x = 7/13$. Ratkaisu on rationaalinen, koska se on oleellisesti yksikäsitteinen, kun arvoja $x = 0$ ja $y = 0$ vastaavia erikoistapauksia ei lasketa.

Tehtävä 2 voidaan käsitellä samalla tavoin. Jos annettu luku on 6, kuten Diofantos olettaa esimerkissään, ja sen osat ovat x ja $6-x$, niin ratkaistavaksi tulee yhtälö

$$y^3 - y = x(6-x). \tag{3}$$

Lisäehdon $y = 3x - 1$ avulla voidaan eliminoida y, ja jäljelle jää yhtälö

$$27x^3 - 26x^2 = 0. \tag{4}$$

Kun kaksinkertaista triviaalia juurta $x = 0$ ei oteta huomioon, saadaan ratkaisuksi $x = 26/27$, joka ainoana epätriviaalina juurena on välttämättä rationaalinen.

Edellä käsitellyt tehtävät osoittavat, että Diofantoksen ongelmien ratkaisu on helppoa – ainakin sen jälkeen, kun on keksitty sopiva lisäehto tuntemattomien välille. Eteen tuleekin väistämättä kysymys, miten tällainen ehto löydetään. Diofantoksen kirja ja muut antiikin lähteet eivät anna mitään viitteitä yleisestä menetelmästä, vain suuren joukon yksittäisiä esimerkkejä.

Geometrinen tulkinta

Diofantoksen ongelmien ratkaisuperiaatteen ymmärtämiseksi on hyödyllistä tulkita yhtälöt geometrisesti. Kahden tuntemattoman yhtälöt, kuten esimerkiksi (1) ja (3), kuvaavat algebrallisia tasokäyriä. Usein tuntemattomia on useampia, mutta samalla myös ehtoja on enemmän ja ne esittävät edelleen algebrallista käyrää jossakin korkeampiulotteisessa avaruudessa.

Ensimmäinen vaihe Diofantoksen ongelman ratkaisussa on tavallisesti käyrän jakaminen komponentteihinsa. Esimerkiksi kumpikin yhtälöistä (1) ja (3) on kolmatta astetta, mutta niiden esittämät käyrät ovat oleellisesti erilaiset. Jälkimmäinen on jaoton, kun taas edellinen jakautuu kahdeksi komponentiksi: suoraksi $y = 0$ ja ellipsiksi

$$3x^2 + 3xy + y^2 = 1. \tag{5}$$

Tehtävä yksinkertaistuu, kun kutakin komponenttia tarkastellaan erikseen. Niinpä edellä yhtälön $y = 0$ ratkaisut ovat triviaaleja eivätkä kelpaa vastaukseksi; tutkittavaksi jää siten vain ellipsi (5).

Rationaaliset pisteet

Algebrallisilla käyrillä on yleensä ääretön määrä pisteitä, joiden koordinaatit ovat reaalilukuja. Myös sellaisia pisteitä on paljon, joiden toinen koordinaatti on rationaalinen. Pisteitä, joiden kumpikin koordinaatti on rationaalinen, on sen sijaan usein vain äärellinen määrä. Tällaisia pisteitä sanotaan käyrän *rationaalisiksi pisteiksi*. Geometrisesti tarkasteltuna Diofantoksen ongelma on siis sama kuin *algebrallisen käyrän rationaalisten pisteiden määrittäminen.*

Kun ratkaistaan kahden tuntemattoman yhtälöitä, myös jokainen lisäehto tuntemattomien välillä esittää tasokäyrää. Esimerkiksi tehtävän 1 ratkaisussa ehto $y = 2x - 1$ kuvaa suoraa. Lisäehdon toteuttavat ratkaisut ovat siten samat kuin käyrien yhteiset pisteet. Diofantoksen ongelman ratkaisemiseksi on siis asetettava lisäehto siten, että *käyrien leikkauspisteet ovat rationaaliset.*

Ensi näkemältä tämä ajatus ei juuri vaikuta käyttökelpoiselta. Kun ollaan vasta etsimässä rationaalisia pisteitä, miten niitä voitaisiin käyttää hyväksi? Tilanne ei kuitenkaan ole toivoton. Käytännössä on usein mahdollista löytää eräitä ”ilmeisiä” rationaalisia pisteitä, jotka eivät kelpaa etsityiksi ratkaisuiksi. Tällaisia ovat tyypillisesti käyrän leikkauspisteet koordinaattiakselien kanssa. Esimerkiksi yhtälöllä (5) on ilmeiset rationaaliset ratkaisut $x = 0$ ja $y = \pm 1$.

Triviaalien, ilmeisten ratkaisujen lisäksi tarvitaan tietenkin vielä kelvollisiakin ratkaisuja. Miten voidaan taata, että tällaiset toistaiseksi tuntemattomatkin käyrien leikkauspisteet olisivat rationaalisia? Ongelman ratkaisee seuraava tulos:

Jos kahden käyrän leikkauspisteet ovat rationaaliset mahdollisesti yhtä pistettä lukuunottamatta, niin ne kaikki ovat rationaalisia.

Tämän todistamiseksi tarvitsee vain eliminoida toinen tuntemattomista. Tällöin saadaan yhden tuntemattoman polynomiyhtälö, ja sen juuret mahdollisesti yhtä lukuunottamatta ovat rationaaliset. Koska juurien summa on rationaalinen, on viimeinenkin juuri välttämättä rationaalinen.

Ratkaisuperiaate

Edellä esitetyn perusteella voidaan nyt ilmaista *Diofantoksen ongelmien ratkaisuperiaate*: Etsitään ongelmaan liittyvän käyrän ”ilmeiset” rationaaliset pisteet ja asetetaan lisäehtoa vastaava käyrä kulkemaan niistä mahdollisimman monen kautta. Jos tämä on mahdollista tehdä siten, että yhtä lukuunottamatta kaikki käyrien leikkauspisteet ovat näitä rationaalisia pisteitä, niin myös viimeinenkin leikkauspiste on rationaalinen.

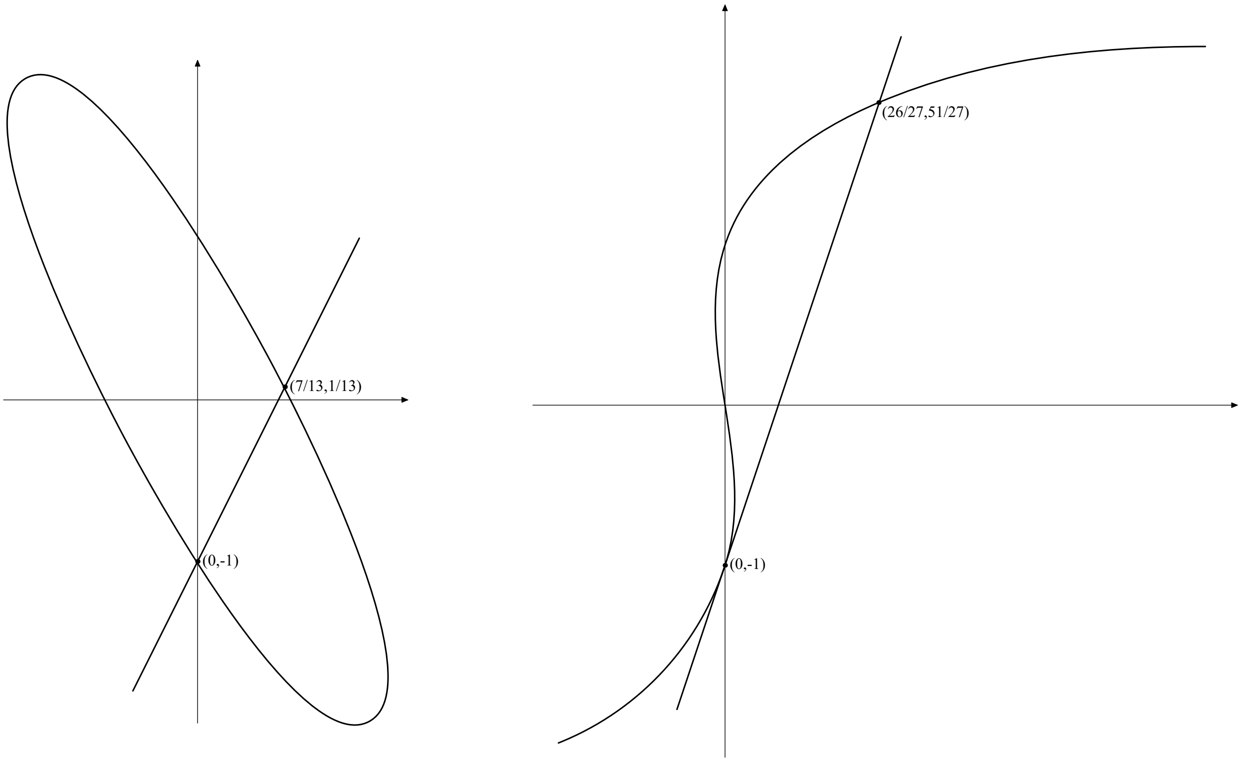
Esimerkiksi tehtävän 1 ratkaisussa asetettiin lisäehto $y = 2x - 1$. Se kuvaa suoraa, joka kulkee ellipsin (5) triviaalin rationaalisen pisteen $(0, -1)$ kautta. Tämän ohella se leikkaa ellipsin vain yhdessä pisteessä, kuten jo edellä nähtiin, ja tämä piste $(7/13, 1/13)$ on myös rationaalinen.

Tarkastelu osoittaa lisäksi, että suoran kulmakerroin voidaan valita vapaasti. Siihen käy mikä tahansa rationaaliluku. Näin ellipsillä on ääretön määrä rationaalisia pisteitä, jotka voidaan esittää rationaalisen parametrin avulla. Algebrallisia käyriä, joilla on tämä ominaisuus, sanotaan *rationaalisiksi käyriksi*. Moniin Diofantoksen esittämiin ongelmiin liittyvät käyrät ovat rationaalisia, ja siten niillä on paljon ratkaisuja Diofantoksen kuvaamien lisäksi.

Tehtävä 2 osoittautuu oleellisesti erilaiseksi. Aluksi havaitaan, että käyrä (3) leikkaa y-akselin rationaalisissa pisteissä $(0, \pm 1)$ ja $(0, 0)$. Jos nyt asetetaan lisäehto, joka kuvaa esimerkiksi pisteen $(0, -1)$ kautta kulkevaa suoraa, niin tämä leikkaa käyrän (3) vielä kahdessa pisteessä. Nämä leikkauspisteet toteuttavat toisen asteen yhtälön, ja siten ne eivät yleensä ole rationaalisia.

Ongelma ratkeaa, kun suora valitaan kulkemaan kahden rationaalisen pisteen kautta. Ratkaisun kannalta on tärkeää huomata, että näiden ei tarvitse olla eri pisteitä. Kahden käyrän leikkauspiste voi näet olla moninkertainen, kun käyrät sivuavat toisiaan. Niinpä käyrän (3) tapauksessa lisäehdon kuvaajaksi voidaan valita tangentti pisteessä $(0, -1)$. Tämän yhtälö on $y = 3x - 1$, jota jo edellä käytettiin. Vastaava menettely on mahdollinen myös muiden rationaalisten pisteiden $(0, 0)$ ja $(0, 1)$ kohdalla. Näin saaduista rationaalisista pisteistä voidaan edelleen johtaa uusia joko tangenttien avulla tai sitten kahden eri pisteen kautta kulkevilla sekanteilla.

Tehtävän 2 tapauksessa lisäehtojen valinnassa on siis paljon vähemmän valinnan vapautta kuin tehtävässä 1. Yhtälön (3) kuvaama käyrä on esimerkki ns. *elliptisestä käyrästä*. Nimi tulee siitä, että käyrän pisteitä voidaan esittää *elliptisillä funktioilla*; itse käyrä ei ole ellipsi. Tällaisen käyrän rationaalisten pisteiden joukko ei välttämättä ole ääretön.



Kuva 1: Tehtävien 1 ja 2 ratkaisut annetuilla lisäehdoilla, yhtälö (5) vasemmalla ja yhtälö (3) oikealla.

Lisätehtäviä.

1. Etsittävä Diofantoksen ongelman 1. kaikki rationaaliset ratkaisut.

2. Etsittävä Diofantoksen ongelman 2. ratkaisu, kun annettu luku ei ole 6.

3. Etsittävä useita rationaalisia pisteitä käyrältä (3).

4. Etsittävä kaksi lukua, joiden summan suhde niiden neliöiden summaan on annettu luku.

5. Etsittävä kaksi lukua, joiden summa on sama kuin niiden kuutioiden summa.

Suomen ja sen sukukielten lukusanoista

Pirkko Suihkonen
Dosentti, yleisen kielitieteen laitos, Helsingin yliopisto
Tutkija, Max Planck Institute for Evolutionary Anthropology

Taustaa

Kaikissa tunnetuissa kielissä on ainakin joitakin lukumäärää merkitseviä sanoja. Köyhin järjestelmä on tunnistettu eräässä Tasmaniassa puhuttavassa kielessä, jossa erotetaan luvut 1, 2 ja $2+1$, jolla on merkitys 'monta'. Uudessa Guineassa on kieliä, joissa lasketaan kymmeneen yhdistämällä muutamia peruslukusanoja: 1, 2, $2+1$, 4, $4+1$, $4+2$, $4+(2+1)$, $4+(2+2)$, $4+(2+1)+2$ ja 10 (Sasse 1999).

Varsin yleistä on, että laskemisjärjestelmän kehittymisvaiheessa on hyödynnetty sormia ja varpaita ja myös muita ruumiinjäseniä lukumäärän määrittelyn apuna. Haruaissa, jota puhutaan Uudessa Guineassa, on käytössä kolme lukujärjestelmää. Vanhin järjestelmä käsittää vain kaksi jäsentä, morfeemit, joilla on merkitykset 'yksi' ja 'kaksi'. Kahta suurempia lukuja muodostetaan yhdistämällä tai reduplikoimalla näitä kahta peruselementtiä. Toinen järjestelmä on ruumiin jäsenten laskemisen avulla muodostettu järjestelmä, jossa lasketaan tavallisesti vasemman käden pikkusormesta lähtien aina 18:aan, jota osoitetaan oikean käden ranteella, ja sitten taas takaisin 36:een. Tämä järjestelmä on käytössä myös Haruain naapurikielessä. Kolmas käytössä oleva järjestelmä on alueella puhuttavan pidginenglannin numerojärjestelmä, jota käytetään myös puhuttaessa 30:a suuremmista luvuista (Comrie 1999). Eräässä mikronesialaisessa kielessä on käytössä oma lukujärjestelmänsä kalojen ja kaikkeen kaloihin liittyvän laskemiseen ja toinen lukujärjestelmä, jota käytetään kaikkea muuta laskettaessa (Hurdford 1987: 165). Eri lukujärjestelmien käytöstä eri tarkoituksiin on esimerkkinä binäärijärjestelmän hyödyntäminen sähköisessä tiedonvälityksessä.

Uralilaisten kielten lukusanoista

Suomessa, kuten monissa muissakin kielissä, lukusanat muodostavat suljetun sanaluokan, jossa uusia sanoja muodostetaan tietyistä peruselementeistä erilaisten operaatioiden avulla. Lukusanojen lisäksi kielissä on myös määrää osoittavia pronomineja ja pronominaalisesti käytettyjä adjektiiveja (suomen kielessä tällaisia ovat esimerkiksi pronominit *moni*, *muutama*, *jokainen* tai substantiivi *pari*, joka käyttäytyy kuten lukusanat).

Kielentutkimuksessa voidaan tutkia lukusanoja hyvin eri tavoin ja erilaisista näkökulmista. Kielihistorian tutkijat tutkivat sitä, miten lukusanat ovat muodostuneet ja kehittyneet, ja millainen suhde niillä on kieltä puhuvan väestön kulttuuriin. Teoreettinen kielitiede on kiinnostunut mm. siitä, millaisia järjestelmiä, rakenteita, sääntöjä ja suhteita lukusanoihin, määrää osoittaviin pronomineihin ja lukujärjestelmiin liittyy. Myös varsinaisissa lukujärjestelmissä on suuria eroja, vaikka lukujärjestelmien perustyypit, kuten länsimaisissa käytössä oleva kymmenjärjestelmä, ovatkin levinneet laajalle.

Uralilaiset kielet jaetaan perinteisesti suomalais-ugrilaisiin ja samojedikieliin:

1. suomalais-ugrilaiset kielet:

   a) saamelaiskielet (pohjoissaame, inarinsaame, koltansaame, eteläsaame, luulajansaame, uumajansaame, piitimensaame, kildininsaame (kiltinänsaame) ja turjansaame),

   b) itämerensuomalaiset kielet (karjala (aunuksenkarjala ja vienankarjala), vepsä, vatja, liivi, viro ja suomi),

   c) mordvalaiskielet ersä ja moksha,

   d) marilaiskielet itämari ja länsimari,

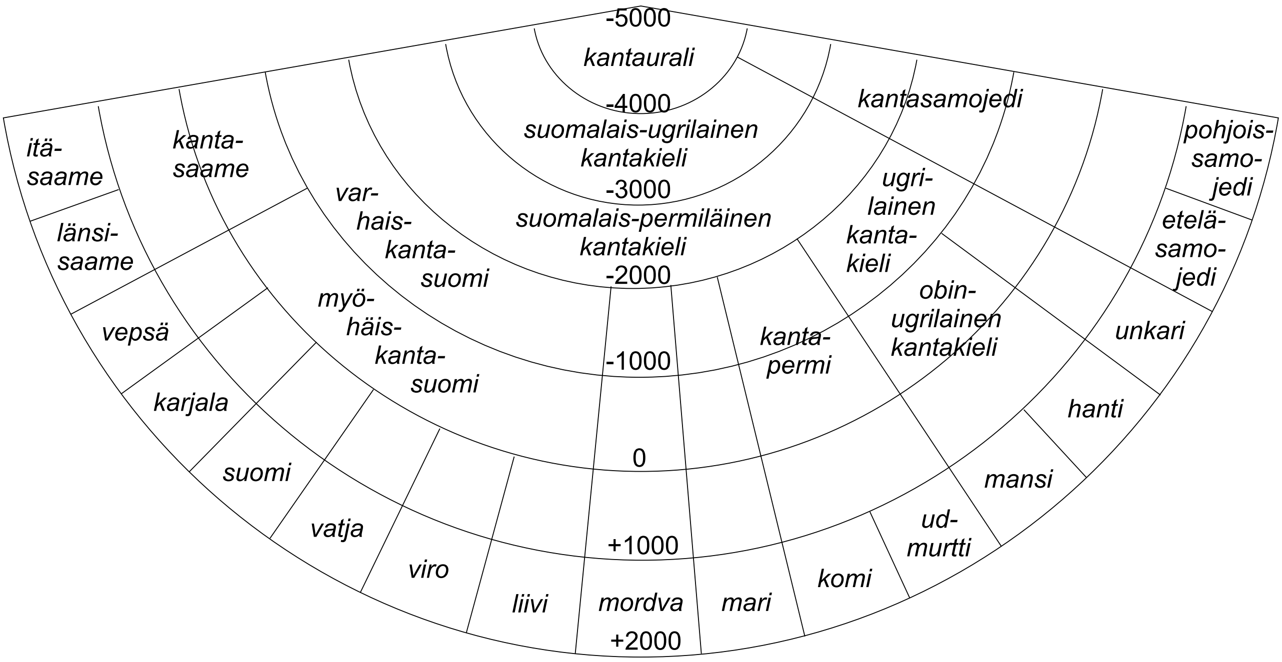
   e) permiläiset kielet udmurtti, komisyrjääni ja komipermjakki,

   f) ugrilaiset kielet: obinugrilaiset kielet hanti ja mansi (kumpikin sisältää useita eri murteita, joita voidaan pitää eri kielinä), sekä unkari;

2. samojedikielet:

   a) pohjoissamojedilaiset kielet: nenetsi, enetsi, nganasani, sekä

   b) eteläsamojedilaisen ryhmän ainoa elossa oleva kieli selkuppi.



Kuva 1: Kaavio vielä elävien suomensukuisten kielten keskinäisistä suhteista. Kuvio mallintaa kielihistoriallisen ja vertailevan menetelmän avulla rekonstruoituja uralilaisten *kielten* välisiä suhteita. Kaavio ei kerro mitään uralilaisia kieliä puhuvien kansojen ja kansanryhmien geneettisestä alkuperästä tai sukulaisuudesta. Alkuperäinen kaavio on Tiedekeskus Heurekassa oleva kartio, jossa värien asteittaisen vaihtumisen avulla on pyritty osoittamaan se, että kantakielten eriytyminen tytärkieliksi on pitkä prosessi, jossa kielen muuttumisen eri vaiheiden suhdetta siihen, milloin voidaan saman kielen murteiden sijasta puhua eri kielistä, on vaikea osoittaa. Mitä kauemmaksi ajassa taaksepäin siirrytään, sitä vähemmän variaatiota voidaan rekonstruoituihin kielihistoriallisiin muotoihin liittää.

Kielihistorian tutkijat ovat osoittaneet, että lukusana *kaksi* on uralilaisissa kielissä yhteistä alkuperää. Tällä tarkoitetaan sitä, että sana voidaan johtaa kielihistoriallista tutkimusmenetelmää käyttäen suomalais-ugrilaisiin ja samojedikieliin. Myös lukusanoille *seitsemän* ja *viisi* on esitetty uralilaiseen kantakieleen periytyvää historiaa.

Yhteisiä suomalais-ugrilaisia sanoja on sen sijaan enemmän: lukusanat *yhdestä kuuteen* ovat suomalais-ugrilaisissa kielissä yhteistä alkuperää, ja myös joidenkin muiden lukusanojen on esitetty voitavan johtaa yhteiseen suomalais-ugrilaiseen kantakieleen. Tällainen on lukusana *kymmenen* (10), joka on yhteistä alkuperää saamessa, marissa ja mansissa (suomen kielen substantiivilla *luku* on sama alkuperä). Lukusanan *seitsemän* yhteinen historia voidaan johtaa ainakin itämerensuomalaisiin kieliin, saameen, mordvaan, mariin, komiin ja udmurttiin (Taulukko 1).

Taulukossa 1 on lueteltu useimpien suomalais-ugrilaisten kielten lukusanat yhdestä kymmeneen. Samojedikielistä ovat mukana nenetsi ja selkuppi. Monien lukusanojen yhteenkuuluvuus on helppo tunnistaa. Mielenkiintoisia ovat lukusanat *yhdeksän* ja *kahdeksan*. Esim. suomen lukusanojen *yhdeksän* ja *kahdeksan* on varhemmin selitetty muodostuneen siten, että niiden perusosan muodosti latinan sanaan *decem* '10' johdettava sana, josta oli vähennetty lukusanat *yksi* ja *kaksi*: "yksi pois kymmenestä" ja "kaksi pois kymmenestä". (Tällä tavoin selitetään udmurtin ja komin kahdeksaa ja yhdeksää tarkoittavien lukusanojen historia.) Nyttemmin suomen lukusanoissa *kahdeksan* ja *yhdeksän* selitetään olevan taustalla lukusanat *yksi* ja *kaksi* ja kieltoverbin *ei* johdannainen: "yhtä ei ole" ja "kahta ei ole". Tätäkään etymologiaa ei pidetä virheettömänä. Lukusanoissa on myös muista kielistä saatuja lainoja: esimerkiksi udmurtin ja komin *das* '10' on iranilaista alkuperää.

Taulukossa 2 on esimerkkejä uralilaisten kielten lukusanoista 11–20. Tässä ryhmässä uusien lukusanojen muodostamisen perustyypit suomalais-ugrilaisissa kielissä ovat lisääminen, vähentäminen, kertominen ja jakaminen. Myös näiden kaikkien ryhmien sisällä on melkoista variaatiota. Lisääminen voidaan tehdä esim. yhdistämällä numeraalit siten, että kymmeneen lisätään ykköset, jotka ovat yli kymmenen, kuten esim. udmurtissa: *das kyk* '12', käyttämällä koordinatiivista konjunktiota kuten karjalassa: *kymmenen da kaksi* '12', tai adverbiaalirakenteen avulla kuten vanhassa kirjasuomessa: *caxi päälle yhdexänkymmenen* '92'. Suomen lukusanoissa 11:stä 20:een on partitiivisuffiksi: *yksitoista(-kymmentä) = yksi toisesta kymmenestä*, saamessa taas latiivisuffiksi: *guokte-nuppe-lohkái* '12'. Vähentämällä muodostetuista numeraaleista ovat esimerkkinä komin ja udmurtin *kahdeksan* ja *yhdeksän*. Jakamisesta on esimerkkinä viron *peel kolmat sada* '250' ('puoli kolmatta sataa') ja kertomisesta vanhentunut komipermjakin muoto *das'-jec-das* '100' ('kymmenen kertaa kymmenen'; perusteellinen selvitys uralilaisten kielten lukusanoista on László Hontin teoksessa *Die Grundzahlwörter der uralischen Sprachen*, josta myös useimmat artikkelissa olevista esimerkeistä on otettu). Lukusanan 20 etymologia on yhteinen udmurtissa, komissa, hantissa, mansissa ja unkarissa. Samaa kantaa oleva sana viittaa ihmiseen, esim. mansi: *xum* 'mies (ihminen; sellainen, jolla on sormet ja varpaat)'.

Taulukossa 3 on uralilaisten kielten täysiä kymmeniä merkitseviä lukusanoja sekä lukusanat *sata*, *tuhat* ja *miljoona*. Kaikissa suomalais-ugrilaisissa kielissä on indoeurooppalaista alkuperää oleva lukusana *sata*. Komin, udmurtin, hantin ja mansin tuhatta merkitsevän sanan on esitetty olevan alkujaan indo-arjalainen, ja sana *tuhat* taas on osoitettu alkuperältään balttilaiseksi.

Kieli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Suomi	yksi	kaksi	kolme	neljä	viisi	kuusi	seitse-män	kahdek-san	yhdek-sän	kym-menen
Viro	üks	kaks	kolm	neli	viis	kuus	seitse	kaheksa	üheksa	kümme
PohjS	okta	guokte	golbma	njeallje	vihtta	guhtta	čieža	gávcci	ovcci	logi
Ersä	vejke	kavto	kolmo	ńil′e	vet′e	koto	śiśem	kavkso	vejkse	kemeń
Mari	ikte, iktyt	kokyt, koktyt	kumyt	nylyt	wizyt	kudyt	šymyt	kandaše	indeše	lu
Komi	ötik	kyk	kuim	ńol	vit	kvajt	śiźim	kökja-mys	ökmys	das
Udm	odig	kyk	kuiń	ńyl′	vit′	kuat′	śiźym	t′amys	ukmys	das
Hanti	it	kātn	xūləm	ńil	wēt	xut	lāpət	ńijəl	jar-t′āη	jāη
Mansi	akwa, akw	kityγ, kit	xūr^{u}m	ńila	at	xōt	sāt	ńollow	ōntəllow	low
Unk	egy	kettő	három	négy	öt	hat	hét	nyolc	kilenc	tíz
Nen	opoi	sid′e	ńār	t′iet	saml′ang	mat	siu	sidnd′et	habeijū	jū, jud
Selk	óker	šede	nágor	teet(a)	homplah	mŭ·ktet	hieldš	šede čalgyet	óker čalgyet	köt

Taulukko 1: Uralilaisten kielten lukusanoja 1–10. (Kielten lyhenteet: Komi = komisyrjääni, Nen = tundranenetsi, Mari = itämari, PohjS = pohjoissaame, Selk = selkuppi, Udm = udmurtti, Unk = unkari. Luettelossa kielten lukusanat suomesta unkariin on otettu näiden kielten kieliopeista. Nenetsin ja selkupin lukusanat ovat näiden kielten murremuotoja.)

Kieli	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Suomi	yksi-toista	kaksi-toista	kolme-toista	neljä-toista	viisi-toista	kuusi-toista	seitse-män-toista	kahdek-san-toista	yhdek-sän-toista	kaksi-kym-mentä
Viro	üksteist	kaks-teist	kolm-teist	neli-teist	viis-teist	kuus-teist	seitse-teist	kahek-sateist	ühek-sateist	kaks-kümmend
PohjS	okta-nuppe-lohkái	guokte-nuppe-lohkái	golbma-nuppe-lohkái	njeallje-nuppe-lohkái	vihtta-nuppe-lohkái	guhtta-nuppe-lohkái	čieža-nuppe-lohkái	gávcci-nuppe-lohkái	ovcci-nuppe-lohkái	guokte-logi
Ersä	kevej-keje	kem-gav-tovo	kem-gol-movo	kem-ńiĺeje	keve-t′eje	kem-gotovo	kemśi-śemge	kem-gavk-sovo	ke-vejkse	komś
Mari	latik-(te), la-tiktyt	lat-kok(yt), latkoktyt	lat-kum(yt)	lat-nyl(yt)	latwič́, latwizyt, luč́ko	latkut, latku-dyt	lat-šym(yt)	latkan-daš(e)	latin-deš(e)	kolo
Komi	das öti	das kyk	das kuim	das ńol′	das vit	das kvajt	das śiźim	das kökja-mys	das ökmys	kyź
Udm	das odig	das kyk	das kuiń	das ńyl′	das vit′	das kuat	das śiźym	das t′amys	das ukmys	kyź
Hanti	it-xoś-jāη	katn-xoś-jāη	xūləm-xoś-jāη	ńil-xoś-jāη	wēt-xoś-jāη	xut-xoś-jāη	lāpət-xoś-jāη	ńijəl-xūs	jar-xūs	xūs
Mansi	akw-xujp-low	kit-xujp-low	xūrəm-xujp-low	ńila-xujp-low	at-xujp-low	xōt-xujp-low	sāt-xujp-low	ńollow-xujp-low	ōntəl-low-xujp-low	xus
Unk	tizen-egy	tizen-kettő	tizen-három	tizen-négy	tizenöt	tizen-hat	tizen-hét	tizen-nyolc	tizen-kilenc	húsz
Nen	opoi-jangańe	sid′e-jangańe			samĺang-jangańe		siu-jangańe	sidnd′et-jangańe	habei-jangańe	sid′ejū
Selk	óker kuel get	šede kuel get	nágor kuel get	teet(a) kuel get	hompla kuel get	mŭ·ktet kuel get	hieldše kuel get	šede čangul šeda háru	óker čangul šeda háru	šaškal šeda háru

Taulukko 2: Uralilaisten kielten lukusanoja 11–20.

Uralilaisten kielten lukujärjestelmistä

Nykyisissä uralilaisissa kielissä, joihin myös suomi kuuluu, on käytössä kymmenjärjestelmä. Koska kymmenjärjestelmä on kaikissa uralilaisissa kielissä, onkin kysytty, onko kymmenjärjestelmä ollut jo uralilaisessa kantakielessä. Kuitenkin se, voidaanko tämä johtaa ehkä noin 6000–7000 vuoden taakse, on varsin epävarmaa. Yhteiseen kantakieleen on postuloitu useitakin lukujärjestelmiä (Honti 1999). Sen perusteella, että lukusana *kaksi* on yhteinen uralilaisissa kielissä, on arveltu tämän viittaavan siihen, että myös uralilaisessa kantakielessa oli käytössä lukujärjestelmä, jossa oli vain luvut *yksi* ja *kaksi*. Suomalais-ugrilaisissa kielissä on yhteiset lukusanat *yhdestä kuuteen*, ja tämän taas on katsottu viittaavan siihen, että käytössä on ollut kuusijärjestelmä. Uralilaisesta kantakielestä on yritetty etsiä myös muita järjestelmiä, mm. kaksikymmen- ja kuusikymmenjärjestelmät. Yhteiseen laskemisjärjestelmään viittaavia elementtejä on esitetty olevan myös lukusanan *seitsemän* käytössä ns. maagisena lukuna.

Sen puolesta, että kymmenjärjestelmä olisi ollut jo suomalais-ugrilaisessa kantakieliessä, puhuu se, että permiläisissä ja ugrilaisissa kielissä on kymmentä suurempia kymmenlukuja merkitsevät lukusanat muodostettu sanaan kymmenen johdettavilla, eri ikäisillä kielen aineksilla: esim. komi: *kvajty-myn* '60', *śiźim-das* '70'; mansi: *xot-pan* '60', *sāt-low* '70', unkari: *harm-inc*, murteellinen muoto: *harm-ic* (<∗*armu* '3' + *tizü* '10') '30', and *negy-ven* '40'. Mansin *low-*, unkarin *tíz-* ja komin ja udmurtin *das*-lukusanoilla on merkitys '10', ja komin ja udmurtin *myn* ja hantin *pan*, *man*, ja unkarin suffiksilla *van*, *ven* on myös kymmeneen johtava kielihistoriallinen kehitys takanaan. Ainakaan sitä ei ole voitu osoittaa, että kymmenjärjestelmä ei olisi ollut jo suomalais-ugrilaisessa kantakielessä tai kantasamojedissa.

Kieli	30	40	50	60	70	80	90	100	1 000	1 000 000
Suomi	kolmekymmentä	neljäkymmentä	viisikymmentä	kuusikymmentä	seitsemänkymmentä	kahdeksankymmentä	yhdeksänkymmentä	sata	tuhat	miljoona
PohjS	golbmalogi	njealljelogi	vihttalogi	guhttalogi	čiežalogi	gávccilogi	ovccilogi	čuodhi	duhát	millijovdna
Viro	kolmkümmend	nelikümmend	viiskümmend	kuuskümmend	seitsekümmend	kaheksakümmend	üheksakümmend	sada	tuhat	miljon
Ersä	kolońgemeń	ńileńgemeń	ved′gemeń	kodgemeń	śiźgemeń	kavksońgemeń	vejkseńgemeń	śado	tyšča	miĺĺion
Mari	kumlo	nylle	witle	kutlo	šymlu	kandašlu	indešlu	šüdö	tüžem	miĺĺion
Komi	komyn	ńelamyn	vetymyn	kvajtymyn	śiźimdas	kökjamysdas	ökmysdas	śo	śurs	miĺĺion
Udm	kuamyn	ńyldon	vit′ton	kuat′ton	śiźymdon	t′amyston	ukmyston	śu	śurs	miĺĺion
Hanti	xūləm-jaη	ńil-jāη	wēt-jāη	xut-jāη	lāpət-jāη	ńijəl-jāη	jar-sōt	sōt	śarəs	
Mansi	wāt	naliman	atpan	xōtpan	sātlow	ńolsāt	ontəlsāt	sāt	sōtər	
Unk	harminc	negyven	ötven	hatvan	hetven	nyolcvan	kilencven	száz	ezer	millio
Nen	ńārjū	t′ietjū	saml′angjū	matjū	siujū	sidnd′etjū	habeijujū	jur	jeonar	
Selk	čašal naf haru	te haru	hompla haru	mukta haru	heldše haru	šeda harmu čangul tot	oker harmu čangul tot	tot	köt tot	

Taulukko 3: Uralilaisten kielten lukusanoja: *kymmenet*, *sata*, *tuhat* ja *miljoona*.

Lähteitä

Comrie, Bernard. 1999. Haruai Numerals and their Implications for the History and Typology of Numeral Systems. Teoksessa Gvozdanovic, Jadranka (toim.): Numeral Types and Changes Worldwide. Trends in Linguistics. Studies and Monographs 118. Mouton de Grueter. Berlin & New York. 82-94.

Honti, László. 1993. Die Grundzahlwörter der uralischen Sprachen. Bibliotheca Uralica. Akadémiai kiadó. Budapest.

Honti, László. 1999. The Numeral System of the Uralic Languages. Teoksessa Gvozdanovic, Jadranka (toim.): Numeral Types and Changes Worldwide. Trends in Linguistics. Studies and Monographs 118. Mouton de Grueter. Berlin & New York. 243-252.

Hurford, James H. 1987. Language and number. The Emergence of a Cognitive System. Basic Blackwell. Oxford.

Sasse, Hans-Jürgen. 1999. Syntactic Categories and Subcategories. Teoksessa Jacobs, Joachim & al (toim): Syntax. Ein internationales Handbuch zeitgenössischer Forschung. Mouton de Grueter. Berlin. 646-686.

Suomen kielen etymologinen sanakirja, Suomalais-Ugrilainen seura, 1981-1987.

Suomen sanojen alkuperä. SKS, 1992, 1995, 2000.

Tietoa lukujärjestelmistä ja niiden kehityksestä on mm. Encyclopædia Britannicassa:
http://www.britannica.com/bcom/eb/article/2/0,5716,57902+1+56491,00.html

Oxfordissa matematiikkaa opiskeleva Pirita Paajanen sai tunnustuspalkinnon

Euroopan naismatematiikot ovat saaneet optiorahoista lahjoituksen Suomessa tapahtuvaa toimintaa varten, erityisesti, jotta tyttöjä ja naisia kannustettaisiin matematiikan pariin. Tästä rahasta päätettiin antaa suurin osa, 10 000 markan palkinto, matematiikan opintojensa alkuvaiheessa olevalle, mutta jo selkeästi kunnostautuneelle nuorelle naiselle. Palkinnon sai Oxfordissa matematiikan opintoja suorittava, Somerolta kotoisin oleva, juuri 22 vuotta täyttänyt *Pirita Paajanen*.

Piritan alkutaival opinnoissa oli peruskoulu Somerolla, sitten yläasteen matematiikkakilpailuissa menestyminen, muutto Turkuun IB-lukioon ja matematiikan lisäoppi Päivölän opistossa. Pirita pyrki ylioppilastutkinnon jälkeen Oxfordiin ja tuli hyväksytyksi. Kolmatta vuotta Oxfordissa opiskeleva ja kesällä tutkinnon suorittava Pirita kertoi, että opiskelutahti siellä on hyvin paljon kovempi ja vaativampi kuin Suomessa. Akateemisesta vapaudesta ei ole tietoakaan. Henkilökohtaista ohjaajaa tavataan lukukausien aikana 2 tuntia viikossa ja silloin käydään läpi kotitehtävät, jotka on jätetty tarkastettavaksi etukäteen musteella puhtaaksikirjoitettuna. Tällaisessa "laskuharjoituksessa" on kerrallaan 1–2 opiskelijaa. Käytännössä opiskelijat joutuvat lukukausien aikana opiskelemaan omin päin 50 sivua uutta matematiikkaa kolmessa päivässä ja ratkaisemaan laskuharjoitustehtävät tämän pohjalta – luennolla asiat tulevat yleensä vasta tämän jälkeen ja ilman yksityiskohtia. Erittäin harvat keskeyttävät opinnot, karsinta ja ohjaus ovat niin tehokkaita. Omasta, välillä hyvinkin kovasta ponnistelusta ja onnistumisesta saa palkinnoksi iloa, joka on aivan erilaista kuin lyhytjänteisen viihteen antama.

Ensimmäistä tutkintoa varten on kolmen vuoden kuluttua opintojen aloittamisesta erittäin laajat tentit, seitsemän koetta viikon aikana, kukin tentti kolme tuntia. Tenttiin pukeudutaan akateemiseen pukuun. Uusimismahdollisuutta ei ole. Lääkärintodistuksella varmistettu sairaus voi auttaa rajatapausta ylittämään riman. Jos opiskelija keskeyttää kokeet sairauden tms. takia, saa hän uusia ne kaikki, mutta vasta vuoden kuluttua.

Oxfordissa on Suomesta pari matematiikan opiskelijaa. Yksi heistä on päätynyt vuorottelemaan opinnoissaan musiikin ja matematiikan välillä. Opetus maksaa EU:n kansalaisille 1000 puntaa vuodessa. Opiskelijoista on noin kymmenesosa Englannin ulkopuolelta, erityisesti Hong Kongista ja Singaporesta. Euroopasta on ehkä eniten saksalaisia. Vapaa-ajan harrastuksia on tarjolla paljon alkaen soudusta ja muusta urheilusta sekä musiikista. Sivuaineita ei tunneta, matematiikkaa opiskelevat syventyvät matematiikkaan. Vaikeinta sopeutumisessa oli Piritan mielestä sosiaalinen sopeutuminen. Englantilaiset ovat omissa joukoissaan, ulkomaalaiset omissaan. Muutama hyvä englantilainen ystäväkin on kuitenkin löytynyt.

Hyvä yliopisto ja hyvä tutkinto avaavat kaikki ovet. Englannissa arvostetaan matematiikkaa aivan eri tavalla kuin Suomessa. Matematiikka, samoin kuin esim. kauppatieteet, on eräs vaihtoehdoista, jotka johtavat hyvään ammattiin. Englantilaisten käsityksen mukaan matematiikan opinnoissa menestyminen kertoo, että henkilö pystyy kaikkeen muuhunkin työelämässä tarvittavaan ja omaa kyvyn ottaa selvää asioista sekä ajatella itsenäisesti ja loogisesti. Lontoon City vetää matematiikassa tutkinnon suorittaneita ja yritykset kouluttavat hyvinkin teoreettisen koulutuksen saaneet työntekijänsä käytännön työtehtäviin.

Pirita Paajasta kiinnostaa algebrallinen lukuteoria, jossa hän aikoo tehdä jatko-opinnot Englannissa ja toivoo voivansa palata sen jälkeen Suomeen toimiakseen täällä matematiikan tutkijana.

Pirita Paajasta haastatteli

Marjatta Näätänen