HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA/Insinööriosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 28.5.1997
Ratkaisut

1. On oletettava $a \neq 0$; muuten molemmat paraabelit surkastuvat suoraksi $y = 2$. Ratkaisemalla yhtälö $2ax^2 - ax - 2a + 2 = ax^2 - 2ax + 4a + 2$ saadaan paraabelien leikkauspisteiden x-koordinaatit: $x_1 = -3$ ja $x_2 = 2$ (nämä eivät riipu a:n arvosta). Kysytty pinta-ala on

$$\int_{-3}^{2} \left|(2ax^2 - ax - 2a + 2) - (ax^2 - 2ax + 4a + 2)\right| dx = \cdots = \frac{125}{6}\,|a|\,.$$

2. Tarkasteltavat kulmat ovat yhtä suuret jos ja vain jos niiden kosinit

$$\cos(\bar{u}, \bar{v}_i) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}_i}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}_i\|} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ovat yhtäsuuret, mistä saadaa yhtälöt

$$\frac{a}{1} = \frac{5a + 12b}{13} = \frac{2a + b + 2c}{3}.$$

Näistä yhtälöistä seuraa $b = \frac{2}{3}a$ ja $a = 6c$. Lisäksi on oltava $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Saadaan

$$\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} = \pm\frac{1}{\sqrt{53}}(6\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}).$$

3. Olkoon pullon säde $r(= d/2)$. Pythagoraan lauseen avulla on todistettavissa, että etäisyys pullon keskipisteestä nurkkaan on $r\sqrt{2}$, ja etäisyys purkkien sivuamispisteestä – olkoon se piste C – pisteeseen, jossa purkkien keskipisteiden kautta kulkeva suora kohtaa (jommankumman) seinän, on $1 + \sqrt{2}$. Koska viimeksi mainittu etäisyys on sama kuin etäisyys pisteestä C hyllyn nurkkaan, nähdään, että etäisyys pisteestä C pullon keskipisteeseen on $1 + \sqrt{2} - r\sqrt{2}$. Soveltamalla Pythagoraan lausetta suorakulmaiseen kolmioon, jonka kärjet ovat pullon ja toisen purkin keskipisteissä sekä pisteessä C saadaan yhtälö

$$1^2 + (1 + \sqrt{2} - r\sqrt{2})^2 = (1 + r)^2,$$

josta ratkaisemalla saadaan $r = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$ (yhtälön toinen juuri antaisi sellaisen pullon säteen, joka sijoitettuna purkkien *eteen* sivuaisi niitä ja seiniä). Kysytty halakisija on siis

$$d = 2r = 6 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \text{(dm)} \approx 144\text{mm}.$$

4. Oletetaan, että reaaliluku x toteuttaa yhtälön $a + b = \sqrt[3]{3}$, missä on merkitty $a = \sqrt[3]{3+x}$ ja $b = \sqrt[3]{4-x}$. Silloin vihjeen mukaisesti

$$\begin{aligned}
3 &= (a+b)^3 \\
&= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \\
&= 3 + x + 4 - x + 3\sqrt[3]{(3+x)(4-x)}\sqrt[3]{3} \\
&= 7 + 3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{12 + x - x^2},
\end{aligned}$$

mistä sieventämällä saadaan x:lle 2. asteen yhtälö $x^2 - x - \frac{1036}{81} = 0$. Tämän ratkaisut ovat $x_1 = \frac{37}{9}$ ja $x_2 = -\frac{28}{9}$, ja sijoittamalla todetaan, että nämä toteuttavat myös alkuperäisen yhtälön; ts. ovat sen ratkaisut.

5. Erilaisten heittosarjojen lukumäärä 3 nopanheitossa on $6^3 = 216$. Sellaisia heittosarjoja, joissa mikään silmäluku ei toistu, on $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Niiinpä Täti Ruskean voittotodennäköisyys on $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$. Muissa tapauksissa (2 eri silmälukua) Täti Vihreä voittaa, ja todennäköisyys tälle on siis $1 - (\frac{20}{36} + \frac{1}{36}) = \frac{15}{36}$. Jotta peli olisi oikeudenmukainen, on panosten oltava suoraan verrannolliset voittotodennäköisyyksiin. Koska Täti Vihreä maksoi 15 äyriä, on Täti Ruskean maksettava 20 äyriä ja Täti Sinipunaisen 1 äyri.

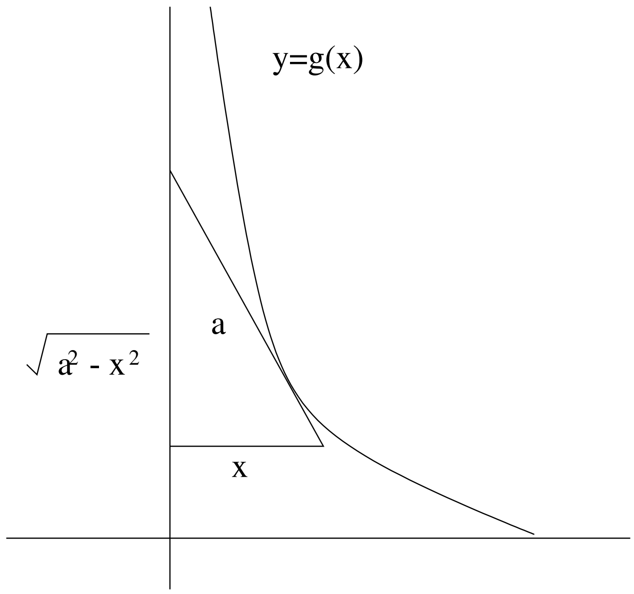
6. Olkoon $y = g(x)$ käyrä, jota pitkin piste B liikkuu; on näytettävä $g(x) = f(x)$. Funktio g toteuttaa ehdon

$$g'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

(vrt. kuvio). Lisäksi on selvää, että $g(a) = 0$. Toisaalta, derivoimalla annettu f:n lauseke nähdään, että

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x};$$

lisäksi sijoittamalla $x = a$ saadaan $f(a) = 0$. Koska $g'(x) = f'(x)$, on $g(x) = f(x) + C$, missä C on vakio. Koska lisäksi $g(a) = f(a)$, on oltava $C = 0$. Siis $g(x) = f(x)$, mikä oli todistettava.


y=g(x)
a
$\sqrt{a^2 - x^2}$
x