8 Newton ja Leibniz

Useimmat differentiaali- ja integraalilaskennan keskeiset ideat olivat olemassa jo 1600-luvun puoliväliin mennessä. Kuitenkin vasta *Isaac Newton* (1642–1727) ja *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) oivalsivat pinta-alanmääritys- ja tangenttitehtävien yhteyden sekä kehittivät aiemmin yksittäisiin tehtäviin sovelletuista keinoista yhtenäisen laskennallisen metodin, *kalkyylin*. Aikanaan väiteltiin paljon siitä, olivatko keksijät itsenäisiä vai jäljittelikö Leibniz Newtonia (toiseen suuntaan tapahtunutta plagiointia ei liene epäilty). Tarkempien todisteiden puutteessa on varminta olettaa, että Newton ja Leibniz kehittivät oppirakennelmansa toisistaan riippumatta.

8.1 Binomisarja

Newton kiinnostui matematiikasta vasta opiskeluvuosinaan Cambridgessä, jossa matematiikkaa opetti Isaac Barrow. Suurimmat tieteelliset keksintönsä *binomisarjan, differentiaali- ja integraalilaskennan* sekä *yleisen painovoimalain*, hän teki vuosina 1665–66, vielä opiskelijana, kun yliopisto oli suljettuna kulkutautiepidemian vuoksi. Kuten Newton itse vanhana kirjoitti:

> ”*All this was in the two plague years 1665 & 1666 for in those days I was in the prime of my age for invention and minded Mathematics and Philosophy more than at any time since.*”

Binomikaava oli positiivisten kokonaislukueksponenttien tapauksessa vanhastaan tunnettu (Pascalin kolmio). Newton ei kuitenkaan johtunut binomisarjaan suoraan binomikaavaa yleistämällä. Tosiasiassa hän tutki Wallisin määrittämiä käyrien $y = (1-x^2)^{n/2}$ alle jääviä pinta-aloja, jotka parillisilla n:n arvoilla ovat x:n polynomeja. Parittomia n:n arvoja vastaavat alat Wallis sai parillisista tietyllä interpolointimenettelyllä. Newtonin keskeinen huomio oli, että myös itse $(1-x^2)^{n/2}$ voitiin parittomilla n:n arvoilla interpoloida tunnetuista parillisten arvojen lausekkeista pinta-alakaavojen kanssa yhteensopivalla tavalla. Tämä interpoloimalla saatu kaava oli sitten yleistettävissä mielivaltaisille eksponenteille.

Newtonin binomisarja tuli julkisuuteen 1676. Binomisarja, vaikkakin ilman suppenemistarkasteluja, antoi matematiikan käyttöön erittäin tärkeän uuden työkalun, mahdollisuuden esittää funktioita äärettömien prosessien avulla, ei ainoastaan approksimaatioina vaan tarkasti.

8.2 Newtonin differentiaali- ja integraalilaskenta

Newtonin ensimmäinen differentiaali- ja integraalilaskentaa käsittelevä käsikirjoitus on vuodelta 1666, ja vuonna 1669 kirjoitettu *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas* liikkui käsikirjoituksena Englannissa. Newtonin differentiaalilaskennan perustana oli fysikaalinen analogia: käyrän voi ajatella syntyvän kahdella akselilla liikkuvien pisteiden liikkeiden yhdistämisestä. Jos x ja y ovat ajan funktioita, Newtonin sanastossa *fluentteja*, niin ne saavat lyhyenä aikana o lisäykset po ja qo. Käyrän $f(x, y) = 0$ tangentin kulmakerroin on $\frac{q}{p}$ eli y:n ja x:n hetkellisten muutosten suhde. Tämän suureen laskemiseksi Newton käytti binomisarjaa. Esim. käyrän $y^n = x^m$ kulmakertoimen määrittämiseksi lasketaan binomisarjasta ja yhtälöstä $(y + oq)^n = (x + op)^m$ ja o:lla jakaen ja sen jälkeen o-termit unohtaen

$$\frac{q}{p} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n-1}}.$$

Differentiaali- ja integraalilaskennan kehityksen ratkaiseva askel oli derivointi- ja integrointioperaatioiden käänteisyyden havaitseminen. Tämän huomion Newton teki tarkastellessaan käyrän $y = f(x)$ alle jäävää pinta-alaa: jos kyseinen ala on esim.

$$z = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$$

ja x:lle annetaan lisäys o, niin z:n saama lisäys on oy ja yhtälöstä

$$z + oy = \frac{n}{m+n}a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

saadaan jälleen binomisarjaa käyttämällä $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Potenssifunktiota monimutkaisempien funktioiden analyysi palautui potensseihin binomisarjan kautta.

Newton nimitti fluenttiensa eli funktioidensa x ja y "aikaderivaattoja" p ja q *fluksioiksi*; niiden merkinnät olivat $\dot{x}$, $\dot{y}$. Vastaavasti fluentteja, joiden fluksiot ovat x, y merkittiin $\acute{x}$, $\acute{y}$. Nämä merkinnät säilyivät Brittein saarilla viime vuosisadan lopulle asti, ja mekaniikassa niitä käytetään vielä nykyäänkin. Fluksiolaskennan piiriin kuului kahdenlaisia tehtäviä: fluenttien välisistä relaatioista johdettiin fluenttien ja niiden fluksioiden välisiä relaatioita tai fluenttien ja fluksioiden välisistä relaatioista pelkkien fluenttien relaatioita. Edellinen tehtävä vastaa derivointia ja jälkimmäinen differentiaaliyhtälön ratkaisemista.

Analyysin perusteiden kannalta olennainen raja-arvon käsite ei ollut Newtonille aivan selvä. "Pienet lisäykset" ovat tarpeen mukaan tasan nollia, jolloin ne voidaan pyyhkiä pois, tai pieniä nollasta eroavia lukuja, jolloin niillä voi supistaa. Derivaattaa määritellessään Newton käyttää puhetapaa *häviävien suureiden viimeinen suhde* tai *syntyvien suureiden ensimmäinen suhde*, silloin kun nykymatematiikka tarkastelee raja-arvoa

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)}.$$

Vaikka Newtonin teorian looginen perusta jää epävarmaksi, hän kehitti aikaisempia yksittäistapauksia tarkastelleita integrointi- ja derivointimenetelmiä paljon käyttökelpoisemman yhtenäisen differentiaali- ja integraalilaskennan, *kalkyylin*, johon sisältyivät useimmat tälle menetelmälle tyypilliset keinot kuten ketjusääntö ja integrointi sijoitusmenetelmällä.

Newtonin pääteos on monumentaalinen *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), mekaniikan ja gravitaation yleisesitys. Principian matemaattiset metodit ovat lähes kauttaaltaan traditionaalisia. On arveltu, että Newton olisi johtanut Principian tulokset differentiaali- ja integraalilaskennan avulla ja pukenut sitten todistukset euklidiseen asuun. Tätä väitettä ei ole voitu todentaa. Newton ei juuri julkaissut elinaikanaan puhtaasti matemaattisia töitä. Ensimmäinen painettu versio hänen differentiaali- ja integraalilaskennastaan oli 1704 ilmestyneen *Opticks*-teoksen liitteenä julkaistu *De quadratura curvarum*, ja hänen tärkein matemaattinen tutkielmansa oli *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, joka kirjoitettiin 1671, mutta julkaistiin vasta 1736.

Viimeksi mainitussa teoksessa Newton esittää myös sittemmin *Newtonin menetelmän* nimellä tunnetun likimääräisen menetelmän yhtälön ratkaisemiseksi. Tämä menetelmä perustuu funktion kuvaajan korvaamiseen funktion tangentilla. Newton kuitenkin johti menetelmän binomisarjan avulla. Jos ratkaistavana on yhtälö

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

ja x_1 on jokin likiarvo ratkaisulle x, niin

$$f(x_1 + p) = f(x_1) + na_n p x_1^{n-1} + (n-1)a_{n-1} p x_1^{n-2} + \cdots + a_1 p + p\text{:n}$$

korkeampia potensseja, joten $f(x_1 + p) = 0$ toteutuu likimain silloin, kun $p = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Luku $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ on uusi likiarvo yhtälön ratkaisulle jne.

Approksimaatiomenetelmäänsä Newton käytti uusien sarjakehitelmien muodostamiseen. Esimerkiksi *Nicolaus Mercatorin* (1620–87) (joka on eri henkilö kuin *Mercatorin projektion* esittäjä *Gerhardus Mercator* (1512–94)) ja Newtonin itsensä johtamasta käyrän $y(1 + x) = 1$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alan (eli $\ln(1 + x)$:n) sarjasta $z(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^x - \ldots$ Newton ratkaisi $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \ldots$, eli sai eksponenttifunktion $e^z - 1$ sarjan. Samoin Newtonin binokaavan johdon yhteydessä saama integraalin

$$\int_0^x (1 - t^2)^{1/2}\, dt$$

sarja antaa välittömästi sarjan sellaisen ympyränsektorin alalle, jonka keskuskulma θ toteuttaa ehdon $x = \sin\theta$; tästä θ:n sarjasta ratkaisemalla Newton johti $\sin x$:n ja $\cos x$:n sarjojen alut, joiden hän sitten tunnisti olevan muotoa

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots, \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots.$$

Newtonin panos analyyttisen geometrian kehitykselle on myös merkittävä. Hän suoritti kolmannen asteen käyrien luokittelun, jota pidetään ensimmäisenä täysin uutena analyyttisen geometrian avulla saavutettuna tuloksena – aikaisemmin oli vain johdettu uudelleen mm. Apollonioksen jo tuntemia totuuksia.

Newton toimi 30 vuotta Cambridgen yliopiston professorina – tähän asemaan hän pääsi Barrowin luovuttua 1669 vapaaehtoisesti oppituolistaan lahjakkaan oppilaansa hyväksi – ja myöhemmin Englannin rahapajan johtajana. Newtonin toiminta yliopistonopettajana ei juuri jättänyt pysyviä jälkiä. Huomattavan osan tieteellisistä ponnisteluistaan Newton omisti alkemistisille yrityksille muuttaa halpoja metalleja kullaksi sekä teologialle – Newton oli erityisen kiinnostunut varhaiskristillisyydestä ja aikoinaan kolminaisuusopille hävinneestä areiolaisuudesta.

8.3 Leibniz

Filosofi ja yleisnero Leibniz oli kotoisin Leipzigista. Hän oli poikkeava lahjakkuus jo nuorena: Leipzigin yliopiston kateelliset professorit hylkäsivät hänen filosofian alaan kuuluneen loistavan väitöskirjansa, koska tekijä oli liian nuori, vain 20-vuotias. (Tohtorinarvonsa Leibniz toki sai seuraavana vuonna Nürnbergin yliopistosta, juridiikan opetusta käsittelevällä työllä, jonka hän oli kirjoittanut matkalla Leipzigista Nürnbergiin.) Leibnizin leipätyönä olivat diplomaattiset ja hallintotehtävät ensin Mainzin arkkipiispan ja sitten Hannoverin vaaliruhtinaan palveluksessa. Leibnizin aikaansaannokset ulottuvat filosofian ja matematiikan lisäksi ainakin juridiikan, politiikan, teologian, historian, geologian ja fysiikan aloille. Matemaatikkona Leibniz oli itseoppinut ja joutui itseoppineiden tapaan keksimään uudelleen monia jo tunnettuja asioita.

Matematiikan historiassa Leibniz muistetaan paitsi differentiaali- ja integraalilaskennan toisena keksijänä myös symbolisen logiikan ja mekaanisen laskennan edelläkävijänä. Hän kaavaili *universaalikalkyylia*, jota käyttäen kaikki filosofian ongelmat voitaisiin yksiselitteisesti ratkaista laskemalla. Leibniz rakensi laskukoneita ja ennusti niille tulevaisuutta: ”Ei ole järkevää, että viisaat miehet kuluttavat orjien tavoin tuntikausia laskutoimituksiin, jotka kuka tahansa voisi helposti suorittaa koneiden avulla.”

Newtonin tavoin myös Leibniz sai ensimmäiset herätteet differentiaali- ja integraalilaskentaan päättymättömistä sarjoista. Sarjateoriassa Leibnizin oivallus oli tarkastella sarjan termejä jonkin lukujonon peräkkäisten termien erotuksena. Näin hän esim. pystyi laskemaan summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Tämän ongelman Leibnizille oli esittänyt hollantilainen *Christiaan Huygens* (1629–95), yksi 1600-luvun merkittävimmistä oppineista. Yleisemmin Leibniz kehitti Pascalin kolmiota muistuttavan *harmonisen kolmion*, jonka ylin rivi on harmoninen sarja ja muut alkiot kukin kahden ylempänä olevan alkion erotuksia:

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \cdots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \cdots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \cdots & & & \\
\frac{1}{5} & & & & &
\end{array}$$

Toisesta rivistä alkaen kunkin vaakarivin alkioiden summa on välittömästi yläpuolella olevan rivin ensimmäinen alkio. Tälle ilmiölle on sukua funktion kuvaajan alle jäävän pinta-alan lausuminen toisaalta funktion integraalifunktion ”viereisten arvojen” erotuksien summana, toisaalta alkuperäisen funktion arvojen summana.

Vuonna 1673 Leibniz tutustui aikaisemmin mainittuun Pascalin sinifunktiota käsittelevään tutkimukseen. Tällöin hänelle valkeni ”karakteristisen kolmion” (dx, dy, ds) yleinen käyttökelpoisuus; yksinkertainen geometrinen tarkastelu johti pinta-alanmäärityksen, ”integroimisen”, tehtäväksi, jossa on konstruoitava käyrä, kun sen tangentit tunnetaan. Pascal oli tarkastellut vain r-säteisen ympyränkehän erikoistapausta, ja päätynyt karakteristisen kolmion ja kolmion, jonka kärjet ovat ympyrän keskipiste, kehän piste ja sen projektio x-akselilla, yhdenmuotoisuudesta olennaisesti relaatioon

$$\int y\, ds = \int r\, dx,$$

jonka perusteella esim. pallon alan laskeminen käy helposti. Leibniz havaitsi, että karakteristisen kolmion avulla voitiin minkä hyvänsä käyrään liittyviä ”integrointeja" muuntaa. Erityisesti, jos käyrään $y = f(x)$ liitettiin käyrän tangentin avulla määäriteltävä toinen käyrä $z = y - x\frac{dy}{dx}$, niin geometrisin argumentein voi päätellä, että

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}\left(bf(b) - af(a) + \int_a^b z\,dx\right).$$

Kun Leibniz sovelsi tätä kaavaa ympyrän neljännekseen, hän johtui nimeään kantavaan sarjaan

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots.$$

Pari vuotta myöhemmin Leibniz hallitsi derivoinnin ja integroinnin nykyisin differentiaalimerkinnöin. Alkuaan Leibniz merkitsi muuttujan y kahden vierekkäisen arvon infinitesimaalista erotusta symbolilla ℓ ja muuttujien summaa omn.ℓ. Siten esim. $\frac{1}{2}y^2 = \int y\,dy$ merkittiin

$$\frac{\overline{\text{omn.}\ell}^2}{2} = \text{omn.}\overline{\overline{\text{omn.}\ell}\frac{\ell}{a}}$$

($a = 1$ on mukana dimensiosyistä ja kaavan ylle vedetty viivaa tarkoittaa samaa kuin nykyisin kaavan kirjoittaminen sulkumerkkien sisään). Vuonna 1675 valmistuneessa käsikirjoituksessa Leibniz korvaa omn.-merkinnän integraalimerkillä $\int$, ja hiukan myöhemmin ℓ:n operaatiomerkinnällä d. Pohdiskeltuaan kysymystä, onko $d(uv) = du\,dv$, ja todettuaan, että joka tapauksessa

$$d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = 2x\,dx + (dx)^2 = 2x\,dx,$$

Leibniz päätyy oikeisiin differentiointisääntöihin. Differentiaali- ja integraalilaskennan peruslauseeseen Leibniz päätyy huomattuaan, että käyrään, jonka ordinaatat ovat z, liittyvä pinta-ala saadaan selville, jos löydetään käyrä, jonka ordinaatat y toteuttavat ehdon $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a}$ (a jälleen dimensiotekijä). Tällöin on $z\,dx = a\,dy$, joten kysytty ala on

$$\int z\,dx = a\int dy = ay.$$

Leibnizin käyrät kulkivat yleensä origon kautta.

Leibniz alkoi 1684 julkaista differentiaalilaskentaansa koskevia tiedonantoja toimittamassaan *Acta Eruditorum Lipsienium* (Leipzigin oppineiden toimituksia) -nimisessä aikakauskirjassa. Ensimmäiseen, kuusisivuiseen julkaisuun sisältyi myös ensimmäinen uuden analyysin fysikaalinen sovellus: valon taittumista kahden väliaineen rajapinnassa koskevan *Snellin lain* johto "kuin taikatempulla". – 1600-luvun oppineitten lähes ainoa keino kertoa suhteellisen nopeasti tuloksistaan oli kirjeenvaihto; tieteellisten aikakauslehtien syntyminen vilkastutti merkittävästi tiedonvälitystä.

Leibnizin käyttämät symbolit olivat onnistuneita. Vaikka dx:n ja dy:n täsmällistä merkitystä ei määritelläkään, niillä operoiminen on intuitiivisesti selvää ja johtaa oikeisiin tuloksiin. "Ketjusääntö" "$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$" on ymmärrettävä muodossa

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

ja vaikkapa osamäärän derivointikaavan johto muodossa

$$d\frac{y}{x} = \frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x} = \frac{xy + x\,dy - xy - y\,dx}{x^2 + x\,dx} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

on intuitiivisesti selvä. Osittain juuri tällaisista syistä infinitesimaalilaskennan kehitys lähti liikkeelle Leibnizin osoittamaan suuntaan. Newtonia seurattiin vain Englannissa, jossa kehitys oli selvästi hitaampaa kuin mannermaalla, ilmeisesti ainakin osittain Newtonin merkintöjen pienemmän suggestiivisuuden vuoksi. – Toinen syy Englannin matematiikan taantumiseen oli onneton prioriteettikiista, jota käytiin vuodesta 1699 alkaen: syytös oli, että Leibniz olisi kopioinut Newtonin ideat; englantilaiset kieltäytyivät isänmaallisista syistä hyväksymästä Leibnizin merkintöjä ja analyysiä. Itse asiassa Newton ja Leiniz olivat käyneet vuosina 1676 ja -77 lyhyen kirjeenvaihdon differentiaalilaskennan perusteista, jotka molemmilla jo tuolloin oli hallussa, eikä ole syytä uskoa kummankaan kopioineen toiselta.