20 Matematiikan filosofiasta

Viime vuosisadan lopulla ja kuluvan vuosisadan alkupuolella matematiikan olemuksesta esitetyt filosofiset käsitykset voidaan karkeasti jakaa kolmeksi suuntaukseksi, jotka ovat *logistinen, intuitionistinen* ja *formalistinen.*

Logistisen koulukunnan pääteesin voi kiteyttää ajatukseen, jonka mukaan matematiikka on yksi logiikan haara. Koulukunnan edelläkävijöitä ovat Dedekind, Frege ja Peano, mutta sen varsinainen huippukohta on Whiteheadin ja Russellin 1910–13 ilmestynyt suurteos Principia Mathematica; lisäyksiä ja parannuksia ovat esittäneet monet myöhemmät kirjoittajat. Principian tavoitteena on johtaa luonnollisten lukujen järjestelmä (ja siten välillisesti kaikki luonnollisiin lukuihin pohjautuva matematiikka) aukottomasti loogisista primitiiviideoista ja primitiivilauseista, jotka puolestaan käsitetään reaalimaailman mielekkäiksi kuvauksiksi. Primitiiveistä johdetaan lausekalkyyli sekä luokkien ja relaatioiden teoria. Joukko-opin paradoksit torjutaan tyyppiteorian avulla. Täyttä yksimielisyyttä siitä, onko logistinen ohjelma saavuttanut tavoitteensa, ei ole.

Intuitionismin juuret ovat mm. Kroneckerin käsityksissä; myös Poincaré näki asiat mieluiten intuitionistisessa valossa. Intuitionistien matematiikan lähtökohta on luonnollisten lukujen järjestelmä, josta ihmisellä katsotaan olevan valmis, intuitioon perustuva käsitys. Matemaattiset tulokset on voitava johtaa äärellisin, konstruktiivisin menetelmin. Useimmin esiintyviä fraaseja matemaattisessa kirjallisuudessa on "on olemassa x, joka . . . ". Olion olemassaolon todistamiseksi ei intuitionistien käsityksen mukaan riitä se, että olion ei-olemassaolo johtaa ristiriitaan, vaan olio on voitava rakentaa äärellisin operaatioin olemassa oleviksi tiedetyistä olioista, viime kädessä luonnollisista luvuista. Induktio esimerkiksi ei ole riittävä olemassaoloperustelu. Vaikeuksia syntyy äärettömien kokoelmien suhteen, sillä arkilogiikan kolmannen poissuljetun sääntö ei tällöin välttämättä päde. Lauseesta "ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen desimaalilukuesityksessä esiintyy ainakin kerran jakso 123456789" emme voi sanoa, että se on joko tosi tai epätosi, ainakaan ennen kuin kyseinen jakso sattuu löytymään π:n kehitelmästä. – Intuitionismin ohjelman formuloi Brouwer 1912. Sen myöhemmistä kehittäjistä on tärkein *A. Heyting*, joka 1930 kehitti intuitionistisen matematiikan mukaisen symbolisen logiikan järjestelmän.

Formalistisen koulukunnan perusti Hilbert. Aksiomatisoidessaan euklidisen geometrian 1899 hän oli luonut esikuvan muille matematiikan aksiomaattisille järjestelmille, joiden toimivuus ei riipu käytettyjen käsitteiden konkreettisesta tulkinnasta. Joukko-opin paradoksit ja intuitionistisen ohjelman implikoima matematiikan toimipiirin radikaalin kaventumisen uhka saivat Hilbertin 1920-luvulla esittämään käsityksen matematiikasta puhtaasti formaalisena järjestelmänä, jolla sinänsä ei ole "sisältöä". Olennaista on järjestelmän *ristiriidattomuus*, ts. järjestelmään ei saa sisältyä muotoa "P ja ei-P" olevaa lausetta tai kaavaa. Hilbert yritti löytää todistuksen matematiikan tai ainakin mahdollisimman suuren matematiikan osan ristiriidattomuudelle. Joissakin tarkoin rajatuissa puitteissa kuten ns. ensi kertaluvun predikaattikalkyylissa tämä onnistuikin, mutta 1931 tšekkiläissyntyinen *Kurt Gödel* (1906–78) todisti, että kaikissa tarpeeksi rikkaissa matemaattisissa systeemeissä, kuten esim. Peanon aksioomiin perustuvassa luonnollisten lukujen järjestelmässä, on aina lauseita, joita ei voi todistaa järjestelmään itseensä kuuluvin metodein. Yksi tällainen väite on juuri systeemin ristiriidattomuus. Gödelin todistus perustui aritmeettisten käsitteiden, operaatioiden ja väittämien numerointiin, joka teki mahdolliseksi tulkita lukuja koskevia lauseita koskevat väittämät, kuten ”tämä lause on todistettavissa”, lukuteorian aineksiksi.