HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA/Insinööriosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 28.5.1997
Ratkaisut

1. Merkitään $\bar{a} = \bar{a_1} + \bar{a_2}$, missä $\bar{a_1}$ on vektorin $\bar{b}$ suuntainen ja $\bar{a_2}$ vektoria $\bar{b}$ vastaan kohtisuorassa. On olemassa luku $\bar{t} \in R$ siten, että $\bar{a_1} = t\bar{b}$. Tällöin $\bar{a_2} = \bar{a} - t\bar{b}$. Kohtisuuruuden perusteella on

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{a} - t\bar{b}) \cdot \bar{b} = 0,$$

mistä

$$t = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{b} \cdot \bar{b}}.$$

Koska $\bar{a} \cdot \bar{b} = 24$ ja $\bar{b} \cdot \bar{b} = 6$, on $t = 4$. Tällöin kysytyt komponentit ovat $\bar{a_1} = 4(i - \bar{j} + 2k)$ ja $\bar{a_2} = 2(-i + \bar{3}j + 2k)$

2. Olkoon $D = (x, y), \sphericalangle DAB = \alpha$ ja $\sphericalangle DBA = \beta$. Tällöin

$$\begin{cases} \tan\alpha = \frac{y}{x} \\ \tan\beta = \frac{y}{3000 - x} \end{cases}$$

Ratkaisemalla x ja y saadaan

$$\begin{cases} x = \frac{3000\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} \\ y = x\tan\alpha \end{cases}$$

Koska $\alpha =32,8^\circ$ ja $\beta =64,1^\circ$, on $D = (2280, 1470)$. Jos merkitään $\sphericalangle DAE = \phi$, räjähdyspatsaan korkeudelle h pätee, että

$$\tan\phi = h/\sqrt{x^2 + y^2},$$

missä x ja y ovat pisteen D koordinaatit. Tällöin $h = \sqrt{x^2 + y^2}\tan\phi$. Koska $\phi = 3,5^\circ$ ja $D = (2280, 1470)$, on $h = 170m$.

3. Erotusfunktion

$$u(R) = u_1(R) - u_2(R) = \frac{ER}{R - 81} - \frac{ER}{R - 2025} \qquad (R \geq 0)$$

derivaatta on

$$u'(R) = \frac{81E}{(R + 81)^2} - \frac{2025E}{(R + 2025)^2}.$$

Yhtälön $u'(R) = 0$ ratkaisu antaa paikalliseksi ääriarvokohdaksi ehdolle vastuksen arvon $R = \sqrt{81 \cdot 2025} = 9 \cdot 45 = 405$. Derivaatan $u'(R)$ merkin vaihtumisen perusteella erotusfunktio $u(R)$ saavuttaa paikallisen maksimin tällä arvolla. Koska $u'(R) > 0$ joukossa $[0, 450], u(R)$ on kasvava arvoa $R = 450$ pienemmillä vastuksen arvoilla. Vastaavasti $u'(R)$ on vähenevä suuremmilla arvoilla. Siten erotusfunktio $u(R)$ saavuttaa suurimman arvonsa, kun $R = 450\Omega$. Ilmeisesti suurin arvo on $u(450) = \frac{2}{3}E$.

4. Olkoon X kelvottomien rasioiden lukumäärä otoksessa(100kpl). Tällöin X on binomijakautunut satunnaismuuttuja parametrein $n = 100$ ja $p = 0,025$. Erä hyväksytään, jos $X \leq 1$. Hyväksymistodennäköisyys on

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= (1-p)^n + np(1-p)^n - 1 = 0,28 = 28\%.$$

5. Käyrien $x = y^{\frac{1}{2}} + 1$ ja $x = \frac{-1}{3} + \frac{13}{3}$ leikkauspisteeksi tulee $(3, 4)$. Säiliön tilavuus on

$$V = \pi \int_0^4 (y^{\frac{1}{2}} + 1)^2 dy + \pi \int_4^8 (-\frac{1}{3}y + \frac{13}{3})^2 dy$$

$$= \pi /_0^4 \frac{1}{2}y^2 + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} + y + \frac{\pi}{9} /_4^8 - \frac{1}{3}(-y + 13)^3$$

$$= 22\frac{2}{3}\pi + 22\frac{10}{27}\pi = 45\frac{1}{27}\pi \approx 141,5m^2.$$

Koska $65 < \frac{2}{3}\pi$, on löydettävä korkeus h, jolle on

$$V(h) = \pi \int_0^h (y^{\frac{1}{2}} + 1)^2 \, dy = \pi(\frac{1}{2}h^2 + \frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}} + h) = 65.$$

Esimerkiksi haarukointimenetelmällä $h \approx 3,8m$.

6. Bakteereja tappajasolujen istuttamisen hetkellä eli välittomästi bakteerien n:nnen jakaantumisen jälkeen oli 2^n kpl. Olkoon $k = 0$ hetki, jolloin bakteerien n:s jakaantuminen tapahtuu, ja olkoon x_k bakteerien (vast. y_k tappajasolujen) lukumäärä hetkellä $k = 0, 1, 2, ...$ (juuri syömisen ja jakaantumisen jälkeen). Siten

$$x_0 = 2^n$$

$$y_0 = 1024 = 2^10$$

$$y_k = 2^k y_0 = 2^{k+10}.$$

Bakteerien lukumäärälle yleisesti pätee

$$x_{k+1} = 2(x_k - y_k) = 2x_k - 2^{k+1} y_0,$$

joten

$$x_0 = 2^n$$

$$x_1 = 2^{n+1} - 2y_0$$

$$x_2 = 2^{n+2} - 2^2 y_0 - 2^2 y_0 = 2^{n+2} - 2 \cdot 2^2 y_0$$

$$x_3 = 2^{n+3} - 2 \cdot 2^3 y_0 - 2^3 y_0 = 2^{n+3} - 3 \cdot 2^3 y_0$$

$$...$$

ja edelleen yleisesti

$$x_k = 2^{n+k} - k \cdot 2^k y_0 = (2^n - ky_0)2^k.$$

Jos $x_0 \le y_0$ (eli kun $n \le 10$), kaikki bakteerit syödään hetkellä $k = 1$. Muutoin bakteerit tulevat syödykdi loppuun kun $x_k = 0$ eli kun

$$2^n - ky_0 = 0.$$

Tästä $k = \frac{2^n}{y_0} = 2^n - 10$