HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA/Insinööriosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 29.5.1996
Ratkaisut

1. Olkoon kysytty lainapääoma x. Silloin $(1+\frac{9,2}{100})^3x = 42320,50$, joten

$$x = \frac{42320,50}{1,092^3} \approx 32500\,(\mathrm{mk}).$$

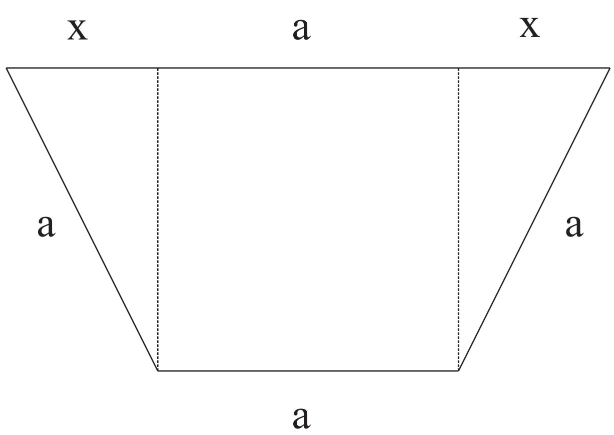
2. Käyrän $y = e^{ax}$ ja suoran $y = e^5$ leikkauspisteen x-koordinaatti on $x = \frac{5}{a}$. Saadaan

$$4 = \int_0^{\frac{5}{a}} (e^5 - e^{ax})\,dx = \frac{4e^5+1}{a},$$

mistä

$$a = e^5 + \frac{1}{4}.$$

3. On maksimoitava poikkileikkauksen ala. Puolisuunnikkaan kolmen sivun pituus on $a = 0,17$; merkitään neljättä sivua $a + 2x$ (vrt. kuvio).



Silloin puolisuunnikkaan ala on $A(x) = (a+x)\sqrt{a^2+x^2}$. Derivaatan

$$A'(x) = \frac{a^2 - ax - 2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

nollakohta $x = \frac{a}{2}$ todetaan A:n maksimikohdaksi. Siis neljännen sivun pituuden on oltava

$$a + 2x = 2a = 0,34\,(\mathrm{m}).$$

4. Olkoon veden virtaamisnopeus x ja moottoriveneen nopeus veden suhteen y. Oletuksista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{96}{y+x} + \frac{96}{y-x} &= 14, \\ \frac{96}{y+x} + \frac{72}{y-x} &= \frac{24}{x}, \end{cases}$$

mistä ratkaisemalla saadaan

$$x = 2\,(\mathrm{km/h}).$$

5. $B_{(10)} = 10^{\frac{P}{20}}$, missä $P = 12,2$. Verrannollisuuden nojalla $B_{(4)} = (\frac{10}{4})^3 B_{(10)}$. Siis

$$B_{(4)} = \left(\frac{10}{4}\right)^3 \cdot 10^{\frac{12,2}{20}} \approx 64\,(\mu T).$$

6. Merkitään r_k = ympyrän C_k säde, d_k = ympyrän C_k suurin etäisyys pisteestä S. Silloin $d_1 = r$ ja yhtälöstä $(r+r_1)^2 = r^2 + (r-r_1)^2$ (Pythagoras!) saadaan $r_1 = \frac{r}{4}$. Yleisesti saadaan samaan tapaan yhtälöt $(r+r_k)^2 = r^2 + (d_k - r_k)^2$, mistä $r_k = \frac{d_k^2}{2(r+d_k)}$. Sijoittamalla tämä kaavaan $d_{k+1} = d_k - 2r_k$ saadaan palautuskaava $d_{k+1} = \frac{rd_k}{r+d_k}$, jonka avulla nähdään, että d_k:n yleinen lauseke on $d_k = \frac{r}{k}$. Tästä saadaan r_k:n yleinen lauseke $r_k = \frac{r}{2k(k+1)}$. Yleisen (k:nnen) kolmion kanta on $2r$ ja korkeus $d_k - r_k$, jolloin sen ala on

$$\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot (d_k - r_k) = \frac{(2k+1)r^2}{2k(k+1)}.$$