14 Matemaattinen logiikka ja joukko-oppi

Analyysi, geometria ja algebra ovat kaikki vanhoja, klassisia matematiikan osa-alueita. 1800-luvulla alkoi syntymään myös kokonaan uusia matematiikan lohkoja. Merkittävimpiä niistä ovat *matemaattinen logiikka* ja *joukko-oppi.*

14.1 Matemaattisen logiikan synty

Sinänsä logiikka, oppi päättelemisen säännöistä filosofian osana, kuului jo antiikin kreikkalaisten käsitteistöön. Aristotelisen logiikan keskeinen työkalu oli *syllogismi*, joka koostuu "ylälauseesta", "alalauseesta" ja "päätöslauseesta". ("Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia. Sokrates on ihminen. Siis Sokrates on kuolevainen.") Keskiajalla skolastikot kehittivät Aristoteleen logiikan järjestelmää edelleen. Leibniz spekuloi "laskennallisella logiikalla".

Luonnollisen kielen merkityssisällöistä irrallaan olevan *matemaattisen logiikan* perustajana pidetään kuitenkin itseoppinutta, alakoulunopettajana itseään ja vanhempiaan 16-vuotiaasta elättänyttä englantilaista *George Boolea* (1815–64), joka julkaisi vuosina 1847 ja 1854 teokset *Mathematical Analysis of Logic* ja *Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability.* Teokset sisältävät *joukkoalgebran* eli *Boolen algebran* esittelyn ja selvityksen siitä, miten syllogistiset päättelyt ovat käännettävissä algebran kielelle. Boole käytti yhdisteen ja leikkauksen symboleina merkkejä $+$ ja $\times$, ja yhdiste oli hänelle eksklusiivinen. Koska syllogismit ovat oikeastaan joukkoja ja osajoukkoja koskevia väittämiä, Boolen algebra kattoi klassisen logiikan. Samanlaisia formalisoivia keksintöjä Boole teki muillakin matematiikan aloilla: hän keksi käyttää *differentiaalioperaattoria* $D = \frac{d}{dx}$ ja sen symbolista manipulointia differentiaaliyhtälöiden teoriassa. Bertrand Russellin mielipiteen mukaan "Boole keksi puhtaan matematiikan". Boolen työtä jatkoivat mm. Augustus De Morgan ja amerikkalainen *Benjamin Peirce* (1809–80), jotka keksivät *De Morganin säännön* nimellä tunnetun duaalisuussäännön loogisen summan ja tulon vaihdettavuudesta. Joukkoalgebran graafisen havainnollistuksen, *Vennin diagrammit*, keksi englantilainen *John Venn* (1834–1923).

14.2 Matematiikan perusteet

Matemaattisen logiikan ja yleisen matematiikan perusteiden täsmällistämispyrkimysten myötä syntyi 1800-luvun lopussa vaatimuksia palauttaa matematiikan perusteet, ennen muuta aritmetiikka, "primitiivisemmäksi" koettuun logiikkaan ja rakentaa matematiikan järjestelmä deduktiivisesti loogisten aksioomien päälle samoin kuin Eukleides oli rakentanut geometrian omille aksioomilleen ja postulaateilleen. Perusongelma oli, mitä ovat luonnolliset luvut.

Dedekind määritteli luonnolliset luvut äärettömän joukon S ja siinä määritellyn seuraajarelaation avulla. Luonnollisten lukujen joukko on kaikkien sellaisten S:n osajoukkojen K leikkaus, jotka sisältävät 1:n ja jokaisen alkionsa myötä myös tämän seuraajan. Toisenlaista ohjelmaa yrittivät toteuttaa saksalainen *Gottlob Frege* (1848–1925), joka pyrki määrittelemään luonnolliset luvut keskenään yksikäsitteiseen vastaavuuteen asetettavissa olevien äärellisten joukkojen ekvivalenssiluokkina, ja hänen työtään suurella *Principia Mathematica* -teoksellaan (1910–13) jatkaneet englantilaiset *Alfred North Whitehead* (1861–1947) ja *Bertrand Russell* (1872–1970). Fregeä voidaan pitää symbolisen logiikan perustajana. Hänen vuonna 1879 julkaisemansa *Begriffschrift* sisältää lause- ja kvanttorilogiikan symbolit. Fregen pääteos on *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903): Juuri, kun teoksen toinen osa oli menossa painoon Frege sai Russellilta kirjeen, joka sisälsi tiedon Fregen järjestelmän tyhjäksi tekevästä paradoksista. Frege ei toipunut tästä iskusta.

Italialainen *Giuseppe Peano* (1858–1932) loi oman ohjelmansa, jonka tavoite oli koko matematiikan esittäminen yhtenäisen loogisen kalkyylin avulla. *Peanon aksioomat*, jotka määrittelevät luonnolliset luvut, ovat osa tätä ohjelmaa. Peano julkaisi aksioomansa 1889. – Peano antoi merkittävän panoksen myös matemaattiseen analyysiin mm. differentiaaliyhtälön ratkaisun olemassaoloa koskevilla tutkimuksillaan ja avaruuden täyttävää käyrää koskevalla esimerkillään. Vuonna 1903 Peano esitti keksimänsä keinotekoisen kielen *latino sine flexione* (taivutusmuodoton latina), ja uhrasi sen jälkeen enää vain vähän tarmoa matematiikalle.

14.3 Cantor ja joukko-oppi

Äärettömän ongelma oli monella tavoin askarruttanut antiikin sofisteja ja keskiajan skolastikkoja. Galileo Galilei oli ohimennen havainnut äärettömän joukon tunnusomaisen piirteen: hän huomautti, että neliöluvut voidaan asettaa yksikäsitteiseen vastaavuuteen luonnollisten lukujen kanssa, vaikka edelliset selvästi muodostavat vain pienen osan jälkimmäisistä. Gauss ja Cauchy pitivät tällaisten paradoksien olemassaoloa osoituksena siitä, että todellisen äärettömyys ei ole mahdollinen. Sen sijaan Bolzano, joka mm. osoitti yksinkertaisen geometrisen konstruktion avulla, että välillä (0, 1) on "yhtä monta" pistettä kuin välillä (0, 2), esitti kuolemansa jälkeen julkaistussa *Paradoxen des Unendliches* -teoksessaan, että tämä äärettömän joukon ominaisuus on hyväksyttävä. Dedekind sitten teki joukon ja sen osajoukon yhtämahtavuudesta äärettömän joukon määrittelevän ominaisuuden.

Huomattavasti Dedekindiä pitemmälle äärettömän luokittelussa pääsi Georg Cantor. Alkusysäyksen asiaa koskeville pohdinnoilleen Cantor sai Fourier-sarjojen yhteydessä esiin tulevista ongelmista, jotka koskevat laajahkossa joukossa epäjatkuvien funktioiden kehitelmiä. Joukkoja käsittelevien Cantorin kirjoitusten sarja alkaa vuonna 1874. Se sisältää äärettömien joukkojen hierarkkisen luokittelun ja äärettömien kardinaali- ja ordinaalilukujen aritmetiikan. Cantorin tekemistä huomioista olennaisin oli, että äärettömien joukkojen mahtavuuden ei tarvitse olla sama, toisin kuin esim. Bolzano oli ajatellut. Tähän liittyy luonnollisesti kysymys konkreettisten joukkojen mahtavuudesta. Cantor osoitti, että algebrallisten lukujen joukon mahtavuus on sama kuin luonnollisten lukujen. Tämä perustuu siihen, että kokonaislukukertoimiselle polynomille voidaan määritellä *korkeus*, joka on polynomin asteluvun ja sen kertoimien itseisarvojen summa. Kutakin korkeutta kohden on väin äärellinen määrä algebrallisia lukuja, jotka saadaan kyseistä korkeutta olevien polynomien nollakohtina.

Toisaalta Cantor osoitti, että reaalilukuja on "enemmän" kuin kokonaislukuja. Jos nimittäin (x_n) on numeroituva jono reaalilukuja, on melko helppo konstruoida rationaalilukupäätepisteiset välit $I_n = (a_n, b_n)$, joille $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots$ ja $x_n \notin I_n$. Leikkaukseen $\cap I_n$ kuuluvat luvut eivät voi olla jonossa (x_n). Myöhemmin Cantor sai näytettyä saman asian tunnetulla diagonaalikonstruktiollaan, jossa reaalilukujen numeroitumattomuus osoitetaan olettamalla luvut pannuiksi jonoon ja rakentamalla luku, jonka jokainen n:s desimaali on aina eri kuin jonon n:nnen luvun n:s desimaali. Samaa ideaa soveltaen Cantor osoitti, että joukon osajoukkojen kokoelman mahtavuus on aina joukon omaa mahtavuutta suurempi. Näin erisuuruisia äärettömiä mahtavuuksia on niitäkin äärettömän paljon. Cantor esitti myös *kontinuumihypoteesin*, jonka mukaan ei ole olemassa joukkoa, jonka mahtavuus olisi suurempi kuin luonnollisten lukujen mutta pienempi kuin reaalilukujen. Hypoteesia ei ole onnistuttu todistamaan eikä kumoamaan; sen sijaan tiedetään (Gödel, 1938, ja Cohen, 1963), että kumpikaan vaihtoehto ei ole ristiriidassa joukko-opin aksioomien kanssa.

Cantorin ajatukset kohtasivat runsaasti vastustusta. Osin vastustajat, joista arvovaltaisin oli Kronecker, olivat yksinkertaisesti ennakkoluulojen vallassa, mutta joukon käsitteen epämääräisyys antoi aiheen myös vakaville vastaväitteille. "Liian suuriin" joukkoihin liittyvät ristiriitaisuudet kuten esittäjänsä mukaan nimetty *Russellin paradoksi* – joukko, jonka alkioina ovat ne joukot, jotka eivät ole itsensä alkioita, on itsensä alkio, jos ja vain jos se ei ole itsensä alkio – antoivat aiheen etsiä joukko-opille sellaista aksiomaattista perustaa, joka sulkisi paradoksit tai paradokseja aiheuttavat joukot pois. Aksiomaattisen lähestymistavan kautta joukko-oppia pyrki pelastamaan mm. saksalainen *Ernst Zermelo* (1871–1956), kun taas Whitehead ja Russell kehittivät *Principia Mathematica* -teoksessaan samaan tarkoitukseen joukkoja luokittelevan *tyyppiteorian*. Zermelo muotoili myös monissa yhteyksissä tärkeän ja sittemmin joukko-opin muista aksioomista riippumattomaksi osoittautuneen *valinta-aksiooman*. – Cantor ei lopulta kestänyt matematiikkaansa kohdistettua ankaraa kritiikkiä. Elämänsä viimeiset vuodet hän vietti mielisairaalassa.

Matemaatikkojen jokapäiväisenä työkalunaan käyttämä yksinkertainen joukko-oppi yhdisteen, leikkauksen ja komplementin käsitteineen on olennaisesti sama kuin Boolen algebra; itse asiassa Boole tulkitsikin algebransa alkiot juuri joukoiksi.