HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA/Insinööriosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 27.5.1998
Ratkaisut

1. (Arskan painoindeksi on alussa $102/1,82^2 = 30.8$, joten hänellä on ylipainoa.) Arskan paino n viikon kuluttua saadaan lausekkeesta $102 \cdot 0,99^n$, joten hän voi saavuttaa normaalipainon, kun n toteuttaa ehdon

$$\frac{102 \cdot 0,99^n}{1,82^2} \leq 25.$$

Saadaan $n \geq \frac{\ln 0,812}{\ln 0,99} \approx 20,7$, ts. Arska on normaalipainoinen **21 *viikon*** kuluttua.

2. Olkoon vektorien yhteinen alkupiste $(0,0,z)$. Silloin on $\bar{a} = (1,0,-z)$ ja $\bar{b} = (0,3,-z)$. Kaavaan $\cos(\angle(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{||\bar{a}||||\bar{b}||}$ sijoittamalla saadaan yhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45° = \frac{z^2}{\sqrt{(1+z^2)(9+z^2)}},$$

josta seuraa $z^4 - 10z^2 - 9 = 0$, josta edelleen $z^2 = 5 + \sqrt{34}$ (negatiivinen juuri ei tule kysymykseen). Tehtävän ratkaisut ovat siis pisteet $\mathbf{(0,0,\pm(5+\sqrt{34}))}$.

3. Käyrän yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $y = \frac{e^{5/2}}{\sqrt{x}}$, missä $x > 0, y > 0$. Olkoon $(x_0, y_0) = (x_0, \frac{e^{5/2}}{\sqrt{x_0}})$ etsitty käyrän piste. Koska käyrällä on voimassa $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{5/2}}{2x^{3/2}}$, on tähän pisteeseen asetetun käyrän normaalin kulmakerroin $\frac{2x_0^{3/2}}{e^{5/2}}$ ja siis tämän normaalin yhtälö on $y - y_0 = \frac{2x_0^{3/2}}{e^{5/2}}(\ x - \ x_0\ )$. Sijoittamalla normaalin yhtälöön $x = y = 0$ ja $y_0 = \frac{e^{5/2}}{\sqrt{x_0}}$ saadaan tehtävän ratkaisu $x_0 = \frac{e^{5/3}}{\sqrt[3]{2}} (\approx 4,20)$.

4. Tapahtuman A="tuote hylätään"todennäköisyys on $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, missä

$$P(\bar{A}) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi x}{2})dx = \frac{\pi}{4} /_{0,5}^{1,5} (-\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{2})) = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{3\pi}{4})) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Siis $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,293$, ts. tuotteista hylätään **29, 3%**.

5. Tiedonsiirron nopeuden ollessa x (Kbit/s) olkoon virheellisten bittien suhteellinen osuus $p = p(x)$. Silloin $p(x) = kx^2$, missä k on verrannollisuuskerroin. Ehdosta $p(100) = 0,021$ saadaan $k = 2,1 \cdot 10^{-6}$. Sekunnissa virheettömästi syntyvien bittien lukumäärä on siirtonopeuden x funktio

$$f(x) = (1 - p(x))x = x - kx^3 \qquad \text{(yksikkönä Kbit/s)},$$

jonka maksimikohta välillä $100 \leq x \leq 500$ siis on määritettävä. Ehdosta $f'(x) = 0$ saadaan

$$x = \frac{1}{\sqrt{3k}} \approx \mathbf{398,4}\text{(Kbit/s)}.$$

Derivaatan merkkikaavion tms. avulla nähdään, että kyseessä todella on maksimikohta.

6. Jotta $g(t)$ olisi määritelty, on oltava $t \neq 1$ (jotta $f(t)$ olisi määritelty) ja $t \neq 0$ (sillä $f(0) = 0$, joten $g(0) = f(1 - f(0)) = f(1)$, joka ei ole määritelty). Funktion g lauseke on

$$g(t) = f(1 - \frac{t}{1-t}) = \frac{1 - \frac{t}{1-t}}{1 - (1 - \frac{t}{1-t})} = \boldsymbol{\frac{1}{t} - 2} \qquad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}).$$

Käänteisfunktio g^{-1} on olemassa, jos g toteuttaa ehdon

$$t_1 \neq t_2 \qquad \Rightarrow \qquad g(t_1) \neq g(t_2).$$

Funktiolla g on tämä ominaisuus, sillä jos $g(t_1) = g(t_2)$, niin ei voi olla $t_1 \neq t_2$, vaan

$$\frac{1}{t_1} - 2 = \frac{1}{t_2} - 2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = t_2.$$

Siis käänteisfunktio g^{-1} on olemassa. Käänteisfunktion lauseke muuttujan t funktiona saadaan ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $g(x) = t$; siis

$$t = g(x) = \frac{1}{x} - 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{t+2},$$

ts. käänteisfunktion lauseke on

$$g^{-1}(t) = \boldsymbol{\frac{1}{t+2}} \qquad (t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}).$$