7 Differentiaali- ja integraalilaskennan esivaiheet

1600-lukua voidaan pitää eräänä matematiikan historian suurista käännekohdista. Tuolloin syntyivät nykymatematiikan keskeiset metodit, *differentiaali- ja integraalilaskenta*, jota myös kutsutaan *infinitesimaalilaskennaksi*, ja *analyyttinen geometria*. Edellisen synty liitetään yleensä Newtoniin ja Leibniziin, jälkimmäisen Descartesiin.

Suuret keksinnöt eivät kuitenkaan syntyneet yhtäkkiä. Noin sadan vuoden ajalta ennen Newtonin ja Leibnizin aikaa löytyy päättelyitä, joissa on nähtävissä matemaattiselle analyysille tunnusomaisia piirteitä. Infinitesimaalilaskentaa enmnkoinut Arkhimedeen *Metodi* oli tuolloin tuntematon, mutta ajan yleisenä henkenä oli antiikin työlään ekshaustiomenetelmän korvaaminen nopeammin tuloksiin johtavilla, joskin loogisesti vähemmän pitävillä metodeilla.

7.1 Stevin, Kepler ja Galilei

Ensimmäisiä infinitesimaalisten päättelyjen esittäjiä oli Stevin, joka v. 1586 ilmestyneessä teoksessaan *De Beghinselen der Weeghconst* perusteli käsitystään kolmion muotoisen kappaleen painopisteen sijainnista mediaanilla ajattelemalla kolmion sisään piirrettyjä pieniä suunnikkaita, joiden pitemmät sivuparit olivat kolmion sivujen suuntaisia. Kunkin tällaisen painopiste oli suunnikkaan keskikohdassa, joten kolmiokin tuli tasapainottumaan pitkin kutakin mediaaniaan.

Infinitesimaalisia pinta-alan- ja tilavuudenmääritysmenetelmiä käytti huomattavalla menestyksellä tähtitieteen suurmies *Johannes Kepler* (1571–1630). Ympyrän ja ellipsin alat Kepler laski täyttämällä kuviot pienillä kolmioilla, joiden kantojen annettiin kutistua äärettömän pieniksi.

Keplerin planeettaliikettä koskeva toinen laki – auringosta planeettaan piirretty vektori piirtää samassa ajassa aina saman pinta-alan, perustui kuitenkin virheelliseen infinitesimaalipäättelyyn. Kepler oletti havaintojen perusteella, että planeetan nopeus kunakin hetkenä on kääntäen verrannollinen sen auringosta A laskettuun etäisyyteen r. Jos radan pisteiden P ja Q välinen kaari jaetaan osakaariin Δs, niin planeetan välillä PQ käyttämä aika on likimain

$$t = \sum \Delta t_i = \sum \frac{\Delta s}{v_i} = \frac{1}{k} \sum r_i \Delta s.$$

Toisaalta Kepler otaksui kolmion, ota rajoittavat janat AP ja AQ sekä kaari PQ koostuvan pienistä kolmioista, joiden alat ovat

$$\frac{1}{2} r_i \Delta s,$$

ja joiden alojen summa on siis vakio $\times t$. Sattumoisin planeetan nopeutta koskeva virheellinen oletus ja "integroinnissa" tapahtunut virhe kumoavat toisensa!

Hyvä viinivuosi 1612 inspiroi Keplerin käyttämään samoja menetelmiä useiden pyörähdyskappaleen muotoisten viinitynnyrien tilavuuksien laskemiseksi. Tulokset ja avoimiksi jääneet kysymykset julkaistiin 1615 teoksena *Nova stereometria doliorum vinariorum*. – Esimerkkinä Keplerin integrointitavoista on toruksen tilavuuden laskeminen. Olkoon toruksen sisäympyrän säde b ja leikkausympyrän a. jos torus viipaloidaan paloiksi "putkea" vastaan kohtisuorilla tasoilla, niin yhden tällaisen palan tilavuus on likimain

$$\frac{1}{2} \pi a^2 (t_1 + t_2),$$

missä t_1 ja t_2 ovat viipaleen sisä- ja ulkoreunan paksuudet. Kun viipaleiden tilavuudet lasketaan yhteen, summautuvat t_1-luvut toruksen sisäympyrän kehäksi $2\pi b$ ja t_2-luvut ulkoympyrän kehäksi $2\pi(b+2a)$. Tilavuudelle saadaan (oikea) arvo $2\pi^2 a^2(b+a)$.

Galileo Galilei (1564–1642) ei ollut varsinaisesti matemaatikko, mutta hän teki varteenotettavia havaintoja "äärettömän pienistä" ja "äärettömän suurista" suureista. Galilei mm. kiinnitti huomiota "eri kertalukua" oleviin äärettömän pieniin suureisiin. – Galilei havaitsi ensimmäisenä sen äärettömän joukon perusominaisuuden, että osajoukossa voi olla "yhtä monta" alkiota kuin perusjoukossa: "On olemassa yhtä monta neliölukua kuin itse lukujakin."

7.2 Cavalierin integroinnit

Galilein oppilaista oli matemaatikkona kuuluisin *Bonaventura Cavalieri* (1598–1647), jesuiitta ja Bolognan professori. Cavalierin "integrointimenetelmät" olivat Keplerin käyttämiä täsmällisempiä ja johtivat tulokseen useammin. Kepler laski yhteen mittalukuja, jotka liittyvät pieniin, mutta samaa ulotteisuutta kuin tutkittava kuvio oleviin osiin. Cavalierin perusajatus oli muodostaa vastaavuus kahden kuvion tai kappaleen infinitesimaalisten osien välillä; jos toiseen kuvioon liittyvä mittaluku oli tunnettu, toisen mittaluku saatiin selville. *Cavalierin periaate* sanoo, että jos kahden kappaleen kaikki tasoleikkaukset ovat yhtä suuret, kappaleilla on sama tilavuus. Periaatteen nojalla esim. r-säteinen ympyrä pohjana piirretyn h-korkuisen kartion tilavuus voidaan laskea vertaamalla kappaletta samankorkuiseen yksikköneliöpohjaiseen pyramidiin, jonka tilavuus on $\frac{1}{3}h$. Etäisyydellä x kappaleiden kärjistä oleva pohjien suuntainen taso leikkaa kartiosta ympyrän, jonka ala on $\frac{x^2}{h^2}\pi r^2$ ja pyramidista neliön, jonka ala on $\frac{x^2}{h^2}$. Tästä seuraa, että kartion tilavuus on $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Cavalierin pääteos *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) vaikutti suuresti infinitesimaalilaskennan kehitykseen. Teos sisältää tuloksen, joka on yhtäpitävä kaavan

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \tag{1}$$

kanssa. Kaavan (1) Cavalieri totesi oikeaksi arvoilla $n = 1, \ldots, 9$ vertaamalla suunnikkaan sivun suuntaisten janojen potenssien ja lävistäjän suunnikkaasta erottamien kolmioiden kannan suuntaisten janojen potenssien summia.

Cavalierin päättely tapauksessa $n = 2$ on suunnilleen seuraava, modernisoiduin merkinnöin. Tarkastellaan tason ensimmäisessä neljänneksessä olevaa yksikköneliötä, jonka yksi kärki on origossa ja jonka lävistäjä on suora $y = x$. Jos lasketaan y-akselin suuntaisten janojen neliöiden summa, saadaan (symmetriaa hyväksi käyttäen)

$$1 = \sum (x + (1-x))^2 = 2\sum x^2 + 2\sum x(1-x).$$

Merkitään

$$x = \frac{1}{2} - z, \quad 1 - x = \frac{1}{2} + z,$$

jolloin

$$1 = 2\sum x^2 + \frac{1}{2} - 2\sum z^2.$$

Mutta kun x-janat peittävät neliön puolikkaan kokoisen suorakulmaisen kolmion, peittävät z-pituiset janat kaksi neliön kahdeksannen osan suuruista suorakulmaista kolmiota; yhden tällaisen kolmion yli summattuna on oltava

$$\sum z^2 = \frac{1}{8} \sum x^2,$$

koska kyseessä ovat suhteessa 1 : 2 yhdenmuotoisten pyramidien tilavuudet. Näin ollen

$$\frac{1}{2} = 2 \sum x^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} \sum x^2,$$

josta

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}$$

eli

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

Tapauksessa $n = 3$ päättely on jo mutkikkaampi (merkitään $y = 1 - x$):

$$\begin{aligned} 1 &= \sum 1^3 = \sum (x+y)^3 \\ &= \sum x^3 + 3 \sum x^2 y + 3 \sum x y^2 + \sum y^3 = 2 \sum x^3 + 6 \sum x^2 y, \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus perustuu x:n ja y:n symmetriaan. Mutta aikaisempien tulosten ja symmetrian nojalla on edelleen

$$1 = 2 \sum x^2 + 2 \sum xy = \frac{2}{3} + 2 \sum (x+y)xy = \frac{2}{3} + 4 \sum x^2 y,$$

joten

$$\sum x^2 y = \frac{1}{12}.$$

Saadaan lopulta

$$\sum x^3 = \frac{1}{2} \left(1 - 6 \cdot \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{4}$$

eli

$$\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}.$$

7.3 Analyyttinen geometria

René Descartes eli latinalaistetulla nimellä *Cartesius* (1596–1650) oli nuorempana seikkailija ja myöhemmin kuuluisa filosofi. Matematiikalle hän omistautui vain ajoittain. Hänen matemaattinen pääteoksensa *La Géométrie* ilmestyi sekin suuren filosofisen teoksen *Discours de la Méthode* (1637) liitteenä. Vaikka analyyttistä geometriaa pidetäänkin Descartesin keksintönä kuten termit *karteesinen koordinaatisto* ja *karteesinen tulo* osoittavat, ei La Géométrie juuri muistuta nykyistä analyyttistä geometriaa koordinaatistoineen, käyrän yhtälöineen ja funktion kuvaajineen. Descartesin päätavoite oli algebran ja geometrian riippuvuuden osoittaminen ja algebran hyödyksi käyttäminen geometrian tutkimisessa. Descartesin metodi geometriassa oli antaa jokaiselle tehtävän osalle, tunnetulle tai tuntemattomalle, symboli, johtaa symbolien välille riittävä määrä algebrallisia yhtälöitä ja ratkaista tuntematon. Algebrallinen symbolismi oli Descartesin teoksessa ensi kertaa lähes sama kuin nykyisin käytössä oleva, ainoina poikkeuksina se, että Descartes kirjoitti aa symbolin a^2 sijasta, $\sqrt{C\,a}$ merkinnän $\sqrt[3]{a}$ sijasta ja että yhtäsuuruusmerkki ($\propto$ takaperin) oli erilainen kuin nykyisin. Merkintöjä a^3, a^4 jne. hän kyllä käytti. Aakkosten alkupään kirjaimien varaaminen tunnetuille ja loppupään tuntemattomille suureille on myös Descartesin innovaatio.

La Géométrie sisältää myös *Descartesin merkkisäännön*: polynomiyhtälön positiivisten ja negatiivisten (eli Descartesin terminologiassa "väärien") juurten määrä voidaan päätellä polynomin peräkkäisten kertoimien eri- ja samanmerkkisyydestä: positiivisia juuria on (enintään) yhtä paljon kuin kertoimien jonossa on merkinvaihdoksia ja negatiivisia juuria on enintään yhtä paljon kuin kertoimien jonossa on peräkkäisten samanmerkkisten kertoimien pareja.

Ruotsin kuningatar Kristiina kutsui Descartesin 1649 Tukholmaan filosofianopettajakseen. Poikkeuksellisen kylmä talvi 1650 ja kello viideltä aamulla pidetyt oppitunnit olivat Descartesille liikaa; hän sairastui ja kuoli.

Analyyttisen geometrian peruskäsitteet keksi itsenäisesti *Pierre de Fermat* (1601–65), vapaa-aikoinaan matematiikkaa tutkinut toulouselainen juristi. Selvemmin kuin Descartes Fermat oivalsi, että kahden muuttujan yhtälö määrittelee uran eli tasokäyrän. "Aina, kun lopullisessa yhtälössä esiintyy kaksi tuntematonta, kyseessä on ura. Toisen [tuntemattoman janan] päätepiste piirtää suoran tai käyrän viivan." Hän myös tunnisti kaikki kahden muuttujan toisen asteen polynomit kartioleikkausten yhtälöiksi. Fermat'n analyyttinen geometria, kirjattuna teokseen *Ad locus planos et solidos isagoge*, tuli julki vasta 1679, Fermat'n kuoleman jälkeen, kuten suurin osa hänen muustakin tuotannostaan.

7.4 Fermat

Fermat kuuluu matematiikan historian suuriin nimiin. Tämä perustuu paitsi hänen geometrian ja analyysin alalla saavuttamiinsa tuloksiin myös monipuolisiin lukuteorian tuloksiin. Fermat kehitti todistusmenetelmän, jota hän nimitti "äärettömäksi laskeutumiseksi" (eräänlainen takaperoinen induktio), ja todisti sen avulla mm., että ei ole olemassa yhtälön $x^4 + y^4 = z^4$ toteuttavia positiivisia kokonaislukuja x, y, z. Fermat ilmoitti (Diofantoksen *Arithmetican* käännöksen marginaaliin tekemässään lisäyksessä) osaavansa todistaa saman tuloksen silloinkin, kun eksponenttina on mielivaltainen kokonaisluku $n \geq 3$. Tämä *Fermat'n suuren lauseen* tai *viimeisen teoreeman* nimellä tunnettu hypoteesi on yli 300 vuoden ajan kiehtonut sekä ammatti- että amatöörimatematiikkoja. Saksalainen amatöörmatemaatikko ja lääkäri *Paul Wolfskehl* lahjoitti vuosisadan vaihteessa huomattavan palkinnon, joka oli tarkoitus antaa tietyt kriteerit täyttävälle Fermat'n ongelman ratkaisulle. Palkinto luovutettiin kesällä 1997 englantilaiselle *Andrew Wilesille*, joka oli kaksi vuotta aikaisemmin lopullisesti ratkaissut ongelman. Vaikka palkintosäätiö menetti lähes koko omaisuutensa

Saksan 1920-luvun suurinflaatiossa, oli palkinto 75 000 Saksan markkaa.

Fermat'n ilman todistusta ilmoittamista tuloksista useimmat ovat lopulta osoittautuneet oikeiksi. Poikkeuksen tekee Fermat'n väite, jonka mukaan kaikki muotoa $2^{2^n}+1$ olevat luvut, ns. *Fermat'n luvut*, olisivat alkulukuja. Itse asiassa nämä luvut ovat muutamaa poikkeusta lukuunottamatta yhdistettyjä, ja nykyisen tietämyksen mukaan alkulukuja vain, kun $n = 0$, 1, 2, 3 tai 4. Ns. *Fermat'n pieni lause*, jonka mukaan $a^{p-1} - 1$ on jaollinen p:llä aina, kun p on alkuluku eikä a ole jaollinen p:llä, on sekin peräisin Fermat'lta, mutta lauseen todistukset ovat myöhemmältä ajalta.

Osoitetaan Fermat'n äärettömän laskeutumisen menetelmällä, että yhtälöllä

$$a^4 + b^4 = c^4$$

ei ole ratkaisua $(a,\ b,\ c)$ positiivisten kokonaislukujen joukossa. Todistetaan vahvempi väite: yhtälöllä $a^4+b^4 = c^2$ ei ole ratkaisua. Oletetaan, että ratkaisu olisi olemassa; oletetaan, että a:lla, b:llä ja c:llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Luvuista a ja b ainakin toinen on pariton; olkoon $a = 2p+1$. Jos b:kin olisi pariton, olisi a^4+b^4 ja siis c^2 muotoa $4k+2$, mutta jos c on parillinen, niin c^4 on muotoa $4k$ ja jos c on pariton, on c^2 muotoa $4k+1$, Siis b on parillinen. Koska a^2, b^2, c muodostavat Pythagoraan lukukolmikon, on olemassa p ja q, yhteistekijättömät, niin että $a^2 = p^2 - q^2$, $b^2 = 2pq$ ja $c = p^2 + q^2$. Koska a^2 on pariton, luvuista p ja q tasan yksi on pariton; koska a^2 on muotoa $4k+1$, on p:n oltava myös tätä muotoa ja siis p on pariton, q parillinen. Koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä ja $2pq = b^2$, on p:n ja $2q$:n oltava neliöitä. Olkoon $p = r^2$. Koska $p^2 = a^2 + q^2$, on Pythagoraan lukujen ominaisuuksien nojalla edelleen $p = m^2 + n^2$ ja $q = 2mn$, missä m:llä ja n:llä ei ole yhteisiä tekijöitä ja tasan toinen luvuista on pariton. Mutta $2q = 4mn$ on neliö. Siis m ja n ovat neliöitä, eli $m = x^2$, $n = y^2$. Mutta nyt $p = r^2 = x^4 + y^4$. Selvästi $r < c$, joten on olemassa pienempi neliö, joka jakaantuu kahdeksi neljänneksi potenssiksi.

7.5 Uusia integrointimenetelmiä

Pierre Fermat sekä hänen maanmiehensä *Blaise Pascal* (1623–62) ja *Giles Personne de Roberval* (1602–75) kykenivät kukin johtamaan kaavan

$$\int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}$$

sisällön olennaisesti tiedon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \tag{2}$$

perusteella. Potenssisumman

$$\sum_{k=1}^{n} k^p$$

lauseke oli tunnettu jo antiikissa tapauksissa $p = 1$ ja $p = 2$ ja islamilaisessa matematiikassa tapauksissa $p = 3$ ja $p = 4$. Pascal päätteli Pascalin kolmiota (joka, kuten aiemmin mainittiin, tunnettiin Kiinassa, mutta esiintyi länsimaillakin jo sekä Tartaglian että Cardanon tuotannossa; nimitys Pascalin kolmio tuli käyttöön 1700-luvulla) tarkastelemalla, että valitsee relaatio

$$\binom{k+1}{k}\sum_{i=1}^{n} i^k + \binom{k+1}{k-1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)^{k+1} - (n+1),$$

josta on pääteltävissä integrointien kannalta olennainen tieto

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{alempia } n\text{:n potensseja.}$$

Pascalin päättely oli olennaisesti seuraava:

$$\begin{aligned}(n+1)^{k+1} - 1^{k+1} &= \sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^{k+1} - i^{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p} i^p \\ &= \sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p}\sum_{i=1}^{n} i^p = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} i^p + n.\end{aligned}$$

Fermat selvitti potenssin integroinnin vielä omalla tavallaan: Jos halutaan laskea käyrän $y = x^n$ alle jäävän alueen ala, 0:n ja pisteen suoran $x = a$ välissä, jaetaan väli $(0,\, a)$ pisteillä Ea, E^2a, $\ldots$, missä $E < 1$. Approksimoidaan alaa suorakaiteilla, joiden kanta on $E^k a - E^{k+1}a$ ja korkeus $(E^k a)^n$. Suorakaiteiden yhteinen ala on

$$\sum_{k=0}^{\infty}(E^k a)^n(E^k a - E^{k+1}a) = \frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}.$$

Kun $E \to 1$, niin nimittäjän summa lähenee lukua $n+1$, ja kaava

$$\int_0^a x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

on valmis. Fermat'n menetelmä toimii samoin myös relaation $y^n = x$ eli $y = x^{1/n}$ ja relaation $y^m = x^n$ tapauksessa, eli kun $y = x^{n/m}$.

Englantilainen *John Wallis* (1616–1703), 53 vuotta Oxfordin yliopiston matematiikan proferssorina toiminut, oli varsinaisesti negatiivisten ja murtolukumuotoisten eksponenttien käyttöönottaja. Häneltä on mm. konventio $x^0 = 1$. Wallis esitti 1656 ilmestyneessä teoksessaan *Arithmetica Infinitorum*, että kaava (2) pätee murtolukueksponenteillekin. Hänen päättelynsä perustui Pascalin kolmion rivien interpoloimiseen. Se oli varsin spekulatiivinen ja hyväksyttävissä vain, kun n on kokonaisluvun käänteisluku. Sitovamman perustelun yleistä rationaalieksponenttia vastaavassa tapauksessa esitti Fermat. Wallisin päättely on silti mielenkiintoinen osoittaessaan, miten intuitio ohjaa matemaattista keksimistä. Newton seurasi Wallisia luodessaan teorialleen keskeisen binomisarjan.

Wallis päätteli numeerisen evidenssin perusteella, että suhde

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

lähestyy arvoa $\frac{1}{k+1}$. Tämän hän tulkitsi niin, että funktioihin x^k liittyy indeksi $I(x^k)$, joka on $= k$. Wallis havaitsi, että jos funktiot ovat geometrisessa suhteessa, kuten $1, x^2, x^4, x^6$ jne., indeksit muodostavat aritmeettisen jonon. Tästä hän rohkeast yleisti, että geometrisessa suhteessa olevien funktioiden 1, $\sqrt[q]{x}$, $\left(\sqrt[q]{x}\right)^2$, $\ldots$, $\left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}$, x indeksit muodostavat myös aritmeettisen jonon. Mutta koska $I(1) = 0$ ja $I(x) = 1$, niin on oltava $I\left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \frac{p}{q}$. Tässä on murtopotenssin käsitteen ydin (Wallis ei vielä käyttänyt murtopotenssimerkintää.). Ympyrän alan määrittämiseen Wallis tarvitsi funktion $\sqrt{1-x^2}$ integraalia. Interpolointi tunnetuista funktioiden $(1-x^2)^k$, $k \geq 0$ kokonaisluku, inytegraaleista johti Wallisin lausumaan π:n päättymättömänä tulona

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots};$$

relaatio tunnetaan *Wallisin kaavana.*

Paraabelin $y = \sqrt{x}$ kvadratuuria hyväksi käyttäen 20-vuotias (ja sittemmin unohdettu) englantilainen *William Neil* (1637–70) esitti 1657 ensimmäisen täsmällisen käyrän pituuden määrityksen. Kyseessä oli ns. *semikuubinen paraabeli*, jonka yhtälö on $y^2 = x^3$. Käyrän pituus s välillä $(0,\,0)$, $(a,\,a^{3/2})$ on likimain

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Käyrän $z = \sqrt{x}$ alle jäävä pinta-ala välillä $(0,\,x_i)$ on $A_i = \frac{2}{3}x^{3/2}$. Koska toisaalta $A_i - A_{i-1} \approx z_i(x_i - x_{i-1})$, on

$$\begin{aligned} s &\approx \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}(x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{9}{4}z_i^2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{3}{2}\sqrt{x_i + \frac{4}{9}}(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Viimeinen summa liittyy paraabelin $y = \sqrt{x + \frac{4}{9}}$ kvadratuuriin; haetuksi pituudeksi saadaan lopulta $s = \frac{(9a+4)^{3/2}-8}{27}$.

Samoin kuin Wallis tuli palvelleeksi Newtonia, Leibniz hyödynsi Pascalin havaintoa ympyränkaareen liittyvästä "*karakteristisesta kolmiosta*". Olkoon O yksikköympyrän keskipiste, A kehän piste, C A:n projektio x-akselilla, MLK pieni suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa ML sivuaa ympyrää pisteessä A ja jonka kateetit KL ja MK ovat x- ja y-akselien suuntaiset. Silloin kolmiot AOC ja LMK ovat yhdenmuotoiset. Jos $AO = r$ ja $AC = y$, $ML \approx d\phi$, $KL = dx$, niin $y\,ds = a\,dx$. Näistä havainnoista Pascal johti olennaisesti kaavaa

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sin\phi\,d\phi = \cos\alpha - \cos\beta$$

vastaavan tuloksen samoin kuin pallon alan ($2\pi y d\phi$ on pallon kiertävän infinitesimaalisen vyöhykkeen ala).

7.6 Tangenttikonstruktioita

Matemaattisen analyysin historiassa differentiaalilaskenta astuu esiin vasta integraalilaskennan jälkeen, toisin kuin aineen alkeisopetuksessa nykyisin. Ensimmäiset infinitesimaaliset tangentinmääritykset tehtiin vuoden 1630 vaiheilla, analyyttisen geometrian luojien toimesta. Fermat'n maksimiperiaate oli ensimmäisiä analyyttisiä tangentinmäärityksiä: löytääkseen funktion f maksimikohdan Fermat kirjoitti yhtälön $f(x+E) = f(x)$, jakoi yhtälön puolittain E:llä, asetti $E = 0$ ja ratkaisi x:n. Raja-arvon käsite ei ollut Fermat'lle tuttu, mutta hänen menettelynsä on ilmeistä sukua erotusosamaarän raja-arvon määritykselle.

Ensimmäinen Fermat'n käsittelemä ääriarvotehtävä oli janan AB jakaminen janoiksi AC, CB niin, että $AC \cdot CB$ on mahdollisimman suuri. Jos $AB = a$, $AC = x$ ja C' on toinen C:n lähellä oleva piste niin, että $CC' = e$, niin $AC \cdot CB \approx AC \cdot C'B$ eli $x(a-x) \approx (x+e)(a-x-e)$ eli $e(2x-a+e) \approx 0$ eli $2x-a+e \approx 0$. Kun nyt asetetaan $e = 0$, saadaan ratkaisu $x = \frac{1}{2}a$, eli todetaan, että annetun piirin omaavista suorakaiteista neliö on alaltaan suurin.

Vastaavalla tavalla Fermat ratkaisi käyrän tangentin tai oikeastaan sivuamispisteen ja x-akselin välisen tangentin osan projektion x-akselilla eli *alitangentin*. Olkoon käyrä $y = x^n$ ja P sen piste. P:n kautta piirretty tangentti leikkaa x-akselin pisteessä T; P:n projektio x-akselilla on N. Jos N' on toinen x-akselin piste, $NN' = e$ ja P' on se käyrän $y = x^n$ piste, jonka projektio P' on, ja vielä P:n kautta piirretty tangentti leikkaa suoran $P'N'$ pisteessä S ja P:n kautta piirretty x-akselin suuntainen suora pisteessä R, ja $TN = t$, $P'R = d$, niin kolmioiden PNT ja SRP yhdenmuotoisuuden perusteella $t = T = \frac{PN}{SR} \cdot PR \approx \frac{ye}{d}$. Mutta $y + d = (x+e)^n = x^n + nx^{n-1}e+$ e:n korkeampia potensseja, joten $\frac{d}{e} \approx nx^{n-1}$. Siis $t = \frac{y}{nx^{n-1}} = \frac{x}{n}$.

Fermat esitti valon liikettä koskevan variaatioperiaatteen, *Fermat'n periaatteen*, jonka mukaan valo valitsee aina sellaisen etenemistien, jota pitkin pääsee nopeimmin pisteestä toiseen. Heijastumiseen sovellettuna tämä johti helposti heijastuslakiin, jonka mukaan tulo- ja lähtökulmat ovat samat, ja väliaineesta toiseen siirtyvän valon kohdalla *Snellin lakiin*.

Descartes puolestaan konstruoi käyrälle annettuun pisteeseen normaalin vaatimalla, että yhtälöllä, jonka määrittelevät käyrä ja leikkauspisteen kautta kulkeva ympyrä, on kaksoisjuuri leikkauspisteessä. Kun lisäksi vaaditaan, että ympyrän keskipiste on annetulla suoralla, saadaan käyrän normaali leikkauspisteen kautta piirretyn ympyrän säteen suunnasta.

Descartesin menetelmällä paraabelin $y = x^2$ tangentti pisteessä $(a,\, a^2)$ löytyisi seuraavasti. Pisteen $P = (a,\, a^2)$ kautta kulkevan ja piste $(b,\, 0)$ keskipisteenä olevan ympyrän säde r toteuttaa ehdon $r^2 = (b-a)^2 + a^4$. Jos tämän ympyrän yhtälöstä $(x-b)^2 + y^2 = r^2$ ja paraabelin yhtälöstä $y = x^2$ eliminoidaan y, saadaan yhtälö $(x-b)^2 + x^4 - (b-a)^2 - a^4 = (x-a)(x+a-2b) + (x-a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3) = 0$. Jotta a olisi yhtälön kaksoisjuuri, on oltava $2a - 2b + 4a^3 = 0$ eli $b - a = 2a^3$. Pisteen P kautta kulkevan normaalin kulmakerroin on $-\frac{a^2}{b-a} = -\frac{1}{2a}$. Tästä saadaan tangentin kulmakertoimeksi $2a$, niin kuin pitääkin. – Descartes piti normaalin ja tangentin määritystä suurimpana saavutuksenaan: "Uskallan sanoa, että tämä [normaalin määritys] ei ole pelkästään hyödyllisin ja yleisluontoisin geometrian probleema niiden joukossa, jotka osaan ratkaista, vaan myös niiden joukossa, joita koskaan ole toivonut osaavani ratkaista."

Fermat'n ja Descartesin esittämiä komplisoituja tangentinmääritysmenetelmiä yksinkertaistivat hollantilainen *Johann Hudde* (1628–1704) ja flaamilainen *René François de Sluse* (1622–85). He johtivat laskennallisempia menetelmiä tangentinmäärityksessä esiintyvien kaksoisjuurten määrittämiseksi. Hudden menetelmä oli seuraavanlainen. Olkoon

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Muodostetaan uusi polynomi G kertomalla F:n kertoimet aritmeettisen jonon a, $a+b$, $a+2b$, $\dots$, $a+nb$ luvuilla. Siis

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(a+kb)x^k.$$

Silloin F:n kaksoisjuuri e on G:n juuri: jos

$$F(x) = (x-e)^2 \sum_{k=0}^{n-2} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n-2} c_k(x^{k+2} - 2ex^{k+1} + e^2x^k),$$

ja jos $A_k = a + kb$, niin

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=0}^{n-2} c_k(A_{k+2}x^{k+2} - 2eA_{k+1}x^{k+1} + e^2A_kx^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} c_k \left((A_k+2b)x^2 - 2e(A_k+b)x + e^2A_k\right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} c_k \left(A_k(x-e)^2 + 2bx(x-e)\right) x^k. \end{aligned}$$

Jos $a = 0$ ja $b = 1$, niin $G(x) = xF'(x)$; Hudden sääntö tulee määrittäneeksi polynomin derivaatan puhtaasti algebrallisen manipulaation tuloksena.

Erotusosamäärän raja-arvon idea tulee sen sijaan selvästi esiin Newtonin cambridgeläisen opettajan *Isaac Barrow'n* (1630–77) 1660-luvulla pitämissä luennoissa, joissa tangentti tulkitaan kahden lähekkäin olevan käyrän pisteen kautta kulkevan suoran raja-asennoksi, kun pisteet ovat lähellä toisiaan. Tämä raja-asento voitiin laskea jättämällä korkeamman kertaluvun infinitesimaalit pois. Barrow esitti myös ensimmäisenä, että sellaisen käyrän C_1, joka esittää toisen käyrän C_2, x-akselin ja y- akselin suuntaisten suorien rajoittaman alueen pinta-alaa, tangentti saadaan suoraan käyrän C_2 avulla. Barrow esitti tämän asian, joka on olennaisesti sama kuin differentiaali- ja integraalilaskennan peruslause, pelkästään geometrisena totuutena. Asiaan sisältyvää funktioiden relaatiota hän ei käsitellyt, joten hänen tulostaan ei varsinaisesti voi pitää integraalilaskennan peruslauseena.

Tangentinmäärityksiä tehtiin myös mekaanisin perustein. Näin toimi mm. Roberval: jos käyrän ajatellaan syntyvän massapisteen liikkuessa, on pisteen hetkellisen nopeuden suunta tangentin suunta. Jos käyrä voidaan tulkita kahden eri liikkeen yhdistelmäksi (kuten sykloidi, jossa yhdistyvät translaatio ja rotaatio, kumpikin vakionopeuksisena), voidaan tangentti määrittää nopeuksien yhteenlaskun periaatteella. Kun paraabeli tulkitaan sellaisen pisteen liikkeenä, jonka etäisyys polttopisteestä ja johtosuorasta on sama, voidaan paraabelin tangentin suunta saada polttopisteestä pois suuntautuvan ja johtosuoraa vastaan kohtisuorassa olevien yhtä pitkien vektorien summana. Tästä nähdään heti, että paraabelin tangentti puolittaa polttosäteen ja johtosuoraa vastaan piirretyn kohtisuoran välisen kulman.