16 Hiukan matematiikasta 1900-luvulla

Päättymässä oleva vuosisata (vuosiluvut ovat järjestyslukuja, joten vuosisata päättyy kahteen nollaan päättyvän vuosiluvun vuoden päättyessä) on tuottanut matematiikkaa ja merkittäviä matemaatikkoja saman verran kuin aikaisemmat vuosisadat yhteensä. Sinänsä tämä ei ole yllättävää, sillä tieteenharjoituksen määrän eksponentiaalinen kasvu merkitsee (todennäköisesti – varmaa laskelmaa ei taida olla helppo tehdä), että suurin osa kaikkina aikoina eläneistä matemaatikoista elää tällä hetkellä. Matematiikan soveltamisala ja soveltamistarpeet ovat myös valtavasti laajentuneet, samoin tieteenharjoittamisen tekniset ja taloudelliset mahdollisuudet.

16.1 Poincaré sekä Hilbert ja saksalainen matematiikka

Vuosisadan vaihteen kaksi ilmeistä matematiikan voimahahmoa ovat ranskalainen *Henri Poincaré* (1854–1912) ja saksalainen *David Hilbert* (1862–1943).

Poincaré oli viimeisiä todellisia monipuolisuusmiehiä niin puhtaan kuin soveltavankin matematiikan alalla. Hän ei yleensä viihtynyt pitkään yhden asian parissa vaan vaihtoi nopeasti tutkimusaiheitaan. Poincaré hankki École Polytechniquessa ja École des Mines -korkeakoulussa kaivosinsinöörin koulutuksen; professorina Sorbonnessa hän luennoi joka vuosi eri aiheista ja tuotti samalla kirjoja, myös kansantajuisia. Puhtaan matematiikan piirissä hänen kestävimpiä saavutuksiaan on 1800-luvun elliptisten funktioiden tutkimuksen yleistävä *automorfifunktioiden teoria*, joka syntyi 1880-luvun alussa. (Automorfifunktiot ovat kompleksimuuttujan funktioita f, joille pätee $f(z) = f(g(z))$ kaikille jonkin lineaarimuunnoksista $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ koostuvan ryhmän G jäsenille.) Poincaré ja Felix Klein kävivät ankaraa kilpailua automorfifunktioihin liittyvien ongelmien selvittämisessä; Klein ei lopulta kestänyt, vaan koki hermoromahduksen eikä enää koskaan kyennyt aivan täysitehoiseen luovaan työhön. Poincaré on algebrallisen topologian perustajia ja merkittävä differentiaaliyhtälöiden tutkija. Laplacen tapaan hän teki tärkeitä töitä myös taivaanmekaniikassa, n:n kappaleen ongelman alalla, ja todennäköisyyslaskennan alalla.

Myös Hilbert oli erittäin monipuolinen matemaatikko. Hän oli syntynyt Königsbergissä ja siellä akateemisen uransa aloittanut, mutta oli vuodesta 1896 Göttingenin yliopiston matematiikan professori. Hänen ensimmäiset työnsä koskivat lukuteoriaa ja invarianttiteoriaa. Suuri merkitys on hänen 1899 julkaisemallaan pienellä kirjalla *Grundlagen der Geometrie*, jossa esitetään täsmällinen geometrian aksioomajärjestelmä. Hilbertin geometria on puhtaasti formaalinen, aistihavaintoihin perustuvista lausumattomista oletuksista kokonaan irrotettu järjestelmä.

Vuoden 1900 Kansainvälisessä matemaatikkokongressissa Pariisissa Hilbert piti kuuluisan esitelmän, jossa hän arvioi matematiikan senhetkistä tilaa ja esitti luettelon 23 avoimesta kysymyksestä matematiikan eri aloilta. Näiden *Hilbertin probleemien* ratkaisu on työllistänyt ja jatkuvasti työllistää matemaatikkoja. Ongelmista ensimmäinen koski Cantorin kontinuumihypoteesia, toinen aritmetiikan aksioomajärjestelmän ristiriidattomuutta, kuudes fysiikan aksiomatisointia. Osa ongelmista koski melko spesifejä kysymyksiä, kuten lukujen $2^{\sqrt{2}}$ tai e^{π} mahdollista transkendenttisuutta tai irrationaalisuutta, osa oli jokseenkin yleisluontoisia, selklaisia, joihin yksikäsitteisen vastauksen antaminen ei ollut mahdollista. Ensimmäinen ratkaisun saanut Hilbertin ongelma oli numero 3, jossa etsittiin todistusta sille, että mielivaltaista tetraedria ei voi jakaa äärelliseen määrään monitahokkaita, joista voi koota kuution. Ratkaisija oli Hilbertin oppilas *Max Dehn* (1878–1952). Dehnin ratkaisu on vuodelta 1901.

Hilbert tutki itse myös mm. lukuteoriaa, integraaliyhtälöitä, matemaattista fysiikkaa ja matemaattista logiikkaa. Riemannin käyttämän Dirichlet'n periaatteenkin Hilbert täsmensi ja palautti sallittujen keinojen varastoon. Matematiikan filosofian alalla Hilbert edusti ns. *formalistista koulukuntaa.* – Hilbertin "viimeiset sanat" kollegoilleen, jotka esittivät epäilyjä matematiikan kyvystä selvitä perusteidensa ristiriitaisuuksista, ovat muodostuneet kannustavaksi lentäväksi lauseeksi: *Wir müssen wissen, wir werden wissen!*

Göttingen oli muutenkin matematiikan keskus Saksassa ennen toista maailmansotaa. Hilbertin ohella siellä toimivat mm. Klein, tämän seuraaja *Richard Courant* (1888–1972) ja Hilbertin oppilas ja seuraaja *Hermann Weyl* (1885–1955). Courant kirjoitti ja julkaisi yhdessä Hilbertin kanssa 1924 teoksen *Methoden der mathematischen Physik*, jonka merkitys tuolloin syntyvaiheissaan olleelle kvanttimekaniikalle oli suuri. Erittäin monipuolinen Weyl julkaisi 1912 Riemannin pintojen aksiomaattisen määritelmän. Hänen merkityksensä on suuri myös *Albert Einsteinin* (1879–1955) yleisen suhteellisuusteorian kehittäjänä.

Kansallissosialismin valtaantulolla vuonna 1933 oli merkittäviä vaikutuksia matematiikan kehitykselle. Suuri joukko juutalaisia ja toisinajattelevia matemaatikkoja siirtyi pois Saksasta, etupäässä Yhdysvaltoihin (näin tekivät myös Courant, Weyl ja Einstein ja Göttingenissä toiminut ehkä kaikkien aikojen merkittävin naispuolinen matemaatikko, algebrikko *Emmy Noether* (1882–1935)). Tämän tiedemiesten joukkosiirtymisen ansiota on paljolti se johtoasema, jonka Yhdysvallat on matematiikan määrässä ja laadussa saavuttanut kuluneen vuosisadan jälkipuoliskolla. Saksassa yritettiin 1930-luvulla todistella, että on olemassa hyvää arjalaista ja huonoa seemiläistä matematiikkaa. Tällaisia ajatuksia esittivät eräät sinänsä pätevätkin matemaatikot, mm. monista oppikirjoistaan ja yli puoli vuosisataa ratkaisematta olleesta funktioteoreettisesta konjektuuristaan tunnettu *Ludwig Bieberbach* (1886–1982). (Bieberbachin sittemmin todeksi osoittautunut olettamus oli, että yksikkökiekossa $|z| < 1$ analyyttisen bijektion f, jolle $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$, potenssisarjakehitelmän $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ jokaisen kertoimen a_k itseisarvo on enintään k.)

16.2 Eräitä matematiikan uusia ja uudistuvia osa-alueita

Topologia kytkeytyy nykyisin hyvin suureen osaan matematiikkaa. Sen katsotaan saaneen alkunsa milloin Eulerin esittämästä Königsbergin siltaprobleeman ratkaisusta, milloin Riemannin väitöskirjasta, milloin Cantorin joukko-opin ja topologian välimaastossa kulkevista töistä. Termiä topologia käytti ensi kerran Gaussin oppilas *Johann Benedikt Listing* vuonna 1847. Käsitteet *avoin* ja *suljettu joukko* esiintyvät ensi kerran Cantorilla. Ensimmäinen systemaattinen topologian esitys oli Poincarén vuonna 1895 julkaisema teos *Analysis situs.* Poincaré oli kiinnostunut topologian kombinatoris-algebrallisesta puolesta. Pistejoukkojen topologian perustajana voidaan pitää *Felix Hausdorffia* (1868–1942). Hänen 1914 ilmestynyt teoksensa *Grundzüge der Mengenlehre* sisältää abstraktin topologisen avaruuden aksiomaattisen määrittelyn ympäristökäsitteen avulla. Topologian alkuaikojen merkittäviä pioneereja on myös hollantilainen *L. E. (Luitzen Egbertus) Brouwer* (1881–1966), joka 1911 todisti keskeisen avoimien joukkojen invarianssilauseen: eriulotteisissa avaruuksissa sijaitsevien avoimien joukkojen välinen homeomorfismi, kääntäen yksikäsitteinen jatkuva kuvaus, on mahdoton.

Cantorin joukko-oppi johti uusiin *mitallisuutta* ja integrointia koskeviin teorioihin. Alan pioneereja olivat ranskalaiset *Emile Borel* (1871–1956) (poliittisestikin orientoitunut matemaatikko; hän oli kansanedustaja ja toimi 1920-luvulla jonkin aikaa laivastoministerinä) ja *Henri Lebesgue* (1875–1941). Borel rajoitti mitallisuuden kannalta käsiteltävät pistejoukot (reaaliakselilla) numeroituvilla prosesseilla väleistä kokoonpantaviin joukkoihin, *Borelin joukkoihin*, ja Lebesgue laajensi 1902 ilmestyneessä väitöskirjassaan merkittävästi Riemannin integraalikäsitettä: hänen keskeinen oivalluksensa oli, että integraalia määriteltäessä funktion määrittelyjoukon jaon sijasta oli kannattavampaa tarkastella maalijoukon jakoja. Tällöin voidaan integraali määritellä helposti ja mielekkäästi varsin vähän säännöllisyyttä omaavillekin funktioille, vaikkapa Dirichlet'n kaikkialla epäjatkuvalle funktiolle. Toisaalta on tarpeen yleistää pituuden, pinta-alan tai tilavuuden käsite koskemaan geometriselta kannalta epäsäännöllisiäkin joukkoja. Lebesguen määrittelemä mitta toimii laajemmalle kokoelmalle joukkoja kuin Borelin mitta.

Niin joukko-oppi, topologia kuin mittateoriakin näyttelevät osaa *funktionaalianalyysissä*. Funktionaalianalyysin lähtökohtana oli toisaalta pyrkimys viedä analyysin käsitteistö joukko-opin ja topologian luomiin abstrakteihin avaruuksiin, toisaalta konkreettisemmin mm. integraaliyhtälöiden ratkaisemisessa tarvittavien menetelmien luominen. Edellisen suunnan alkua merkitsevät *Maurice Fréchet'n* (1878–1973) työt, joihin sisältyy mm. abstraktin *metrisen avaruuden* määritelmä vuodelta 1906. Integraaliyhtälöiden tutkijoista on mainittava italialainen *Vito Volterra* (1860–1940) ja ruotsalainen *Ivar Fredholm* (1866–1927). Ensimmäisiä "ääretönulotteisten" menetelmien käyttäjiä integraaliyhtälöissä oli Hilbert. Hän ei kuitenkaan itse määritellyt euklidisen avaruuden lähintä ääretönulotteista vastinetta, täydellistä sisätulolla varustettua numeroituvan kannan omaavaa lineaariavaruutta eli *Hilbertin avaruutta* (vaan joutui kertoman mukaan jopa vanhoilla päivillään utelemaan kollegaltaan Hermann Weyliltä, mitä kyseinen monien käyttämä sana oikein tarkoitti). Hilbertin avaruuden aksiomaattisen määritelmän esitti 1930 unkarilais-amerikkalainen *Johann (John) von Neumann* (1903–57).

Merkittävä funktionaalianalyysiä yhtenäistävä ja kodifioiva tapaus oli puolalaisen *Stefan Banachin* (1892–1945) teoksen *Théorie des opérations lineaires* ilmestyminen vuonna 1932. Kirjassa määritellään eräs funktionaalianalyysin keskeisimpiä struktuureja, täydellinen normilla varustettu lineaariavaruus eli *Banachin avaruus* ja esitetään tällaisen avaruuden perusominaisuudet.

Todennäköisyyslaskenta lakkasi 1900-luvun alkupuolella olemasta ensi sijassa "uhkapelioppia" ja kehittyi keskeiseksi matematiikan osa-alueeksi; sen soveltamisaloihin liittyivät vakuutustoimen ja havaintovirheiden arvioinnin lisäksi mm. statistinen mekaniikka, jonka perustajia on edellä mainittu Gibbs, ja genetiikka sekä muut biotieteet. Todennäköisyyslaskennassakin tuntuivat joukkoopin ja mittateorian vaikutukset. Borel täsmällisti todennäköisyyden käsitettä 1909 julkaisemassaan oppikirjassa, mutta vasta neuvostoliittolainen *Andrei Nikolajevitš Kolmogorov* (1903–87) vuonna 1933 varsinaisesti aksiomatisoi todennäköisyyslaskennan ja osoitti, että se on itse asiassa osa mittateoriaa. Toisen merkittävän venäläisen probabilistin *Andrei Andrejevitš Markovin* (1856–1922) vuosina 1906–07 julkaistut todennäköisyysketjuja, ns. *Markovin ketjuja*, koskevat työt panivat alulle *stokastisten prosessien* tutkimuksen.

Matematiikka on nykyään eriytynyt tavattoman moniksi eri osa-alueiksi. Pääaloja on kuutisenkymmentä, ja jokainen jakautuu vielä pienempiin osiin. Vastapainoksi tälle eriytymiselle on tällä vuosisadalla pyritty luomaan myös synteesejä. Tällainen pyrkimys oli jo Peanolla 1800- luvun lopulla samoin kuin Saksassa vuosina 1898–1921 ilmestyneen *Enzyklopædie der mathematischen Wissenschaften* -teoksen toimittajilla. Suurisuuntaisin synteesiyritys on kuitenkin nimimerkillä *Nicolas Bourbaki* kirjoittaneella ranskalaisella kollektiivilla, jonka huomattavia jäseniä ovat olleet mm. *André Weil* (1906–98) ja *Jean Dieudonné* (1906–92). Bourbakin moniosainen teossarja *Éleménts de mathématique* pyrkii esittämään kaikki matematiikan tärkeät osa-alueet yhtenäisessä aksiomaattis-loogisessa rakennelmassa. Bourbakin vaikutus näkyy suomalaisessakin termistössä: mm. käsitteet *bijektio* ja *surjektio* sekä tyhjän joukon symboli $\emptyset$ ovat bourbakismeja.