4 Antiikin Kreikan matematiikkaa

Matematiikan voidaan katsoa muodostuneen omaksi itsenäiseksi tieteekseen kreikkalaisen kulttuurin piirissä noin puoli vuosituhatta ennen ajanlaskumme alkua. Kreikkalaisen matematiikan ajanjakso ulottuu noin vuoteen 400 jKr. asti. Se voidaan karkeasti jakaa noin vuonna 300 eKr. päättyneeseen *klassiseen kauteen* ja sitä seuranneeseen *hellenistiseen kauteen.* Kun puhutaan antiikin Kreikan matematiikasta, ei maantieteellisesti rajoituta nykyiseen tai silloiseen Kreikkaan, vaan kysymys on paljon laajemmasta alueesta, joka käsitti myös Etelä-Italian, Sisilian, Vähän-Aasian ja Egyptin. Kaikki huomattavat matemaatikot eivät olleet kansallisuudeltaankaan kreikkalaisia.

Tiedot kreikkalaisen matematiikan varhaiskehityksestä perustuvat etupäässä lähes tuhat vuotta myöhemmin kirjoittaneen *Prokluksen* (410[?]–485 jKr.) historiaan. Myöhempienkään kreikkalaisten matemaatikkojen alkuperäisiä käsikirjoituksia ei ole säilynyt. Luultavasti monien tuntemiemme kreikkalaisten suurenmoisten matemaattisten saavutusten lisäksi paljon hienoa matematiikkaa on aikojen saatossa tuhoutunutkin. Hyvin suuri osa varhempien vuosisatojen kreikkalaisesta matematiikasta on koottu *Eukleideen* monumentaaliseen teokseen *Alkeet*, joka on kirjoitettu noin 300 eKr.

Kreikan perustavaa laatua oleva merkitys matematiikan historialle näkyy vaikkapa lukuisien matemaattisten termien kreikkalaisesta alkuperästä. Tällaisia ovat vaikkapa *trigonometria, logaritmi, aritmetiikka, geometria, matematiikka, teoreema, tetraedri, probleema, ellipsi, paraabeli, hyperbeli, aksiooma, analyysi* . . . Luetteloa voi jatkaa lähes rajatta.

4.1 Kreikkalaisten laskento

Kauppaa käyvät kreikkalaiset kaupunkivaltiot tarvitsivat käytännön aritmetiikkaa. Erotukseksi lukujen ominaisuuksia tutkivasta "oikeasta" *aritmetiikasta*, nykytermein siis *lukuteoriasta*, käytännön laskemista kutsuttiin *logistiikaksi*.

Kreikkalaiset käyttivät lukujen merkinnässä kahta eri järjestelmää. Vanhemmassa, *attikalaisessa* eli *herodiaanisessa* järjestelmässä esitystapa oli samanlainen kuin egyptiläisillä tai roomalaisilla, ts. ykkösellä, kymmenellä, sadalla, tuhannella ja kymmenellätuhannella oli oma symbolinsa kullakin. ($I = 1$, $\Gamma = 5$, ei iso gamma vaan vanha iso pi kuten pentagoni, $\Delta = 10$, $H = 100$ – vrt. hehtaari – $X = 1000$ – vrt. kilo – $M = 10000$). Myöhemmässä, *joonialaisessa* järjestelmässä kutakin luvuista 1, 2, . . . , 9, 10, 20, . . . , 90, 100, 200, . . . , 900 vastasi aakkoston kirjain ($1 = A$, $2 = B$, $3 = \Gamma$ jne., myöhemmin $1 = \alpha$ jne.), lukuja 1000, . . . , 9000 merkittiin vastaavilla ykkösten symboleilla, joita edelsi pilkku, ja suurempia lukuja käyttämällä kerrointa $M = 10^4$. Jotta luvut eivät sekoittuisi sanoihin, lukuja tarkoittavien kirjainten tai kirjainyhdistelmien yläpuolelle vedettiin vaakasuora viiva. Tavallisten kreikan aakkosten lisäksi numeromerkinnöissä käytettiin muutamaa sittemmin aakkoskäytöstä poistunutta kirjainta. – Vaikka kreikan kirjaimisto on paljolti lainaa foinikialaisilta, keksintö käyttää kirjaimia numeroina on puhtaasti kreikkalainen.

4.2 Joonialaiset numerot

Joonialainen numeromerkintä säilyi tieteellisessä käytössä länsimaissa vielä pitkään keskiajan lopulle, kauan nykyisen intialais-arabialaisen lukumerkinnän käyttööntulon jälkeenkin. – Joonialaiseen lukumerkintään ei varsinaisesti kuulunut murtolukuja; yksikkömurtoluvuista käytettiin kuitenkin merkintää, jossa nimittäjää esittävään symboliin liitettiin murtoluvun merkki, ja myöhemmin tulivat käyttöön seksagesimaalimurtoluvut (minuutit ja sekunnit).

4.3 Thales – kreikkalaisen matematiikan alku

Perimätiedon mukaan ensimmäinen nimeltä tunnettu kreikkalainen matemaatikko (ja matemaatikko yleensäkin) oli Vähän-Aasian Miletoksesta kotoisin ollut kauppias *Thales* (624[?]–547[?] eKr.). Thaleen, joka oli yksi Kreikan perinteen seitsemästä viisaasta, kerrottiin saaneen oppinsa Egyptistä. Hänen sanotaan esittäneen tai todistaneen seuraavat viisi geometrian teoreemaa. – Sanan *teoreema*, samoin kuin *teorian* ja *teatterin* pohjana on kreikan katsomista tarkoittava verbi.

1. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.
2. Ristikulmat ovat yhtä suuret.
3. Kaksi kolmiota, joilla on yhtä suuret kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu, ovat yhtenevät.
4. Ympyrän jokainen halkaisija jakaa ympyrän kahteen yhtä suureen osaan.
5. Puoliympyrän kaaren sisältämä kulma on suora.

Näistä erityisesti viimeinen kulkee edelleen nimellä *Thaleen lause*.

On huomattava perustavanlaatuinen ero Thaleen ja babylonialaisen tai egyptiläisen geometrian välillä: Thales muotoili yleispäteviä kuvioiden ominaisuuksia koskevia lauseita, jälkimmäiset esittivät laskennollisia ratkaisuja tiettyihin eksplisiittisesti muotoiltuihin probleemoihin. Epäselvempää on, mitä tarkoittaa, että Thales todisti nämä – ilmeisesti hän esitti väittämien tueksi rationaalisia perusteluja.

4.4 Pythagoras ja pythagoralainen matematiikka

Noin puoli vuosisataa Thalesta nuorempi on Samos-saarelta kotoisin oleva *Pythagoras* (572[?]–497 eKr.), niin ikään puoleksi tarunomainen hahmo. Pythagoraan Etelä-Italian Crotoneen perustamalla matemaattis-mystisellä koulukunnalla on ollut suuri merkitys matematiikan kehitykselle itsenäiseksi tieteenalaksi. Sana "matematiikka", $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ johdoksineen, lienee pythagoralaisten käyttöön ottama, ja sen alkuperäinen merkitys on 'se, mikä tulee tietää'. Pythagoralaisten keskuudessa sanotaan tulleen käyttöön opetussuunnitelman, jossa *geometrialla*, *aritmetiikalla*, *astronomialla* ja *musiikilla*, myöhemmin latinankielisellä nimellä *quadrivium* tunnetulla yhdistelmällä, oli keskeinen asema. (Huom. *Triviaali* tulee seitsemän vapaan taiteen oppijakson alkuosan humanistisemmista kolmesta aineesta, *grammatiikasta*, *retoriikasta* ja *logiikasta*, jotka muodostivat *triviumin*.)

Pythagoralaisten veljeskunnan symboli oli viisikanta eli pentagrammi, säännöllisen viisikulmion lävistäjien muodostama viisisakarainen tähti, jonka keskustan muodostaa säännöllinen viisikulmio. Symbolin ja kuvioon sisältyvän matematiikan yhteydestä janojen yhteismitattomuuden keksimiseen on spekuloitu.

Pythagoralaiset eivät juuri jättäneet kirjallisia lähteitä – veljeskunta siirsi tietoa suullisesti ja pyrki salaamaan oppinsa ulkopuolisilta. Turvallisempaa kuin liittää asioita suoraan Pythagoraaseen itseensä on sanoa niiden liittyvän pythagoralaisiin.

Keskeistä pythagoralaisten matematiikassa ja koko filosofiassa oli (luonnollinen) luku. Tässä mielessä Pythagoraan koulukuntaa voidaan pitää babylonialaisen aritmeettis-algebrallisen tradition jatkajana. Aritmetiikka erotettuna logistiikasta on pythagoralaista lähtöä. Pythagoralaisilta periytyvät paitsi lukumystiikkaan liittyvät käsitteet myös useat yhä käytössä olevat lukujen luokittelut. Tällainen on mm. luokittelu *parilliset* ja *parittomat* luvut. Yhtä ja toisinaan myös kahta ei pidetty samassa mielessä lukuina kuin nyt. Luokitusta tarkennettiin mm. jaolla pariton–pariton, pariton–parillinen, parillinen–parillinen. Luokittelu *alkuluku – yhdistetty luku* on myös pythagoralainen. Alkulukuja kutsuttiin *lineaarisiksi luvuiksi*, yhdistettyjä lukuja *tasoluvuiksi*. Jako *täydellisiksi, vajaiksi* ja *abundanteiksi* eli *runsaiksi* luvuiksi on myös vanha, joskaan sitä ei pystytä suoraan kytkemään pythagoralaisiin. Luku on vajaa, jos sen tekijöiden (1 mukana, luku itse ei) summa on pienempi kuin itse luku $(1 + 2 + 4 < 8)$, täydellinen, jos summa on sama kuin luku $(1+2+3 = 6)$ ja runsas, jos summa on suurempi kuin luku $(1 + 2 + 4 + 6 > 12)$. Antiikin aikana tunnettiin neljä täydellistä lukua: 6, 28, 496 ja 8128. Lisäksi tiedettiin, että jos $2^p - 1$ on alkuluku, niin $2^{p-1}(2^p - 1)$ on täydellinen luku. – Euler todisti 1700-luvulla, että kaikki täydelliset luvut ovat tätä muotoa. Muotoa $2^p - 1$ olevat alkuluvut ovat ns. Mersennen alkulukuja; usein uusien ja entistä tehokkaampien tietokoneiden testiajoissa saavutetut "suurin tunnettu alkuluku" -muotoiset ennätykset ovat poikkeuksetta koskeneet Mersennen alkulukuja.

Täydellisen luvun käsitteen sukulainen on *ystävällisten lukujen* käsite: n ja m ovat ystävällisiä, jos n on m:n tekijöiden summa ja m n:n tekijöiden summa. Pari $m = 284$, $n = 220$ on esimerkki tällaisista luvuista.

Tyypillinen pythagoralaisten tuote oli *kuviolukujen* teoria. Kuviolukuja ovat kolmioluvut 1, 3, 5, ... , neliöluvut 1, 4, 9, ... , viisikulmioluvut 1, 5, 12, ... ja *pitkänomaiset luvut* 2, 6, 12, 20, ... Yleisesti 1. n-kulmioluku on 1, 2. on n. Jos k:nnetta lukua $m(n, k)$ edustaa n-kulmio ja siinä olevat $m(n, k)$ pistettä, $k + 1$. saadaan jatkamalla kahta n-kulmion sivua $\frac{1}{k}$-osalla pituudestaan, täydentämällä kuvio n-kulmioksi ja lisäämällä uusille sivuille pisteitä niin, että kuvion reunan joka sivulla on sama määrä pisteitä. Prosessissa lisätyt pisteet muodostavat *gnomonin*, kuvion, joka edustaa kahden peräkkäisen kuvioluvun erotusta. Kuvioita, erityisesti gnomoneja tarkastelemalla näkee helposti monia lukurelaatioita, mm.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

tai

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n(n + 1)$$

(kaksi n:ttä kolmiolukua muodostavat pitkänomaisen luvun $n(n + 1)$) tai että neliöluku on kahden peräkkäisen kolmioluvun summa.

Käsitteet *aritmeettinen*, *geometrinen* ja *harmoninen keskiarvo* ovat peräisin pythagoralaisilta. Näihin johduttiin ilmeisesti musiikkiin liittyvien numerosuhteiden tarkastelujen kautta, pythagoralaiset kun havaitsivat, että jännitettyjen kielten äänenkorkeudet ja kielten pituudet olivat tekemisissä toistensa kanssa. Sen, että b on a:n ja c:n aritmeettinen, geometrinen tai harmoninen keskiarvo voi karakterisoida yhtälöillä

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{a}{a}, \quad \frac{c-b}{b-a} = \frac{b}{a}, \quad \frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{a}.$$

Oktaavin päässä toisistaan olevia säveliä vastaavien kielenpituuksien harmoninen keskiarvo antaa sävelen, joka on kvinttiä korkeampi kuin alkuperäisistä sävelistä matalampi. Sävelharmonia teki lukukolmikon (6, 8, 12) sinänsä harmoniseksi; seurauksena oli esim., että kuutio, jossa on 6 sivutahkoa, 8 kärkeä ja 12 särmää, oli harmoninen kappale.

Pythagoralaiset määrittelivät a:lle ja c:lle kaikkiaan 10 eri keskiarvoa varioimalla a:n, b:n ja c:n paikkoja ylläolevan kaltaisissa kaavoissa.

Geometriassa riidattomimmin pythagoralaisiin liitettävä teoreema on kolmion kulmien summaa koskeva lause.

Pythagoraan lauseen alkuperä kreikkalaisessa geometriassa on epäselvä. Olettamusta, jonka mukaan lause tosiaan olisi peräisin itse Pythagoraalta, ei ainakaan voi helposti todistaa vääräksi. Yksinkertainen ja mahdollisesti alkuperäinen lauseen todistus hyödyntää yhdenmuotoisia kolmioita, jotka synnyttää hypotenuusaa vastaan piirretty korkeus: jos x ja y ovat kateettien a ja b projektiot hypotenuusalla c, niin

$$c = x + y = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c},$$

josta $c^2 = a^2 + b^2$. Tämä todistus perustuu kuitenkin suhdeoppiin, joka osoittautui ongelmalliseksi. Eukleides todistaakin Pythagoraan lauseen älykkään apupiirroksen avulla, joka palauttaa kysymyksen tietoon, jonka mukaan samakantaisilla ja samakorkeuksisilla kolmioilla on sama ala. Pythagoraan on arveltu päätyneen lauseeseensa havaittuaan, että kolmio, jonka sivut ovat 5, 4 ja 3 on suorakulmainen; todistus on voinut sitten perustua yhdenmuotoisiin suorakulmaisiin kolmioihin tai neliön erilaisiin paloitteluihin neljäksi suorakulmaiseksi kolmioksi ja neliöiksi.

4.5 Yhteismitattomuus

Pythagoralaisten kokonaislukuihin perustuva matematiikan järjestelmä johti ymmärrettävästi geometriassa yhteismitallisuuteen perustuvaan suhdeoppiin: geometrisia suureita yritettiin verrata toisiinsa niiden mittalukujen kautta. Pythagoralaisten järjestelmä koki melkoisen kriisin, kun (ilmeisesti viidennellä vuosisadalla ennen ajanlaskumme alkua kuitenkin Pythagoraan elinaikaa myöhemmin – vuosilukua 430 eKr. on esitetty) havaittiin, että monet yksinkertaiset janaparit, kuten neliön sivu ja lävistäjä tai jatkuvaan suhteeseen jaetun janan osat, eivät voi olla yhteismitallisia.

Tunnettu jaollisuuteen perustuva epäsuora todistus luvun $\sqrt{2}$ irrationaalisuudelle (Jos $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ja $\frac{p}{q}$ on supistettu murtoluku, niin $p^2 = 2q^2$, joten p^2 ja siis p on parillinen, jolloin p^2 ja siis $2q^2$ on jaollinen 4:llä, ja q^2 siis parillinen eli q parillinen, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\frac{p}{q}$ on supistettu.) on mahdollisesti ollut tuttu pythagoralaisille; ainakin Eukleides käyttää sitä. Todistus yhdistettynä Pythagoraan lauseeseen kertoo heti, että neliön sivu ja lävistäjä eivät voi olla saman janan monikertoja: ne eivät siis ole yhteismitallisia.

Toinen arveltu tie yhteismitattomien janojen olemassaolon toteamiseen liittyy viisikantakuvioon. Jos viisikulmion sivu on a ja lävistäjä d, on viisikantaan liittyviä tasakylkisiä kolmioita tarkastelemalla melko helppo johtua tulokseen, jonka mukaan $\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}$. Viisikulmion sivu on tämän mukaan pitempi niistä osista, jotka saadaan, kun lävistäjä jaetaan ns. jatkuvaan suhteeseen. Jatkuvaan suhteeseen perustuvaa jakoa voi jatkaa: jos sivusta erotetaan lävistäjän jaon pienempi osa $d-a$, jäljelle jääneen osan $a-(d-a) = 2a-d$ suhde $d-a$:han on sama kuin $d-a$:n suhde a:han jne. Jos nyt a ja d olisivat janan m monikertoja, olisi sitä $d-a$, $2a-d$ jne., mutta jakoja toistettaessa jako-osat pienenevät, ja lopulta alittavat m:n, ja tullaan taas ristiriitaan. – Edellisissä päättelyissä on molemmissa esiintynyt *epäsuora todistus*. Se on yksi kreikkalaisen matematiikan ominaispiirteitä.

Yhteismitattomuuden havaitseminen ja tästä seuraava huomio, jonka mukaan pelkillä lukusuhteilla ei voida ilmaista geometrisia relaatioita, johti matematiikan painopisteen muuttumiseen geometrian suuntaan: aikaisemmin laskemalla ratkaistut tehtävät oli voitava ratkaista synteettisen geometrian keinoin, samaa ulottuvuutta olevien kuvioiden avulla. Huomattakoon, että kutsumme yhä x^2:sta ja x^3 x:n *neliöksi* ja *kuutioksi*.

Mm. toisen asteen yhtälöitä vastaavia tehtäviä ei voinut ratkaista babylonialaisten tapaan laskualgoritmilla, vaan laskualgoritmia vastaavalla geometrisella konstruktiolla. Tällainen on ns. *pinta-alan sovittaminen*. Tehtävässä konstruoidaan suorakaide, jonka kanta on annetun janan pituinen ja jonka ala ylittää tai alittaa annetun neliön alan neliöllä, jonka sivu on suorakaiteen korkeus. Algebrallisesti tehtävä on $ax \pm x^2 = b^2$. Yksinkertainen geometrinen konstruktio tehtävän ratkaisemiseksi: piirretään $AB = a$. Olkoon C AB:n keskipiste. Erotetaan AB:n keskinormaalilta $CO = b$. Piirretään O-keskinen $\frac{a}{2}$-säteinen ympyrä, joka leikkaa puolisäteen CB pisteessä D. Nyt $DB = x$, sillä jos piirretään neliö $DBEF$, niin suorakaiteen $ADFG$ ala on

$$\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}\right)\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}\right) = b^2.$$

Jos D on janalla CB, on siis $ax = b^2 + x^2$, ja jos D on CB:n jatkeella, niin $b^2 = ax + x^2$.

Tieteen historiaa sysäyksittäin etenevänä pitävät kutsuvat yhteismitattomuuden keksimistä matematiikan ensimmäiseksi suureksi kriisiksi.

4.6 Antiikin kolme suurta ongelmaa

Vanhin ilmeisesti jokseenkin alkuperäisen kaltaisena jälkimaailmalle säilynyt kreikkalainen matemaattinen teksti on Khiokselta kotoisin olleen *Hippokrateen* (joka on eri henkilö kuin lääketieteen isänä tunnettu Kosin Hippokrates) tasakylkiseen suorakulmaiseen kolmioon liittyvien ympyränkaarikaksikulmioiden eli *Hippokrateen kuunsirppien* pinta-alan määritys (noin 430 eKr.).

Puoliympyröiden, joiden halkaisijoina ovat (minkä hyvänsä) suorakulmaisen kolmion hypotenuusa c ja kateetit a ja b, alat ovat muotoa kc^2, ka^2 ja kb^2, missä k on verrannollisuuskerroin (itse asiassa $k = \frac{1}{2}\pi$). Jos ison puoliympyrän ulkopuolelle jäävien pienempien puoliympyröiden osien ala on X, niin koko kuvion ala voidaan lausua kahdella tavalla: $X + kc^2 = ka^2 + kb^2 + \frac{1}{2}ab$. Pythagoraan lauseesta seuraa heti, että $X = \frac{1}{2}ab$ eli sama kuin suorakulmaisen kolmion ala.

Hippokrateen sanotaan yrittäneen soveltaa samaa ideaa ympyrän pinta-alan määrittämiseen seuraavasti: jos säännöllisen kuusikulmion, jonka sivu on r ja ala Y, ympäri piirretään ympyrä ja kunkin kuusikulmion sivu halkaisijana piirretään puoliympyrät, saadaan piparkakun muotoinen alue, jonka ala on toisaalta $Y + 6k\left(\frac{r}{2}\right)^2$, toisaalta $kr^2 + 6X$, missä X on ison ympyrän ja pienemmän puoliympyrän väliin jäävän alueen ala. Jos X tunnetaan, verrannollisuuskerroin k eli ympyrän ala voidaan määrittää. Ongelmaksi muodostuu se, että X ei ole samoin helposti määritettävissä kuin vastaavassa suorakulmaisen kolmion tapauksessa. – Trigonometrisin tarkasteluin voidaan osoittaa, että ympyränkaksikulmion neliöinti onnistuu silloin ja vain silloin, kun kaksikulmiota rajoittavien kaarien keskuskulmien suhde on jokin luvuista 2, 3, $\frac{3}{2}$, 5, $\frac{5}{3}$. Ensimmäinen, joka tämän todisti, oli Turun Akatemian matematiikan professori *Martin Wallenius* (1731–73).

Ympyrän pinta-alan määritys eli *ympyrän neliöintiongelma* on yksi antiikin kolmesta suuresta matemaattisesta ongelmasta, joiden tutkimus alkaa viidenneltä vuosisadalta eKr. Muut kaksi ovat *kulman kolmijako* ja *kuution kahdentaminen*. Kaikissa tapauksissa ratkaisu pyrittiin saamaan puhtaasti geometrisin konstruktiomenetelmin, harpilla ja viivoittimella eli ns. euklidisilla työkaluilla. Vasta viime vuosisadalla kyettiin lopullisesti osoittamaan, että mikään näistä konstruktioista ei onnistu. Ympyrän neliöinnin mahdottomuus palautuu siihen, että π on transsendenttiluku (minkä todisti saksalainen *F. Lindeman* (1852–1939) v. 1882), ja kulman kolmijaon sekä kuution kahdentamisen mahdottomuus siihen, että harppi ja viivoitinkonstruktioin voidaan tuottaa vain pisteitä, joiden koordinaatit saadaan lähtöpisteiden koordinaateista rationaalisin laskutoimituksin ja neliöjuuren otoin, kun taas mainitut ongelmat johtavat yleensä kolmannen asteen yhtälöihin, joille 1800-luvun alkupuolella kehittyneiden keinojen mukaan tällainen ratkaisu ei yleensä ole mahdollinen. Täsmällisen todistuksen kuution kahdennustehtävän ja kulman kolmijaon ratkeamattomuudelle harpilla ja viivoittimella antoi ranskalainen *Pierre Wantzell* (1814–48) vuonna 1837. – Kolmijako-ongelma kiehtoo silti edelleen, ja esim. yliopistojen matematiikan laitoksiin saapuu yhä ehdotuksia ongelman ratkaisemiseksi.

Antiikin kolme suurta ongelmaa ovat tyypillisiä puhtaan matematiikan ongelmia: niillä ei oikeastaan ole mitään tekemistä käytännön tarpeiden kanssa. Vaikka 2200 vuoden työ lopulta osoitti, että kaikki kolme ongelmaa ovat alkuperäisessä mielessä ratkeamattomia, niin ratkaisuyritysten vaatimien lisäapuneuvojen kehittely on monissa yhteyksissä vienyt matematiikan kehitystä eteenpäin: jo antiikissa esim. *Menaikhmos* (noin 350 eKr.) johtui kuutiota kahdentaessaan *kartioleikkauskäyriin* ja *Hippias* (noin 425 eKr.) kulman kolmijako-ongelman yhteydessä eräiseen *transsendenttikäyrään*.

Hippiaan käyrän, *trisectrixin* eli *quadratrixin*, voi ajatella syntyvän tasaisella kulmanopeudella pyörivän ympyrän säteen ja tasaisella nopeudella liikkuvan, suuntansa säilyttävän janan leikkauspisteen urana. Ajatellaan, että ympyrän keskipiste on origo ja säde kääntyy vastapäivään niin, että sen toinen päätepiste lähtee pisteestä $A = (1,\, 0)$ ja päätyy pisteeseen $B = (0,\, 1)$. Saman ajan kuluessa x-akselin suuntainen jana puolestaan kohoaa niin, että sen toinen päätepiste siirtyy origosta O pisteeseen B. Jos säteen ja janan leikkauspisteen piirtää trisectrix-käyrän. Nykymerkinnöin käyrän yhtälöksi saataisiin

$$x = \frac{y}{\tan\frac{\pi y}{2}}.$$

Jos trisectrix on käytettävissä, kulman kolmijako (tai mihin tahansa suhteeseen jako) on yksinkertaista. Sijoitetaan kulma, jonka suuruus on α niin, että sen kärki on origossa ja oikea kylki yhtyy x-akseliin. Jos vasemman kyljen ja quadratrixin leikkauspiste on $P_0 = (x_0, y_0)$, niin suora $y = \frac{1}{3}y_0$ leikkaa trisectrixin pisteessä P_1 niin, että $\angle AOP_1 = \frac{1}{3}\alpha$. Koska

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

trisectrix leikkaa x-akselin pisteessä, jonka etäisyys origosta on 1-säteisen ympyrän kehän neljännes. Tätä tietoa voi käyttää ympyrän suuruisen neliön konstruoimiseen. – Viimeksi mainittua havaintoa ei tehnyt Hippias, vaan vasta myöhemmin *Dinostratos*, Menaikhmoksen veli.

Kolmijako-ongelmaan esitettiin myös mm. ns. *neusis*-ratkaisuja. Niissä pyrittiin "liu'uttamaan" määrämittainen jana asemaan, jota ei voi määrittää harpilla ja viivoittimella. Arkhimedes esitti sauraavan yksinkertaisen kolmijakokonstruktion: Olkoon annettu kulma AOB, $AO = OB = r$. Piirretään O-keskinen r-säteinen ympyrä ja piirretään A:n kautta suora, joka leikkaa ympyrän myös pisteessä D ja suoran BO pisteessä C; asetetaan suora vielä niin, että $CD = r$ (tämä on *neusis*). Tasakylkisistä kolmioista DCO ja DOA nähdään heti, että $\angle AOB = 3\cdot\angle ACB$.

Kuution kahdennusongelma tunnettiin antiikin aikana myös *Deloksen ongelmana*. Legendan mukaan Delos-saarta vaivanneen kulkutautiepidemian vuoksi konsultoitu oraakkeli oli kehottanut kaksinkertaistamaan Apollon temppelin kuutionmuotoisen alttarin. Epidemia ei ollut hellittänyt, vaikka työmiehet olivat rakentaneet alttarin, jonka mittasuhteet olivat alkuperäiseen verraten kaksinkertaiset. Deloksen asukkaat kysyivät neuvoa Platonilta, jonka piirin matemaatikot yrittivät ratkaista ongelmaa.

Neliön kahdennustehtävä: etsi x, jolle $x^2 = 2a^2$, voidaan ratkaista etsimällä a:n ja $2a$:n keskiverto:

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{a}.$$

Hippokrates (joka eli paljon ennen Platonia!) keksi, että kuution kahdennusongelma palautuu samalla tavoin kahden janan kahden keskiverron määrittämiseen: jos

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

niin

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Menaikhmos puolestaan osoitti, että Hippokrateen versio ongelmasta palautui paraabelin (nykyaikaisin merkinnöin esim. $y = \frac{1}{2}x^2$) ja hyperbelin (nykyaikaisin merkinnöin $xy = a$) leikkauspisteen etsimiseen.

4.7 Zenonin paradoksit

Yhteismitattomuuden tavoin merkittävää osaa kreikkalaisen matematiikan kehityksessä näyttelivät elealaisen *Zenonin* (n. 450 eKr.) liikettä, aikaa ja äärettömyyttä koskevat paradoksit *dikotomia*, *Akhilleus ja kilpikonna*, *nuoli* ja *stadion*.

Jos on kuljettava 0:sta 1:een, on ohitettava pisteet $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, jne. äärettömän monessa pisteessä ei voi vierailla äärellisessä ajassa, joten liike ei ole mahdollista. Jotta Akhilleus tavoittaisi kilpikonnan, hänen on ensin päästävä pisteeseen, jossa välimatka on puolet alkuperäisestä, sitten pisteeseen, jossa se on neljäsosa alkuperäisestä jne. Koska Akhilleuksen on ohitettava äärettömän monta pistettä, hän ei ehdi koskaan tavoittaa kilpikonnaa. Lentävä nuoli on jokaisena ajanhetkenä tietyssä paikassa. Se ei voi liikkua. Olkoon kolme riviä esineitä:

$$\begin{array}{cccccc} & A & A & A & A & \\ B & B & B & B & & \\ & & C & C & C & C \end{array}$$

Jos A:t ovat paikallaan, B:t liikkuvat oikealle niin, että lyhyimpänä mahdollisena aikana B:t siirtyvät yhden pykälän A:ihin verrattuna ja C:t liikkuvat samoin vasemmalle, niin lyhyimpänä mahdollisena hetkenä B:t ja C:t siirtyvätkin toisiinsa nähden kaksi pykälää, joten on vielä lyhempiä hetkiä.

Zenonin paradoksit osoittavat, että avaruuden käsittäminen diskreetiksi – mikä oli kokonaislukuihin perustuvan pythagoralaisen matematiikan mukainen käsitys – johtaa ongelmiin. *Aristoteles* (384–322 eKr.) torjui paradoksit tuomalla matematiikkaan *luvun* ja *suureen* eron. Suuretta voidaan jakaa rajatta. Zenonin paradokseihin sisältyvät ongelmat tulivat uudelleen merkityksellisiksi nykyaikaisen matemaattisen analyysin myötä.

4.8 Tyhjennysmenetelmä ja suhdeoppi

Vaikka filosofi *Platon* (429–347 eKr.) ei itse ollut matemaatikko, hänen Ateenassa toimineen filosofikoulunsa, *Akademian*, (jonka portilla kerrotaan olleen tekstin ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ, "pääsy kielletty geometriaan perehtymättömiltä") piirissä toimi useita huomattavia matemaatikkoja, mm. jo mainittu Menaikhmos. Platon itse oli ollut kosketuksissa pythagoralaisiin Sisiliassa. Platonin hahmotteleman ideaalivaltion filosofijohtajien tuli olla matemaattisesti koulutettuja. Platonin omat filosofiset kirjoitukset ovat ensimmäisiä, joissa esiintyy matematiikan perusteita käsitteleviä jaksoja. – Platonin *Valtio*-teoksessa esitetään, että sopivin valtion asukasmäärä on 5 040, koska kyseinen luku on lukujen 12, 21 ja 20 tulo, koska sen kahdestoista osa on jaollinen 12:lla ja koska se on jaollinen kaikilla luvuilla 1:stä 12:een (paitsi 11:llä; kuitenkin 11 jakaa luvun 5 038).

Huomattavin Platonin piirin matemaattinen edustaja on knidoslainen *Eudoksos* (408[?]–355 eKr.), joka saattoi yhteismitattomien suureiden suhdeopin loogisesti pitävälle perustalle seuraavalla määrittelyllä: Jos A, B, C ja D ovat samaa laatua olevia suureita (pituuksia, pinta-aloja jne.), niin yhtäsuuruus $A : B = C : D$ on voimassa silloin ja vain silloin, kun jokainen positiivisten kokonaislukujen pari m, n toteuttaa tasan yhden seuraavista kolmesta relaatiosta:

$$\begin{aligned} mA &< nB \quad &\text{ja}\quad mC &< nD,\\ mA &= nB \quad &\text{ja}\quad mC &= nD,\\ mA &> nB \quad &\text{ja}\quad mC &> nD. \end{aligned}$$

Tämän voi tulkita vaikkapa niin, että kaksi "irrationaalista" suhdetta ovat samat, jos jokainen rationaalilukujen suhde, joka on toista irrationaalisuhdetta pienempi, on toistakin pienempi, mutta eri suuret, jos on olemassa rationaalilukusuhde, joka on toista irrationaalisuhdetta suurempi ja toista pienempi. Eudoksoksen määritelmä tulee hyvin lähelle runsaat kaksituhatta vuotta myöhemmin (1800-luvun lopulla) esitettyä reaaliluvun määrittelyä rationaalilukujen joukon ns. *Dedekindin leikkauksena*!

Toinen Eudoksoksen merkittävä keksintö oli ns. *ekshaustio-* eli *tyhjennysmenetelmä* pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämiseksi tai yhtäsuuruuden todistamiseksi. Tyhjennysmenetelmän ydin on seuraava raja-arvokäsitteelle sukua oleva havainto: Olkoon annettuna kaksi suuretta, A ja B. Jos A:sta vähennetään suure, joka on suurempi kuin $A/2$, jäljellä olevasta osasta taas yli puolet jne., tullaan aina lopulta tilanteeseen, jossa jäännös on pienempi kuin B. Tyhjennysmenetelmän avulla voidaan muodostaa täsmällisiä epäsuoria todistuksia käyräviivaisia kuvioita koskeville lauseille ja määrittää pinta-aloja ja tilavuuksia, tarvitsematta varsinaisesti mennä raja-arvoihin tai vastaaviin äärettömiin prosesseihin.

Esimerkiksi lause ”ympyröiden alat suhtautuvat toisiinsa kuten säteiden neliöt” voidaan ekshaustiomenetelmällä todistaa epäsuorasti vertaamalla ympyröiden aloja sisään piirrettyjen säännöllisten monikulmioiden aloihin, joiden tiedetään suhtautuvan kuten vastinjanojen neliöt. Jos $A_1 > \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2$ ja $B = A_1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2$, saadaan jakoa tihentämällä r_1-säteisen ympyrän sisään piirretyn monikulmion ja alan ja A_1:n erotus pienemmäksi kuin B. Jos nimittäin k-kulmio vaihdetaan $2k$-kulmioksi, ympyrän ja monikulmion välinen ala pienenee tasan puolella sellaisten suorakaiteiden alasta, joiden kannat ovat k-kulmion sivuja ja korkeudet monikulmion ja ympyrän erotuksen muodostavien ympyränsegmenttien korkeuksia. Koska segmentin ala on pienempi kuin sitä ympäröivän suorakaiteen, tyhjennysehto täyttyy. Jos nyt $A_1^{(k)}$ ja $A_2^{(k)}$ ovat ympyröiden sisään piirrettyjen säännöllisten k-kulmioiden alat, niin jollain k:n arvolla $A_1 - A_1^{(k)} < B = A_1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2$ Tästä, monikulmioille tunnetusta tuloksesta $A_1^{(k)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2$ sekä epäyhtälöstä $A_2^{(k)} < A_2$, johdutaan ristiriitaan

$$B = A_1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2 < A_1^{(k)} + A_1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2^{(k)} = B.$$

Toinen vastaavanlainen ristiriita johdetaan oletuksesta $A_1 < (r_1/r_2)^2 A_2$. Ainoaksi mahdollisuudeksi jää siis $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Eudoksoksen tyhjennysmenetelmäpäättelyjä voidaan pitää integraalilaskennan edelläkävijänä. Tyhjennysmenetelmällä suoritetut päättelyt ovat kuitenkin yleensä erittäin monimutkaisia. Kahden suureen yhtäsuuruuden osoittaminen vaatii kaksi epäsuoraa todistusta, kummallekin mahdolliselle epäyhtälön suuruussuunnalle. – Eudoksos oli paitsi matemaatikko myös merkittävä tähtitieteilijä. Hänen hahmottelemansa maailmanjärjestys perustui 27:ään sisäkkäiseen eri tavoin pyörivään palloon, joiden yhteisvaikutuksena syntyvä taivaankappaleiden liike oli kohtuullisen hyvin sopusoinnussa havaintojen kanssa.

4.9 Eukleides ja Alkeet

Aleksanteri Suuren seuraaja Egyptissä, *Ptolemaios I*, perusti noin 300 eKr. Aleksandriaan *Museion*-nimisen instituutin, ota voidaan pitää maailman ensimmäisenä yliopistona. Museionin ensimmäinen matematiikan edustaja oli *Eukleides* (365[?]–300[?] eKr.). Eukleideen kuuluisin teos on *Stoikheia*, eli *Alkeet*, joka tunnetaan yleisesti myös latinankielisellä nimellään *Elementa*. Alkeet on luultavasti kaikkien aikojen menestyksellisin matemaattis-luonnontieteellinen teos. Se levisi lukemattomina käsikirjoituksina (joissa luonnollisesti oli virheitä ja parannuksia tai parannusyrityksiä) ja käännöksinä; vuodesta 1482 alkaen on myös painettuja versioita ainakin toista tuhatta. Kouluopetuksessa teos oli keskeisenä oppikirjana viime vuosisadalle asti useissa maissa, myös Suomessa. – Samanlaisia yleisesityksiä oli kyllä kirjoitettu jo ennen Eukleidesta. Mm. Hippokrateen tuotantoon tiedetään kuuluneen Alkeet-teoksen, joka kuitenkaan ei ole säilynyt.

Alkeet sisältää 13 "kirjassa" ja 465 propositiossa koko Eukleidesta edeltävän ajan matematiikan yleisesityksen. Suuri osa teoksen sisällöstä on peräisin Eukleideen edeltäjiltä. Paitsi alkeisgeometrian aksiomaattista käsittelyä teos sisältää mm. Eudoksoksen suhdeopin ja ekshaustiomenetelmän, koko joukon alkuaan pythagoralaista lukuteoriaa, esim. *Eukleideen algoritmin* kahden luvun suurimman yhteisen tekijän tai kahden suureen yhteisen mitan löytämiseksi. Lukujen a ja b yhteiset tekijät ovat tekijöinä jakoyhtälön $a = q_1b + r_1$ mukaisessa jakojäännöksessä r_1, jakoyhtälön $b = q_2r_1 + r_2$ jakojäännöksessä r_2 jne. Koska $b > r_1 > r_2 > \dots$, jokin jakojäännös on viimeinen positiivinen jakojäännös. Siinä ovat edelleen tekijöinä a:n ja b:n yhteiset tekijät ja vain ne. Jos a ja b ovat mielivaltaisia suureita, esim. janoja, Eukleideen algoritmi päättyy äärellisen monen askeleen jälkeen, jos ja vain jos a ja b ovat yhteismitallisia.

Klassisen kaunis todistus alkulukujen määrän rajattomuudesta saattaa olla Eukleideen oma oivallus. Mitä hyvänsä äärellistä alkulukujen kokoelmaa $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ kohden voidaan valita luku, jossa ne kaikki ovat tekijöinä, esim. lukujen tulo $p_1p_2 \cdots p_k$, ja lisätä tätä lukua yhdellä. Luku $p_1p_2 \cdots p_k + 1$ on joko itse alkuluku tai sillä on alkutekijä, joka ei voi olla mikään luvuista p_1, p_2, $\dots$ p_k.

Stoikheian kirjoista laajin on kirja X, joka sisältää muotoa $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ olevien suureiden luokittelun. Viimeiset kirjat käsittelevät avaruusgeometriaa ja huipentuvat todistukseen täsmälleen viiden säännöllisen monitahokkaan ("*Platonin kappaleen*") olemassaolosta ja näiden kappaleiden tilavuuksien laskemiseen.

Stoikheian merkitys on paitsi sisällössä myös esitystavassa. Teos alkaa joukosta *määritelmiä, aksioomia* ja *postulaatteja*, jotka oletetaan annetuiksi. Aksioomalla ymmärrettiin yleispätevää, kaikkiin oppeihin sovellettavissa olevaa totuutta ("kokonainen on osaansa suurempi"), postulaatilla puolestaan käsiteltävälle opille erityisiä perustotuuksia. Kaikki muut lauseet johdetaan suoraan tai välillisesti näistä. Yleisenä tiedonmuodostusmenetelmänä aksiomattis-deduktiivinen metodi on lähtöisin Aristoteleelta. Myöhemmin on Eukleideen päättelyistä löydetty sieltä täältä aukkoja ja virheitä, mutta itse aksiomaattis-deduktiivinen metodi on tullut matematiikan vakiintuneeksi esitystavaksi. – Eukleideen kolme ensimmäistä postulaattia koskevat mahdollisuutta piirtää suora kahden pisteen kautta, mahdollisuutta jatkaa suoraa rajatta kumpaankin suuntaan ja mahdollisuutta piirtää ympyrä, jonka keskipiste ja säde ovat annetut. Postulaatit määrittelevät nämä konstruktiot yksikäsitteisiksi. Neljäs postulaatti sanoo kaikkien suorien kulmien olevan yhteneviä.

Eukleideen viides postulaatti on ns. *paralleeliaksiooma*, jonka itsestäänselvyys ei ole läheskään niin kiistaton kuin muiden postulaattien.

> Jos suora leikkaa kaksi muuta suoraa niin, että samalla puolella suoraa olevien kahden sisäkulman summa on pienempi kuin kaksi suoraa kulmaa, niin mainitut kaksi suoraa leikkaavat toisensa sillä puolen ensimmäistä suoraa, missä kulmien summa on vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa.

Monet matemaatikot yrittivät eri aikoina johtaa paralleelipostulaatin muista aksioomista. Vasta 1800-luvulla nämä yritykset osoitettiin mahdottomiksi, samalla kun konstruoitiin ns. *epäeuklidisia geometrioita*, joissa paralleelipostulaatin korvaa jokin muu suorien yhdensuuntaisuutta koskeva oletus.

4.10 Arkhimedes

Antiikin lahjakkaimpana matemaatikkona ja luonnontieteilijänä pidetään *Arkhimedesta* (287[?]–212 eKr.). Hän toimi Syrakusassa, mutta oli ilmeisesti saanut koulutuksensa Aleksandriassa. Useimmat Arkhimedeen teknistä taitavuutta koskevat kertomukset liittyvät Syrakusan piiritykseen ja valloitukseen Rooman ja Karthagon välisessä toisessa puunilaissodassa. Vaikka Arkhimedeen kuuluisuus liittyy ennen muuta hänen fysikaalis-teknisiin keksintöihinsä, tarina Arkhimedeen kuolemasta kertoo hänen askarrelleen matematiikan parissa silloinkin, kun roomalainen sotilas hänet surmasi. Arkhimedeen väitetyt viimeiset sanat "älä sotke ympyröitäni", "*noli turbare circulos meos*" ovat jääneet lentäväksi lauseeksi. Arkhimedes oli ensimmäinen rationaalisia fysikaalisia periaatteita kehitellyt ajattelija: hänen keksintöään ovat vipulaki ("antakaa minulle kiinteä piste, niin vipuan maan paikoiltaan") ja hydrostatiikan Arkhimedeen periaate (kappaleeseen kohdistuva noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän nestemäärän paino). Tunnettu Arkhimedes-legenda kertoo Arkhimedeen *heureka*-huudahduksesta hänen oivallettuaan nostelain.

Arkhimedeen monipuolisen matemaattisen tuotannon painopiste on aiheissa, jotka nykyisin katsotaan integraalilaskennaksi: hän todisti täsmällisesti, ekshaustiomenetelmää käyttäen, että ympyrän ala on puolet säteen ja kehän tulosta, laski paraabelin segmentin ja ellipsin alan, pallon alan ja tilavuuden, pyörähdyskappaleiden tilavuuksia, erilaisten kuvioiden ja kappaleiden painopisteitä, ympyrän kehän pituuden likiarvoja kuten säännöllisen 96-kulmion ominaisuuksista johdettavan

$$3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} < \pi < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}},$$

jonka Arkhimedes yksinkertaisti muotoon $3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$.

Arkhimedeen säilyneissä kirjoituksissa esiintyvät todistukset perustuvat vaikean ekshaustiomenetelmän käyttöön. Vuonna 1906 löydettiin kuitenkin Arkhimedeen aleksandrialaiselle *Eratostheneelle* (n. 276 – n. 196 eKr.; tunnettu mm. alkuluvut tuottavasta *Eratostheneen seulasta* ja maapallon mittasuhteiden rationaalisesta määrittämisestä) kirjoittama kirje, joka tunnetaan nimellä *Metodi*. Siinä esitetään oikotie: alue, jonka pinta-ala halutaan laskea, jaetaan janoiksi, joita verrataan pinta-alaltaan tunnetun alueen janoihin asettamalla kyseiset osat ikään kuin erivartisen vaa'an kuppeihin. Tällä integraalilaskentaa muistuttavalla menetelmällä Arkhimedes pystyi nopeasti laskemaan esim. paraabelinkaaren rajoittamien alueiden aloja, mutta koska menetelmä oli loogisesti epätyydyttävä (äärettömän monen äärettömän pienen suureen summat!), hän varmensi tulokset ekshaustiomenetelmään perustuvin todistuksin.

Arkhimedeen punnitusideaa voi tarkastella esim. seuraavassa hiukan nykyaikaistetussa esimerkissä: halutaan laskea

$$\int_{-1}^{0} x^2\,dx$$

eli paraabelin $y = x^2$, suoran $x = -1$ ja x-akselin rajoittama pinta-ala. Leikataan tämä ala infinitesimaalisiksi x^2-korkuisiksi suikaleiksi, jotka vuorollaan sijoitetaan pisteeseen -1. Jos vaa'an tasapainopiste on origo, tällainen suikale tasapainottaa etäisyydellä x origosta olevan x-korkuisen infinitesimaalisen suikaleen. Koko kysytty pinta-ala A tulee siten tasapainottamaan kolmion, jota rajoittavat suorat $y = x$, $x = 1$ ja $y = 0$. Kolmion ala on $\frac{1}{2}$, ja sen painopisteen x-koordinaatti on $\frac{2}{3}$. Tasapainoyhtälöksi painopisteiden suhteen saadaan $A \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, josta $A = \frac{1}{3}$.

Paraabelin alan laskemista ekshaustiomenetelmällä voi edustaa seuraava nykymerkinnöin esitetty Arkhimedeen päättely. Lasketaan suorien $y = 1$ ja $x = 0$ paraabelista $y = x^2$ erottama ala S. Se voidaan tyhjentää kolmioilla Δ_1, jonka kärjet ovat (0, 0), (1, 1) ja (0, 1), Δ_2, jonka kärjet ovat (0, 0), (1/2, 1/4) ja (1, 1), Δ_{31} ja Δ_{32}, joiden kärjet ovat (0, 0), (1/4, 1/16) ja (1/2, 1/4) sekä (1/2, 1/4), (3/4, 9/16) ja (1, 1) jne. Kolmion Δ_1 ala on $\frac{1}{2}$. Suora $x = \frac{1}{2}$ jakaa kolmion Δ_2 kahdeksi kolmioksi, joilla on yhteinen kanta, jonka pituus on $\frac{1}{4}$ ja yhteinen korkeus $\frac{1}{2}$. Kummankin kolmion ala on näin ollen $\frac{1}{16}$, joten kolmion Δ_2 ala on $\frac{1}{8}$. Samoin nähdään, että kolmioiden Δ_{31} ja Δ_{32} yhteinen ala on $\frac{1}{32}$. n:n vaiheen jälkeen kolmioiden ala on $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right)$. Joka vaiheessa uudet kolmiot peittävät yli puolet edellisten kolmioiden ja paraabelin väliin jäävästä alueesta. Oletukset $S < \frac{2}{3}$ ja $S > \frac{2}{3}$ johtavat ristiriitaan. (Arkhimedeella oli käytössään jo Eukleideen tuntema kaava päättyvän geometrisen sarjan summalle.) Siis $S = \frac{2}{3}$.

Arkhimedeen spiraali on transsendenttikäyrä, jonka muodostaa tasaisella nopeudella pyörivällä säteellä tasaisella nopeudella liikkuva piste. Arkhimedeen spiraalin napakoordinaattimuotoinen yhtälö on $r = a\phi$. Arkhimedes määritti sekä spiraalin tangentin pituuden että spiraalin ja radiusvektoreiden rajoittaman alueen pinta-alan.

Arkhimedeelle itselleen oli erityisen läheinen pallon tilavuuden johto; hän toivoi hautakiveensä kuvion, joka esittää palloa, kartiota ja lieriötä. Jos r-säteinen pallo sijoitetaan r-säteisen ja $2r$-korkeuksisen lieriön sisään ja samaan kuvioon liitetään kartio, jonka huippu on pallon keskipisteessä ja jonka pohja yhtyy lieriön pohjaan, niin etäisyydellä x pallon keskipisteestä tehty lieriön ja kartion akselia vastaan kohtisuora tasoleikkaus erottaa lieriöstä r-säteisen ympyrän, pallosta $\sqrt{r^2 - x^2}$-säteisen ympyrän ja kartiosta x-säteisen ympyrän. Koska ympyrän ala on verrannollinen ympyrän säteeseen, pallon ja kartion ympyräleikkausten yhteinen ala on $\pi x^2 + \pi(r^2 - x^2) = \pi r^2$. Koska pallon ja kartion leikkaukset näin tasapainottavat lieriön leikkaukset, on puolipallon ja kartion yhteinen tilavuus sama kuin lieriön(puolikkaan). Tästä seuraa, että pallon tilavuus on $\frac{2}{3}$ lieriön tilavuudesta (joka on pohjaympyrän ala kerrottuna korkeudella). Pallon tilavuuden määritys palautuu täten ympyrän neliöintiongelmaan.

Eräs Arkhimedeen saavutuksia oli erittäin suurten lukujen merkitsemiseen soveltuva lukujen merkintätapa (jota Arkhimedes demonstroi mielikuvituksellisella laskutehtävällä: laskemalla maailmankaikkeuden täyttämiseksi tarvittavien hiekanjyvästen määrän – Arkhimedeen mukaan 10^{63}). Tässä yhteydessä Arkhimedes johtui lähelle logaritmilaskennan perusperiaatetta, lukujen kertolaskua vastaa eksponenttien yhteenlasku. Arkhimedes totesi, että luvut 1:stä 10^8:aan eli myriadi myriadiin asti ovat nimettävissä, Ne muodostavat ensimmäisen *luokan*, luvut 10^8:sta 10^{16}:een muodostavat toisen luokan jne., kunnes $P = 10^{8\cdot 10^8}$ päättää ensimmäisen *jakson*. Toisen jakson suurin luku on P^2; menetelmää jatketaan, kunnes tullaan P:nteen jaksoon, jonka suurin luku on P^{10^8}. Arkhimedeen järjestelmä mahdollistaisi kaikkien kymmenjärjestelmässä enintään 80000 biljoonalla numerolla kirjoitettavien lukujen nimeämisen. – Arkhimedeen nimissä on myös ns. *karjaongelma*, hiukan epäselvästi muotoiltu kokonaislukuyhtälöryhmä, joka tavallisen tulkinnan mukaan redusoituu yhtälöön $x^2 - 4729494y^2 = 1$. Yhtälön ratkaisut ovat niin suuria lukuja, että niiden kirjoittamiseen tarvittaisiin satojatuhansia numeroita.

4.11 Apollonios ja kartioleikkaukset

Menaikhmoksen aloittaman kartioleikkauskäyrien teorian tutkimuksen vei pisimmälle pergalainen, Aleksandriassa opiskellut *Apollonios* (260[?]–170 eKr.), jonka kahdeksanosainen kartioleikkausten teorian yleisesitys *Conica* sisältää aiheesta olennaisesti samat tiedot kuin vakiintunut analyyttisen geometrian oppimäärä nykyisin: kartioleikkausten halkaisijat, tangentit, normaalit, leikkaaminen, asymptootit. Esitys on kuitenkin puhtaasti synteettisen geometrian mukainen, koordinaatteja tai muita laskennallisia apuneuvoja Apollonios ei sallinut tai tuntenut. Tutut nimitykset *ellipsi, paraabeli* ja *hyperbeli* ovat peräisin Apolloniokselta; ne voidaan nykyaikaisia merkintöjä käyttäen ymmärtää vertaamalla paraabelin ("asettaa rinnalle") yhtälöä

$$y^2 = px$$

ellipsin ("jää vajaaksi") ja hyperbelin ("ylittyy") yhtälöihin

$$y^2 = px \pm \frac{p}{d}x^2.$$

Alkuaan kartioleikkaukset ajateltiin aina syntyviksi suorista ympyräkartioista sivuviivoja vastaan kohtisuorilla tasoilla tehdyissä leikkauksissa. Ellipsi, paraabeli ja hyperbeli olivat siten terävä-, suora- ja tylppäkulmaisen kartion leikkauksia. Apollonios käytti yleistä kartiota ja leikkaustasoa.

Olkoon A ympyräpohjaisen kartion kärki ja BC pohjaympyrän halkaisija. Leikataan kartio tasolla τ, joka ei ole pohjatason suuntainen ja joka leikkaa suoran BC pisteessä T, joka ei ole janalla BC, sekä suorat AB ja AC pisteissä Q ja R. Olkoon P mielivaltainen tason τ ja kartiopinnan leikkauskäyrän piste ja leikatkoon P:n kautta piirretty QR:ää vastaan kohtisuora suora QR:n pisteessä H ja kartiopinnan vielä pisteessä P'. Asetetaan nyt suoran PP' kautta pohjaympyrän suntainen taso, joka leikkaa kartiopinnan pitkin ympyrää ja suorat AB ja AC pisteissä D ja E. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan heti

$$\frac{HD}{HQ} = \frac{BT}{TQ}, \quad \frac{HE}{HR} = \frac{CT}{RT}.$$

Käyttämällä hyväksi tietoa pisteen H potenssista ympyrän $DPEP'$ suhteen saadaan

$$PH^2 = HD \cdot HE = \frac{BT \cdot HQ}{TQ} \cdot \frac{CT \cdot HR}{RT} = k \cdot HQ \cdot HR.$$

Jos Sijoitettaisiin origo pisteeseen Q ja x-akseli suoralle QR ja merkittäisiin $QR = a$, $HQ = x$, $HP = y$, nähtäisiin, että Apollonioksen johtama relaatio olisi $y^2 = kx(a-x)$ eli $k\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{ka^2}{4}$. Aivan sama päättely antaa kartion ja AC:n suuntaisen suoran leikkauskuvion pisteille paraabelin yhtälön ja AD:n mutta ei puolisuoraa AC leikkaavan tason ja kartion leikkauskäyrälle hyperbelin yhtälön. Jos kartio otetaan kaksivaippaisena, saadaan leikkauskuviosta hyperbelin molemmat haarat. – Hiukan yllättävää on, että Apollonios ei lainkaan viittaa kartioleikkausten yksinkertaiseen määrittelyyn johtosuoran ja polttopisteen avulla.

Kartioleikkausten teorian kehittyminen lähes 2000 vuotta ennen kuin niiden fysikaalinen merkitys tuli ilmi Keplerin planeettateorian ja Newtonin mekaniikan myötä on yksi vastaesimerkki teoreettisen, "puhtaan" matematiikan hyödyllisyyttä epäileville.

4.12 Diofantos

Kreikkalaisen antiikin merkittävin aritmeettis-algebrallisen perinteen edustaja oli aleksandrialainen *Diofantos* (250 jKr.?). Hänen pääteoksensa *Arithmetika* sisältää suuren ja monipuolisen joukon yhden tai useamman tuntemattoman ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöiksi tunnistettavia probleemoja, joihin etsitään *kokonaislukuratkaisuja*; näitä yhtälöitä kutsutaan nykyäänkin *Diofantoksen yhtälöiksi.*

Diofantoksen ratkaisut perustuvat yleensä kekseliäisiin oivalluksiin eivätkä ne muodosta yhtenäistä teoriaa. Diofantos on ensimmäinen kirjoittaja, jonka teksteissä esiintyy algebrallisen symbolismin alkeita. Diofantoksen symboliikka soveltui polynomilausekkeiden kirjoittamiseen. Hän käytti tuntemattomalle lyhennysmerkintää, jonka tarkka muoto on kopioinneissa hämärtynyt, mutta jonka on arveltu syntyneen sanan $\alpha\rho\iota\theta\mu o\sigma$ ensimmäisistä kirjaimista $\alpha\rho$. Merkintä muistuttaa kirjainta ζ. Tuntemattoman toista potenssia Diofantos merkitsi Δ^{Υ} ja sen kolmatta potenssia K^{Υ}. Neljäs, viides ja kuudes potenssi olivat $\Delta^{\Upsilon}\Delta$, $\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$ ja $\mathrm{K}^{\Upsilon}K$. Vakiotermin merkki oli $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$. Symbolia seurasi tuntemattoman kertoimen numeroarvo (joonialaisin numeroin), ja yhteenlasku osoitettiin kirjoittamalla termit perätysten. Matemaattisista operaattoreista vain vähennyslaskun operaattorille oli Diofantoksen järjestelmässä oma merkkinsä. Se oli $\pitchfork$, joka edelsi vähennettäviä termejä. Merkintä $K^{\Upsilon}\beta\zeta\epsilon\pitchfork\Delta^{\Upsilon}\gamma\overset{\circ}{\mathrm{M}}\mu\delta$ tarkoittaisi polynomia $2x^3 + 5x - 3x^2 - 44$.

Suurin osa Diofantoksen Arithmetikan ongelmista koskee yhden tai useamman tuntemattoman polynomiyhtälöitä, kuten $y^2 = Ax^2 + Bx + C$ tai $y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Yhtälöt ovat joko determinoituja tai ei. Kertoimet on yleensä valittu niin, että sopivien sijoitusten jälkeen jäljelle jää lineaarinen yhtälö. Esimerkiksi yhtälö $y^2 = Ax^2 + Bx + C$ voidaan ratkaista, jos $A = a^2$ tai $C = c^2$. Edellisessä tapauksessa sijoitus $y = ax + m$ johtaa yhtälöön $2amx + m^2 = Bx + C$, jälkimmäisessä tapauksessa sijoitus $y = mx + c$ yhtälöön $m^2x^2 + 2mx = Ax^2 + Bx$ eli $(m^2 - A)x = B - 2m$. Pythagoraan lukuihin johtavan tehtävän $x^2 + y^2 = a^2$

Diofantos ratkaisi sijoituksella $y = mx - a$. Diofantos hyväksyi vain rationaaliset juuret ja aina vain yhden juuren.

Tarinan mukaan Diofantoksen iän voi laskea seuraavien tietojen perusteella:

> Diofantos eli $\frac{1}{6}$:n elämästään lapsena, $\frac{1}{12}$:n nuorukaisena ja sitten vielä $\frac{1}{7}$:n poikamiehenä. Viisi vuotta sen jälkeen, kun Diofantos oli nemmyt naimisiin, hän sai pojan, joka kuoli neljä vuotta isäänsä ennen ja saavutti puolet isänsä ikävuosista.

4.13 Antiikin trigonometria

Nykyisin *trigonometriaksi* kutsuttavan opin ensi vaiheet sattuvat hellenistiselle kaudelle. Tähtitieteilijät *Hipparkhos* (180[?]–125 eKr.) ja *Klaudios Ptolemaios* (85[?]–165 jKr.), nerokkaan joskin virheellisen maakeskisen maailmanjärjestyksen esittäjä, laativat taulukoita eri keskuskulmia vastaavien jänteiden pituuksista, siis trigonometrian taulukoiden edeltäjiä. Ptolemaioksen *Syntaxis Mathematica*- ja *Almagest*-nimillä tunnettuun pääteokseen sisältyy trigonometristen taulukoiden laatimisperusteiden kuvaus. Ptolemaios laski taulukkoarvot "helppojen" kulmien perusteella käyttäen apuna lauseita, joka mahdollistivat puolta kulmaa ja kahden kulman summaa vastaavien jänteiden laskemisen. Tällainen on *Ptolemaioksen lause*, jonka mukaan jännenelikulmion $ABCD$ janoille pätee $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Lause on helppo todistaa valitsemalla AC:n piste E, jolle $\angle ABE = \angle DBC$; silloin kolmiot ABE ja DBC sekä ABD ja ECB ovat keskenään yhdenmuotoisia. Yhdenmuotoisuuksista seuraa $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$ ja $\frac{CE}{BC} = \frac{AD}{BD}$ ja edelleen $AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot (AE + EC) = BD \cdot AC$. Tarkastelemalla jännenelikulmioita, joiden yksi sivu on ympyrän halkaisija, saadaan helposti lausekkeet kahden kulman summaa ja erotusta vastaavan jänteen pituudelle samoin kuin puolta kulmaa vastaavan jänteen pituudelle. $60°$:een ja $36°$:een kulmia vastaavat jänteet voidaan laskea geometrisesti, ja erotusten sekä puolitusten kautta saadaan $24°$:een, $12°$:een, $6°$:een, $3°$:een, $90'$:n ja $45'$:n kulmia vastaavat jänteet. Yksinkertainen approksimointi, joka perustuu siihen, että pieniä kulmia vastaavat jänteet suhtautuvat suunnilleen kuten kulmat, johtaa sitten $1°$:een kulman jänteeseen ja puolitus $30'$:n kulman jänteeseen. Kulmien yhteenlaskukaavan avulla saadaan kaikki muut jänteen puolen asteen välein.

Tähtitieteen tarpeita palveli myös *pallotrigonometria*, jonka systemaattisen esityksen kirjoitti *Menelaos* (noin 100 jKr.). Kreikkalaisten trigonometria ei tuntenut meidän "trigonometrisia funktioitamme"; kolmioiden ja pallokolmioiden ratkaisut esitettiin puhtaasti geometrian keinoin. Menelaoksen aikalainen *Heron* (noin 75 jKr.) kirjoitti kuvioiden pinta-aloista ja tilavuuksista. Kolmion alan S sivujen ja piirin puolikkaan p avulla ilmaisevan *Heronin kaavan*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

sisältö lienee ollut tuttu jo Arkhimedeelle.