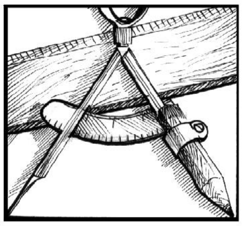
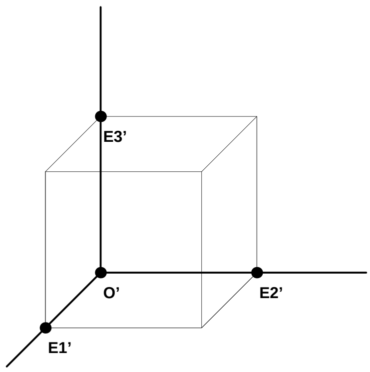


Geometriakulma 12: Pohlken lause

Simo K. Kivelä

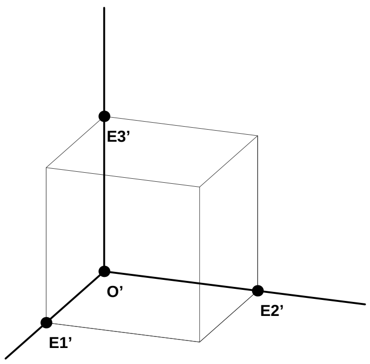
Olkoon kuutio asetettuna kolmiulotteisen avaruuden koordinaatistoon siten, että sen yksi kärki on origossa ja tästä kärjestä lähtevät särmät sijaitsevat koordinaattiakseleilla. Kuution yhdensuuntaisprojektiokuva saattaisi tällöin näyttää vaikka seuraavalta:

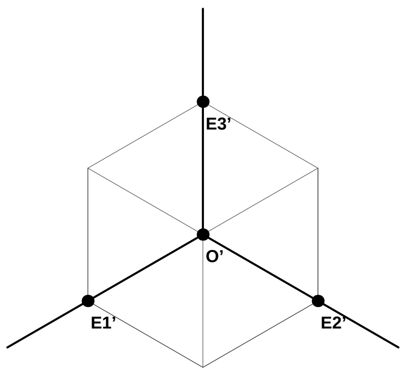


Kyseessä on kavaljeeriprojektio, ts. eräs yhdensuuntaisprojektio.

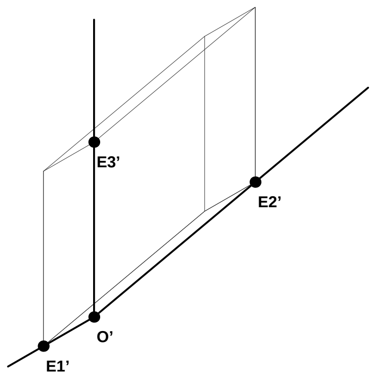
Koordinaatiakseleilla olevia kuution kärkiä on merkitty E_1, E_2 ja E_3; vastaavat pilkutetut symbolit ovat niiden kuvat. Lukija tehköön eron avaruudessa olevan kuution ja sen ruudulla – tai paperilla – olevan kaksiulotteisen kuvan välillä. Oheinen kuva on kuva, siksi pilkutetut symbolit. Vastaavasti O' on origon kuva.

Yhdensuuntaisprojektion kuvataso voidaan asettaa mihin tahansa asentoon kuutioon nähden ja projektiosäteiden suunta voidaan valita miten tahansa, kunhan se ei ole kuvatason suuntainen. Kavaljeeriprojektion ohella monia muitakin mahdollisuuksia kuution yhdensuuntaisprojektiokuvan eli aksonometrisen kuvan tekemiseen siis on. Esimerkkinä dimetrinen ortogonaaliprojektio ja isometrinen ortogonaaliprojektio, joissa molemmissa projektiosäteet ovat kohtisuorassa kuvatasoa vastaan:





Kuviot antanevat aiheen seuraavaan kysymykseen: Miten pisteet E_1', E_2' ja E_3' on valittava, jotta kyseessä olisi sopivan kokoisen kuution kuva jossakin yhdensuuntaisprojektiossa? Olisi siis selvitettävä, voidaanko löytää kuvataso ja projektiosäteiden suunta siten, että kuution kuvaksi tulee pisteiden O', E_1', E_2' ja E_3' määrittämä kuvio. Kelpaisiko esimerkiksi seuraava:



Vastaus kysymykseen tunnetaan *Pohlken lauseen* nimellä. Sen esitti Karl Pohlke (1810–1876) vuonna 1853 hypoteesina, ts. ilman todistusta. Lauseen todisti Hermann Amandus Schwarz 1864.

Pohlken lause antaa yksinkertaisen ja hieman yllättävänkin vastauksen: Mikä tahansa pisteistö $\{O', E_1', E_2', E_3'\}$ (ns. *Pohlken kuvio*) kelpaa, kunhan kaikki neljä pistettä eivät ole samalla suoralla (mutta mitkä tahansa kolme saavat aivan hyvin olla).

Yhdensuuntaisprojektiokuva näyttää luonnolliselta, kun sitä katsotaan projektiosäteiden suunnasta mahdollisimman kaukaa. Jos siis kyseessä on ortogonaaliprojektio, sitä on katsottava kohtisuoraan kuvaa vastaan. Vinossa projektiossa taas kuva on asetettava ehkä hyvinkin vinoon asentoon katselusuuntaan nähden. Asiaa voi kokeilla piirtämällä neljän pisteen konfiguraatioita ja niihin liittyviä kuution kuvia ja yrittämällä löytää ainakin suurinpiirtein oikea katselusuunta. Laskeakin katselusuunnan voi, vaikka ei aivan helposti.

Mielivaltaisesti muodostettu Pohlken kuvio liittyy useimmiten varsin vinoon projektioon. Jos sitä onnistuu katsomaan oikeasta suunnasta, kuva ei kuitenkaan näytä venähtäneeltä.

Pohlken lauseen voi todistaa paitsi geometrisesti myös (vektori- tai matriisi-) algebran avulla. Lukija voisi harjoittaa kirjallisuustutkimusta: Millaisia artikkeleita, kirjoja tai muita dokumentteja Pohlken lauseesta löytyy? Joitakin web-dokumenttejakin näyttää olevan, mutta iältään tulos on sellainen, että kirjallisia dokumentteja on helpompi löytää.

Tämäntapaisista asioista, ns. *deskriptiivisestä geometriasta* oltiin kiinnostuneita 1900-luvun alkupuoliskolla, mutta loppupuolella kiinnostus on hiipunut. Voisi ajatella, että tietokonegrafiikan kehitys olisi johtanut kiinnostuksen uudelleen viriämiseen, mutta näin ei ole käynyt.

Vihjeeksi tiedonhakuja tekevälle lukijalle: Geometrista kirjallisuutta on enemmän saksaksi kuin englanniksi. Hakusanoiksi kannattaa siis valita myös 'Pohlke' ja 'Satz' eikä yksinomaan 'Pohlke' ja 'theorem'.

Ortogonaalinen yhdensuuntaisprojektio on kuvien muodostuksessa luontevampi kuin vino, koska kuvaa normaalisti katsotaan ainakin lähes kohtisuoraan paperin tasoa vastaan. Olisiko Pohlken kuviosta jotenkin helposti pääteltävissä, milloin kyseessä on ortogonaaliprojektio?

Vastaus on jälleen hieman yllättävä, sillä yksinkertainen ehto voidaan antaa kompleksilukujen avulla: Tulkitaan kuvataso kompleksitasoksi, jonka origo yhtyy Pohlken kuvion origoon, ja muodosteaan pisteitä E_1', E_2' ja E_3' vastaavat kompleksiluvut z_1, z_2 ja z_3. Jos siis pisteen E_1' koordinaatit kuvatasossa Pohlken kuvion origon O' suhteen ovat (x_1, y_1), niin vastaava kompleksiluku on $z_1 = x_1 + y_1 i$. Kyseessä on ortogonaaliprojektio, jos ja vain jos

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Syvällinen kompleksilukuja koskeva asia tämä ei ole. Sattuupahan vain olemaan niin, että Pohlken lauseen algebrallisesta todistuksesta näkyvät täysin reaaliset ehdot voidaan yhdistää tällaiseksi kompleksiseksi yhtälöksi.

Tämä on ainakin toistaiseksi viimeinen geometriakulma. Lukijoiden aktiivisuuden testaamiseksi julistan lopuksi **palkintokilpailun**: Tavoitteena on etsiä Pohlken lausetta koskevia kirjallisuus- ja verkkoviitteitä ja tutustua mahdollisimman moneen lähteeseen. Solmu palkitsee parhaan kirjallisuustutkimuksen tekijän geometrisella kirjallisuudella. Vastauksena viiteluettelo ja tieto käsiin saaduista lähteistä sähköpostina minulle: `Simo.Kivela@hut.fi`. Odottelen vastauksia toukokuun loppuun saakka ja otan sitten voittajaan yhteyttä. Tulokset julkaistaan syksyn ensimmäisessä Solmussa.