HTKK, TTKK, LTKK, OY/Arkkitehtiosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 2.6.1997

1. Määritä käyrien $y = 2x^2 + x - 7$ ja $y = x^2 + 2x + 5$ rajoittaman äärellisen tasoalueen pinta-ala (tarkka arvo).

2. Teemu Teekkarin työviikko muodostuu viidestä työpäivästä (ma-pe). Jokaisena työpäivänä Teekkari on joko korkeakoululla tai vanhempiensa luona tai tapaa tyttöystävänsä neiti Trikoon. Kukin aktiviteetti vie aina koko työpäivän. Lisäksi jokaiseen työviikkoon sisältyy kaikki kolme aktiviteettia. Kuinka monella eri tavalla Teemu Teekkari voi käyttää työviikkonsa? (Huomaa, että esimerkiksi työviikko, jossa Teemu Teekkari on maanantaina vanhempiensa luona, tiistaina Trikoon luona ja lopun viikkoa korkeakoululla, on eri tavalla täytetty kuin työviikko, jossa Teemu Teekkari on maanantaina neiti Trikoon luona, tiistaina vanhempiensa luona ja lopun viikkoa korkeakoululla.) Ehtiikö hän opiskeluaikanaan käydä läpi kaikki erilaiset työviikot, kun hän laskee valmistuvansa 4,5 vuodessa (1 opiskeluvuosi = 40 työviikkoa)?

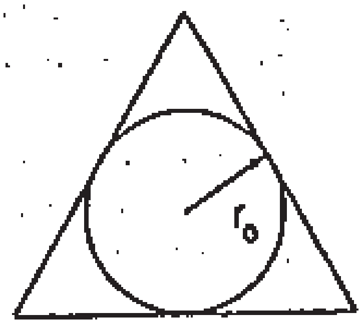
3. Ollessaan Setä Sinisen luona koulun oppituntien välillä, Petterillä ja Lotalla oli joskus tapana huvitella pienellä uhkapelillä. Pelin alussa he perustivat rahapotin, johon Petteri laittoi 4 äyriä ja Lotta 1 äyrin. Koko potin voittajasta he päättivät heittämällä kumpikin noppaa (nopan eri sivuilla silmäluvut 1,2,3,4,5 ja 6). Pelin säännöt sovittiin seuraavasti. Jos heti ensimmäisellä heitolla Petteri sai korkeamman silmäluvun kuin Lotta, Petteri voitti potin, ja peli loppui. Muutoin kumpikin heitti noppaa toisen kerran. Jos Petteri sai tällöin korkeamman silmäluvun kuin Lotta, Petteri voitti potin, muutoin Lotta. Kumman voidaan odottaa jäävän voitolle tässä pelissä, kun peliä pelataan monta kertaa?

4. Suoran ympyräpohjaisen kartion muotoinen suppilo voidaan tehdä paperista siten, että ympyränmuotoisesta paperinpalasta leikataan pois α-kulmainen sektori ja reunat teipataan yhteen (kuva 1). Millä kulman α arvolla suppilon tilavuus tulee mahdollisimman suureksi? Ilmoita kulman tarkka arvo radiaaneissa ja likiarvo asteissa yhden yksikön tarkkuudella.

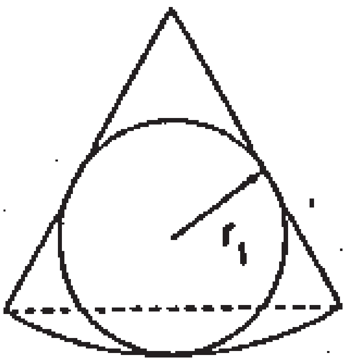
5. Kivikuulapyramidi muodostetaan neljästä kuulasta siten, että yksi kuula asetetaan kolmen maata koskettavan kuulan päälle. Lisäksi kaikki kuulat koskettavat toisiaan. Laske pyramidin (tarkka) korkeus, kun jokaisen kuulan halkaisija on 1 (pituusyksikköä)?

6. Tarkastellaan tasasivuista kolmiota ΔABC, jonka sivun pituus on 1. Piirretään tämän sisään ympyrä, jonka säde olkoon r_0 (kuva 2a). Tunnetus-

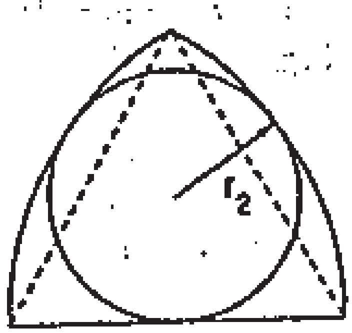
ti $r_0 = \sqrt{3}/6$. Kun kolmion ΔABC yksi sivu korvataan ympyränkaarella, jonka säde on 1 ja keskipiste kaarelle vastakkainen kolmion kärki, saadaan muuntunut kolmio. Piirretään tämänkin sisään mahdollisimman suuri ympyrä, jonka säde olkoon r_1 (kuva 2b). Kun vastaavalla tavalla kolmiosta ΔABC korvataan kaksi tai kolme sivua 1-säteisellä ympyränkaarella, löydetään toiset muuntuneet kolmiot ja näille sisään piirretyt r_2-ja r_3-säteiset ympyrät (kuvat 2c ja 2d). Määritä säteiden r_1, r_2 ja r_3 pituudet. (Huomaa, että $r_0 < r_1 < r_2 < r_3$.)



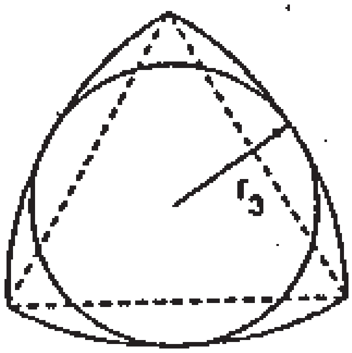
Kuva 2a



Kuva 2b



Kuva 2c



Kuva 2d