13 Algebran kehitysvaiheita

1800-luvulle asti algebran tutkimuskohteeksi ymmärrettiin polynomiyhtälöiden $P(x) = 0$ ratkaiseminen ja ratkaisujen ominaisuuksien tutkiminen. Nykyisen algebran standardioppimäärän käsitteistö oli 1700-luvulla melkein kokonaan tuntematon.

13.1 Algebran vapautuminen

Samoin kuin geometria 1800-luvulla lakkasi olemasta sidoksissa Eukleideen postulaatteihin tai havaintomaailman näkyvien ominaisuuksien kuvailuun, myös algebrassa alettiin tutkia muita kuin ”ennalta annettuja” luonnollisten lukujen tai reaalilukujen järjestelmiä. Algebraan väkisin tulleet negatiiviset ja imaginaariset suureet kaipasivat myös perustelujaan. Ensimmäisiä uutta suhtautumistapaa edustavia algebrikkoja oli englantilainen *George Peacock* (1791–1858). Hän julkaisi vuonna 1830 loogiseen täydellisyyteen pyrkivän algebran oppikirjan – aikaisemmin algebra ymmärrettiin yksinomaan abstraktiksi laskennoksi, ja todistamisen katsottiin kuuluvan vain geometriaan. Peacock esitti, että on kahdenlaista algebraa, aritmeettista ja symbolista. Edellinen kodifioi ei-negatiivisten lukujen laskusäännöt, jälkimmäinen operoi mielivaltaisilla suureilla, jotka eivät välttämättä ole lukuja. Lukujen laskulait ovat kuitenkin yleispäteviä, vallitsee ”ekvivalenttien muotojen permanenssi” eli laskulakien säilymisen periaate. Jos kaksi lauseketta ovat ekvivalentit, kun symbolien paikalle sijoitetaan ei-negatiiviset luvut, ne ovat ekvivalentit silloinkin, kun symbolit edustavat mielivaltaisia suureita. Ominaisuudet *kommutatiivisuus*, *distributiivisuus* ja *assosiatiivisuus* tunnistettiin ja nimettiin 1800-luvun alussa.

Peacockin maanmies, logiikan ja joukko-opin *De Morganin laeista* tunnettu *Augustus De Morgan* (1806–71) meni vielä pitemmälle: suureiden sijasta hän manipuloi abstrakteja symboleja, joiden sisältö saattoi olla täysin mielivaltainen. De Morgan ei kuitenkaan pitänyt mahdollisina aritmetiikan laskulaeista poikkeavia järjestelmiä. Pelkkiin mielivaltaisiin aksioomiin, ilman reaalisisältöä, pohjautuvia järjestelmiä hän vertasi palapelin kokoamissen ylösalaisin, katsomatta palojen kuvia.

13.2 Hamilton ja epäkommutatiivisuus

Paljon olennaisemmin kuin Peacock tai De Morgan algebraa laajensi irlantilainen *William Rowan Hamilton* (1805–65). Hamiltonin tutkimuksesta *Theory of Algebraic Couples* (1835) on peräisin metodi, jolla lukualueita laajennetaan tarkastelemalla suppampien alueiden lukupareja. Täten Hamilton määritteli negatiiviset luvut positiivisten lukujen parien avulla, rationaaliluvut kokonaislukujen avulla. Hamiltonin pyrkimys päästä rationaaliluvuista reaalilukuihin ei ollut erityisen menestyksellinen. Hamilton esitti sen, miten kompleksiluvut ja niiden laskutoimitukset voidaan määritellä reaalilukuparien (a, b) avulla. Täten poistui osa imaginaarilukuihin liittynyttä mystiikkaa. Hamilton yritti yleistää kompleksilukujen struktuuria myös kolmeen ulottuvuuteen, mutta ei onnistunut. Sen sijaan hän oivalsi 1843, että jos luovutaan kertolaskun vaihdannaisuudesta, niin ”neliulotteisille” *kvaternioille* $a + bi + cj + dk$ voidaan määritellä mielekkäästi kerto- ja yhteenlasku

$$(ii = jj = kk = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j).$$

Koska

$$\begin{aligned}&(ai+bj+ck)(di+ej+fk)\\&=-(ad+be+cf)+(bf-ce)i+(cd-af)j+(ae-bd)k,\end{aligned}$$

kvaternioiden laskusääntö pitää sisällään molemmat normaalit vektorien tulot, skalaari- ja vektoritulon.

Luopumalla kommutatiivisuudesta Hamilton otti askelen kohti algebrallisten struktuurien abstraktiutta ja sopimuksenvaraisuutta. – Hamilton oli erittäin monipuolinen tutkija, joka teki tärkeitä keksintöjä niinkin erilaisilla aloilla kuin mekaniikka ja verkkoteoria. Kvaterniot keksittyään hän omisti loppuelämänsä pelkästään niille. Joukolle Hamiltonin seuraajia kvaterniot muodostuivat lähes uskon asiaksi.

– Hamilton oli monipuolisesti lahjakas ja varhaiskypsä (13-vuotiaana hän saattoi todenmukaisesti sanoa oppineensa uuden kielen jokaista elinvuottaan kohden). Hän on harvoja matemaatikkoja, joiden runsaaseen alkoholinkäyttöön on kiinnitetty huomiota. Hamiltonin optiikkaa ja mekaniikkaa käsittelevät työnsä ovat erittäin merkittäviä. Mekaanisen systeemin tilaa esittää sen *Hamiltonin funktio* H, energian yleistys, ja systeemin yleistetyt paikka- ja impulssikoordinaatit q_i, p_i noudattavat *Hamiltonin yhtälöitä*

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i,\quad \frac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot{p}_i.$$

Epäkommutatiivisen algebran keksijöitä on myös saksalainen *Hermann Grassmann* (1809–77), jonka vuonna 1844 julkaistu vaikeatajuinen *Ausdehnungslehre* sisälsi eriulotteisia vektoreita käsittävän algebrallisen struktuurin. Grassmannin ideoista yksinkertaistui ennen muuta amerikkalaisen fyysikon *Josiah Willard Gibbsin* (1839–1903) käsissä tuttu kolmiulotteisen avaruuden vektorialgebra kaksine vektorien välisine tuloineen, joista toinen ei ole vaihdannainen. Vektorit voittivat konkrettisempina kvaterniot fysiikan apuvälineinä.

13.3 Matriisit

Myös *matriisialgebran* synty ajoittuu 1800-luvun puoliväliin. Matriisien ei-kommutatiivisen kertolaskun ja yleensä konvention merkitä $m\times n$:n luvun suorakaiteen muotoon järjestettyä joukkoa yhdellä kirjaimella keksi 1858 Arthur Cayley tarkastellessaan kahden lineaarisen transformaation

$$(x,y)\mapsto(ax+by,\,cx+dy)\quad\text{ja}\quad(u,v)\mapsto(Au+Bv,\,Cu+Dv)$$

yhdistämistä. Sen, että yhdistäminen johtaa transformaatioon

$$(x,\,y)\mapsto((Aa+Bc)x+(Ab+Bd)y,\,(Ca+Dc)x+(Cb+Dd)y)$$

oli kirjannut jo Gauss. Determinanttien teoria oli syntynyt jo aikaisemmin matriiseista riippumatta.

Cayleyn ja hänen maanmiehensä *James Sylvesterin* (1814–97) tutkimuksen pääkohteena olivat ns. *muodot* eli kahden tai useamman muuttujan tasa-asteiset polynomit ja niiden *invariantit* eli sellaiset kerrointen funktiot, jotka säilyvät muuttumatta, kun suoritetaan tiettyjä muuttujanvaihtoja. (Esim. muodon $ax^2+2bxy+cy^2$ yksi invariantti koordinaatiston kierron suhteen on diskriminantti b^2-ac.) Sylvesteriltä on peräisin metodi muodon muuntamiseksi *pääakselimuotoon*, jonka erikoistapaus on analyyttisestä geometriasta tuttu toisen asteen käyrän tai pinnan yhtälön saattaminen kanoniseen normaalimuotoon. – Sylvester toimi Cayleyn tapaan paitsi matemaatikon myös juristin tehtävissä. Hän opetti kahteen otteeseen Yhdysvalloissa ja on ensimmäisiä korkeamman matematiikan edustajia Amerikassa. Sana *matriisi* on Sylvesterin käyttöön ottama. (Etymologia on 'kohtu' (vst. mater, 'äiti'. Kielikuva lienee tullut matematiikkaan kirjapainon ladelman kehikon kautta.) Sylvester otti myös käyttöön mm. termit *invariantti*, *diskriminantti* ja *Jacobin determinanmtti*.

13.4 Algebralliset struktuurit

Vanhin algebran peruskursseilla opetettavista algebrallisista struktuureista on *ryhmä*. Ryhmäkäsitteeseen johduttiin aluksi polynomiyhtälön ratkaisujen yhteydessä; jo Lagrange ja Ruffini esittivät tarkasteluja, joihin sisältyy implisiittisesti ryhmä. Sanaa ryhmä sen nykyisessä teknisessä merkityksessä käytti ensi kerran *Evariste Galois* (1811–32). Galois osoitti, että algebrallisen yhtälön juuret ovat lausuttavissa yhtälön kertoimista ja niiden juurista muodostettuina rationaalisina lausekkeina täsmälleen silloin, kun yhtälön juurien permutaatioryhmän tietyllä aliryhmällä, *Galois'n ryhmällä*, on sittemmin *ratkeavuudeksi* nimitetty ominaisuus. – Galois on matematiikan historian romanttisia hahmoja: hän reputti kahdesti École Polytechniquen pääsykokeissa, hänet erotettiin École Normalesta, hän oli mielipiteiltään radikaali ja istui siksi vankilassa, ja hän kuoli – ehtimättä edes 21 vuoden ikään – haavoihin, jotka oli saanut epämääräisen naisen vuoksi syntyneessä kaksintaistelussa. Aikalaiset eivät juuri ymmärtäneet hänen töitään, joista osa joutui käsittämättömästi kadoksiin aikakauskirjojen toimituksissa ja julkaistiin vasta vuosikymmen hänen kuolemansa jälkeen. Kertomus, jonka mukaan Galois olisi kirjoittanut päätutkimuksensa kaksintaistelua edeltäneenä yönä, on kuitenkin ilmeisesti tekaistu.

Ryhmiä, etenkin ns. substituutioryhmiä eli permutaatioryhmiä, tutkivat useat 1800-luvun puolivälin matemaatikot, mm. Cauchy. Abstraktin ryhmän määritelmän, jossa ryhmän laskutoimitus esitetään taulukon muodossa, julkaisi ensi kerran Arthur Cayley 1854, mutta Cayleyn määritelmä ei juuri saanut huomiota osakseen. Vuonna 1870 saksalainen *Leopold Kronecker* (1823–91) esitti abstraktin (kommutatiivisen) ryhmän uutena asiana. Lopullisesti ryhmän aseman matematiikassa vakiinnutti ranskalaisen *Camille Jordanin* (1838–1922) vuonna 1870 julkaisema *Traité des substitutions*. Samoihin aikoihin norjalainen mutta myös Saksassa vaikuttanut *Sophus Lie* (1842–99) havaitsi ryhmästruktuurin arvon differentiaaliyhtälöiden teoriassa ja Felix Klein geometriassa. *Lien ryhmät* ovat ryhmiä, joissa algebrallisen struktuurin ohella on topologinen struktuuri, jonka suhteen ryhmän operaatiot ovat jatkuvia funktioita. Lien ryhmien käyttöalaa on mm. osittaisdifferentiaaliyhtälöiden integrointi.

Käsitteet *kunta, rengas* ja *ideaali* tulivat matematiikkaan saksalaisten *Eduard Kummerin* (1810–93), Leopold Kroneckerin (1823–91) ja Richard Dedekindin algebrallista lukuteoriaa koskevien tutkimusten myötä. Kunta tosin oli implisiittisesti läsnä jo Galois'n tarkasteluissa. Abstraktin aksiomaattisen määritelmän nämä struktuurit saivat vasta 1900-luvulla. – Kummerin tutkimusten tavoite oli todistaa Fermat'n suuri lause. Hän onnistuikin todistamaan sen kaikille sataa pienemmille eksponenteille. Berliinissä omavaraisena matemaatikkona ja viimein professorina toiminut Kummerin oppilas Kronecker muistetaan paitsi algebrikkona myös jyrkästä täsmällisyysohjelmastaan: matematiikassa tuli hyväksyä vain asiat, jotka olivat palautettavissa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin. Täten esim. irrationaalilukujen olemassaolo oli hänen mielestään kyseenalaista. (”Kokonaisluvut on hyvä Jumala luonut, kaikki muu on ihmistyötä.”) Kroneckerin asenteesta löytyy perustelu kunta-käsitteelle. Jos sinänsä hyödyllisen $\sqrt{2}$:n olemassaolo ei ole taattua, sen käytön on perustuttava konstruktioon, tässä tapauksessa rationaalilukujen kunnan kuntalaajennukseen, joka tuo mukanaan tämän elementin.