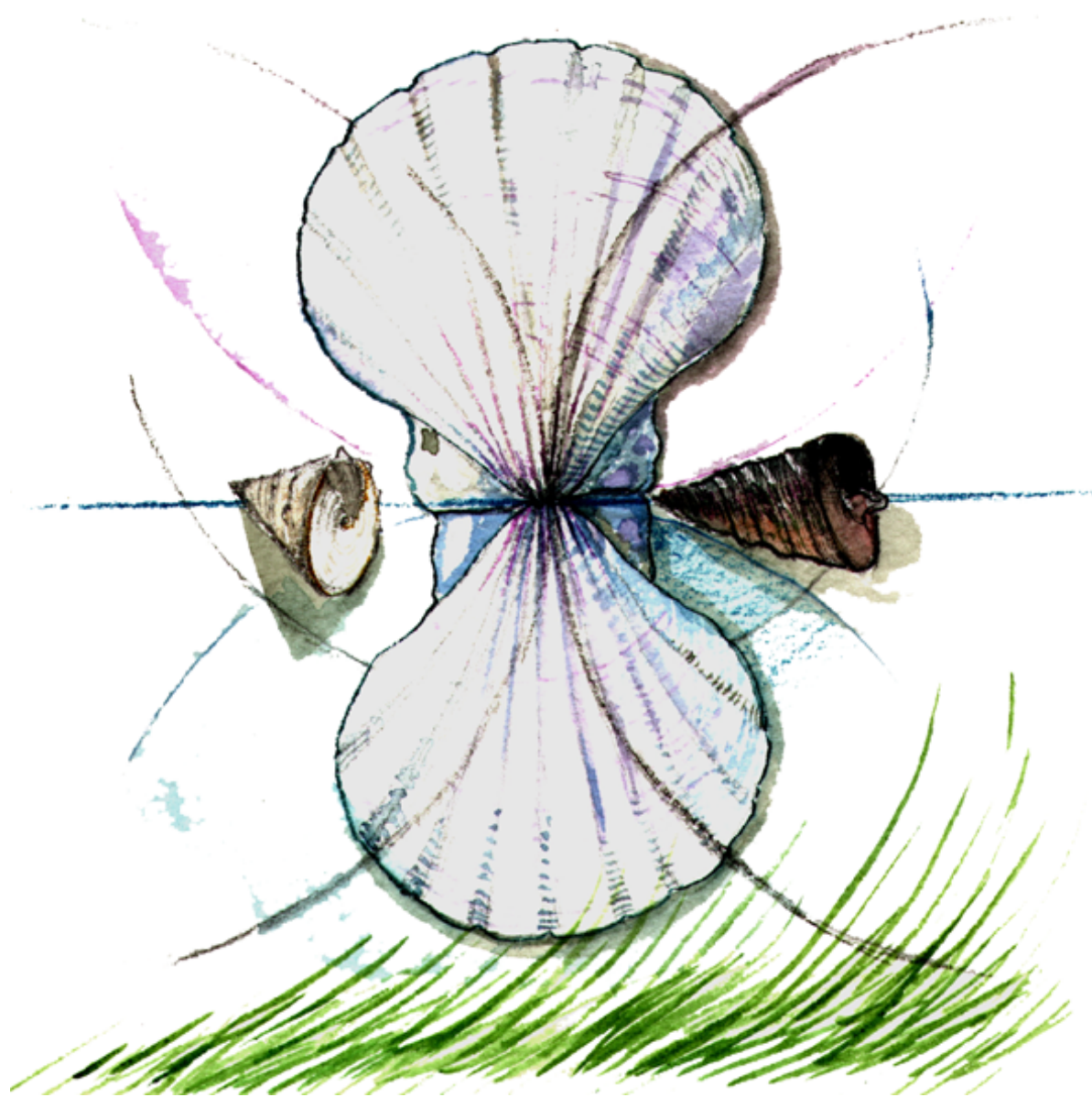


Solmu

Matematiikkalehti
2/2000–2001

<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/>



Solmu 2/2000–2001

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/>

Päätoimittaja *Pekka Alestalo*
Toimitussihteerit *Jouni Seppänen* ja *Mika Koskenoja*

Sähköposti
pekka.alestalo@helsinki.fi
jouni.seppanen@iki.fi

Toimituskunta:
Heikki Apiola
Matti Lehtinen
Kullervo Nieminen
Marjatta Näätänen

Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*

Seuraavaan lehteen tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään tammikuun 2001 loppuun mennessä.

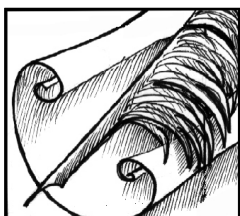
Kiitämme taloudellisesta tuesta Opetusministeriötä ja Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan nykyisin vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Täydellisen kokoelman Solmun jo ilmestyneitä paperikopioita voi pyytää esim. koulun kirjastoon niin kauan kuin niitä riittää. Ilmoittakaa postiosoitteenne ja mitkä numerot haluatte joko yllä mainittuun Solmun posti-osoitteeseen tai sähköpostilla osoitteeseen solmu@www.math.helsinki.fi.

Sisällys

Pääkirjoitus	4
Toimitussihteerin palsta	5
Tangram	6
Geometriakulma 11: Miten piirrän oikeaoppisesti avaruuskuvioita?	12
Unkarilaista matematiikkaa englanniksi verkossa	15
Vaikutteita opetukseen Unkarista	16
Matematiikkaolympialaiset Koreassa	18
Tehtäviä	21
Ratkaisut geometrisiin tehtäviin	22
Tehtävien ratkaisut	24



Pääkirjoitus

Mitä on matemaattinen lahjakkuus ja miten se syntyy? Tämä lienee yhtä vaikea ongelma kuin minkä tahansa muun lahjakkuuden alkuperän selvittäminen.

Yksi tapa mitata matemaattista lahjakkuutta perustuu matematiikkakilpailuihin, joihin Suomessakin osallistuu vuosittain monia lukiolaisia ja osa myös valmentautuu niitä varten. Kilpailuissa menestyminen edellyttää laskutaitojen lisäksi myös nopeaa oivaltamista ja hyvää keskittymiskykyä, ja kärjen saavuttaneita voitaneen epäilemättä kutsua huippulahjakkaiksi. Toisaalta lienee selvää, että matemaattiseen lahjakkuuteen liittyy myös seikkoja, joita kilpailutilanteessa voi olla vaikea saada esille.

Aina silloin tällöin kuulee myös kritiikkiä tiedekilpailuja kohtaan: kouluopetuksessa pitäisi keskittyä yleisen osaamistason parantamiseen eikä huippujen ihannointiin, eikä huippulahjakkaiden esillenostaminen ole hyväksi keskitason oppilaiden motivaatiolle. Mitä tavalliseen kouluopetukseen tulee, tämä on tietysti totta, mutta rehellisesti sanottuna en muista havainneeni mitään erityistä ihannointia tai palvontaa matematiikka- tai muissa luonnontieteiden kilpailuissa menestyneitä oppilaita kohtaan, vaikka kilpailuja

silloin tällöin lehdistössä käsitelläänkin. Pikemminkin luulisi kritiikin kohdistuvan musiikissa tai urheilussa nuorille järjestettäviin koitoksiin, joista leikki näyttää joskus olevan kaukana. Joka tapauksessa kaikille oppilaille olisi syytä järjestää mahdollisuus kunkin omaa tasoa vastaavaan opetukseen.

Toki tiedekilpailut voivat aiheuttaa myös tuskastumista, mutta kun kerran hyville urheilijoille sallitaan menestyksen mukanaan tuoma ilo, suotakoon sama myös matemaattisesti tai muilla tavoin lahjakkaille oppilaille. Osallistuin aikoinaan itsekin lukiossa joihinkin kansallisiin matematiikkakilpailuihin, mutten sijoittunut niissä kärkipäähän. Sikäli kuin pystyn asiaa analysoimaan, ei näistä kokemuksista ole jäänyt muistiini mitään erikoisen traumaattista, ja olen jopa valinnut matematiikan ammatikseni.

Tässä Solmun numerossa on kertomus huippujen kohtaamisesta kansainvälisellä tasolla, ja lisäksi myös joidakin vaikeita tehtäviä: jääköön niihin tutustuminen vain kaikkein uhkarohkeimmille. Helpompia tehtäviä löytyy muualta Solmun sivustoilta ja tietysti niitä ovat koulukirjat pullollaan!

Pekka Alestalo



Toimitussihteerin palsta

Tämä syksy ja tuleva talvi ovat Solmussa uudistumisen aikaa. Aikaisemmin Solmun kunkin numeron kaikki artikkelit on julkaistu verkkosivuilla samanaikaisesti. Tästä syksystä lähtien artikkelit ilmestyvät yksitellen heti kun ne on saatu julkaisuvalmiiksi. Kun artikkeleita on ilmestynyt tarpeeksi (viidestä kahdeksaan), kootaan näistä uusi numero, josta tehdään edelleen myös painettu lehti lähetettäväksi tilaajille. Uusi julkaisutapa nopeuttaa artikkeleiden ilmestymistä sekä vähentää toimituksen kiirettä lehden ilmestymispäivän lähestyessä.

Toinen uudistus koskee lehden numerointia. Tähän mennessä Solmu on numeroitu lukuvuosien mukaan kuten vielä tämäkin numero 2/2000–2001. Uuden vuosituhannen alkaessa numerointi muuttuu kalenterivuosiin mukaiseksi. Vuoden 2001 ensimmäisen Solmun numero on siis 1/2001.

Verkkosivujen ulkoasun uudistaminen on merkittävin Solmussa syksyn ja talven aikana toteutettavista muutoksista. Tavoitteena on uudenaikaistaa ja selkeyttää verkkosivujen jo hieman vanhahtavaa ulkoasua ja huonosti organisoitua rakennetta. Sivujen uusi ilme valmistunee vuodenvaihteeseen mennessä – täysin toimi-

viksi sivut saadaan kevään 2001 aikana. Toimivuuden testaus jää käyttäjille; näin ollen palaute toimitukseen onkin ensiarvoisen tärkeää.

Solmun verkkosivuilla ilmestyy nyt ensimmäisen keran matematiikkaan liittyviä pelejä. *Torus ja Kleinin pullo pelit*¹ ovat kaikille ainakin kokeilumielessä sopivia. Eniten ne kiinnostanevat peruskouluikäisiä lapsia, jotka muutenkin harrastavat tietokonepelejä kotitietokoneillaan.

Täydellisen kokoelman Solmun jo ilmestyneitä paperikopioita voi pyytää esim. koulun kirjastoon niin kauan kuin niitä riittää. Ilmoittakaa postiosoitteenne ja mitkä numerot haluatte joko Solmun postiosoitteeseen

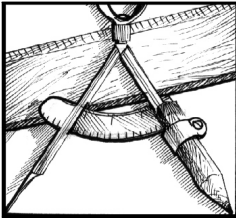
Matematiikkalehti Solmu
Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

tai sähköpostilla osoitteeseen

solmu@www.math.helsinki.fi.

Mika Koskenoja
mika.koskenoja@helsinki.fi

¹<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/pelit/toruspelit/TorusGames.html>



Tangram

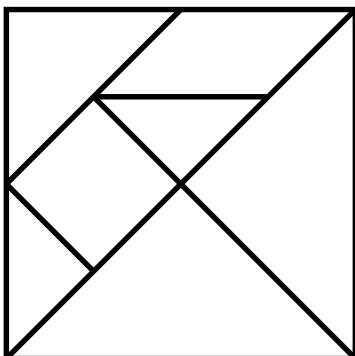
TUTUSTUTAAN TANGRAMIIN

Ensikohtaaminen

Tangram on kiinalainen palapeliä muistuttava ongelmakimppu. Siinä neliö on jaettu erimuotoisiin ja -kokoisiin paloihin, joita kääntelemällä ja siirtelemällä on tarkoitus rakentaa erilaisia mielenkiintoisia kuvioita.

Siinä missä eurooppalaisen palapelin palojen muodot ja määrät vaihtelevat vaikeustason mukaan, tangramissa palat ovat neliöstä aina samalla tavalla leikatut seitsemän palaa. Vaikeustasoa muutellaan rakennettavia kuvioita muutellen.

Tangram soveltuu kaikille, kuvioiden vaikeustaso vaihtelee hyvin helpoista todella vaikeisiin. Tekeminen ei myöskään lopu kesken, uusia kuvioita voi kehittää lähes loputtomiin.



Synty Kiinassa

Tangramin synnystä on lukuisia erilaisia tarinoita, kaikki yhtä viihdyttäviä ja mielenkiintoisia. Yhteistä tarinoissa on vain pelin pitkä ikä. Mitään tarinaa ei ole onnistuttu todistamaan muita todenperäisemmäksi.

Yksi legenda kertoo tangramin syntyneen, kun kiinalainen mies yritti koota hajonnutta levyä. Neliön sijaan paloista syntyi erilaisia eläimiä, ihmisiä ja rakennuksia. Toisen tarinan mukaan vanha kiinalainen jumalana palvottu kirjailija kirjoitti seitsemän kirjaa Maan kehityksestä ja kuvitti ne tangram-kuvilla.

Itse pelin historian lisäksi myös nimen historia on tuntematon. Se saattaisi tulla vanhasta kiinalaisesta Tangdynastiasta ja kreikan sanasta gramma, kirjoitettu. Toinen vaihtoehto on tangramin muodostuminen kirjoitusvirheiden kautta vanhasta englanninkielisestä sanasta trangam, koru tai lelu.

Painotuotteet tangramista

Ensimmäiset tangram-kirjat painettiin 1700- ja 1800-lukujen vaihteessa, vanhin säilynyt kiinalainen kirja on vuodelta 1813. Ensimmäisen kirjan jälkeen julkaistiin useita muita kirjoja. Kiinalaisissa kirjoissa tangram-tehtäviin on liitetty selittäviä kirjoitusmerkkejä. Osa kuvioista on itsessään jo kirjoitusmerkkejä.

Maihinnousu länsimaihin

Eurooppaan tangram levisi 1800-luvun alussa melko pikaisesti. Eurooppalaiset ja amerikkalaiset julkaisut muistuttivat paljon kiinalaisia, joskus kokonaisia sivuja oli kopioitu toisista kirjoista.

Euroopassa suhtautuminen kuvioihin erosi kiinalaisesta. Siinä missä kiinalaisilla kuvioilla oli merkitys, eu-

rooppalaiset vain yrittivät rakentaa erilaisia kuvioita, joita kirjoihin kuvattiin. Kirjoista hävisivät selittävät kirjoitukset, joita kiinalaisissa kirjoissa oli.

Amerikkalainen *Sam Loyd* kirjoitti omissa kirjoissaan, että kiinalainen *Li Hung Chang* todisti Pythagoraan lauseen tangramin avulla jo tuhansia vuosia sitten. Eli tangramiin sisältyy myös matemaattinen puoli. Siitä seuraavaksi.

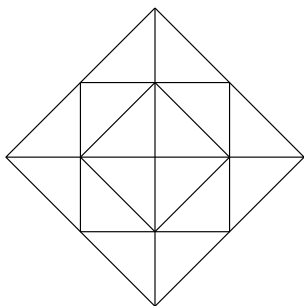
MATEMAATIKKO TUTKII TANGRAMIA

Kuperat monikulmiot

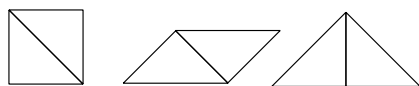
Ongelmia?

Ensin tarkastelemme mahdollisuutta rakentaa tangramin paloista kuperia monikulmioita. Kuperassa monikulmiossa kahden kärjen yhdysjana kulkee koko ajan monikulmion sisällä, riippumatta siitä, mitkä kaksi kärkipistettä valitaan. Kuinka monta erilaista monikulmiota on mahdollisuus rakentaa? Kuinka monta kulmaa monikulmiossa voi olla?

Aloitamme jakamalla tangramin kuutentoista samankokoiseen, tasakylkiseen suorakulmaiseen kolmioon, kutsumme näitä kolmioita peruskolmioiksi.



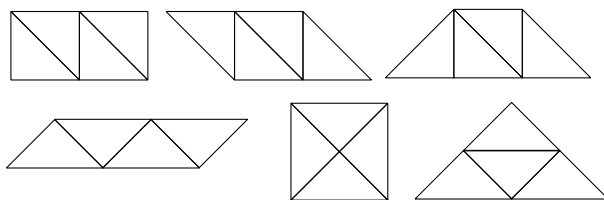
Kahdesta peruskolmiosta voidaan rakentaa kuperia monikulmio kolmella eri tavalla:



Kolmesta peruskolmiosta saadaan kaksi kuperaa monikulmiota:



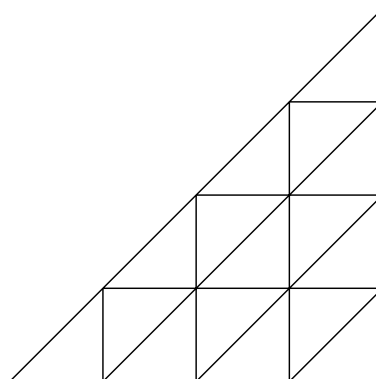
Neljällä peruskolmiolla syntyy kuusi kuperaa monikulmiota:



Kaikissa edellä esitetyissä kuperissa monikulmioissa lyhyt sivu on aina toista lyhyttä sivua vasten ja pitkät sivut ovat toisia pitkiä sivuja vasten.

Jos jokin monikulmion sivuista olisi rakentunut sekä peruskolmion lyhyistä että pitkistä sivuista, vaikuttaa siltä, ettei monikulmiota tällöin saada kuperaksi.

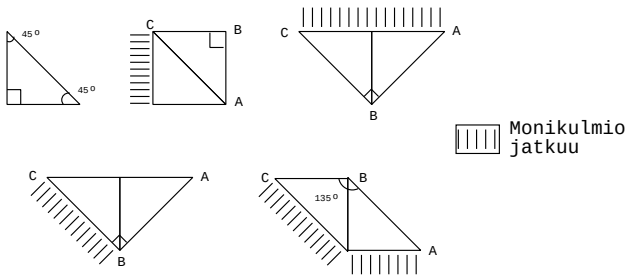
Tämä ei kuitenkaan estä sitä, että monikulmion ulkoreunan osat olisivat eri tavoin rakentuneita, kuten seuraava esimerkki osoittaa.



Kuperia monikulmioita rakennettaessa kolmioiden lyhyet sivut ovat aina toisia lyhyitä sivuja ja pitkät sivut toisia pitkiä sivuja vasten. Lisäksi monikulmion ulkoreunat koostuvat joko lyhyistä tai pitkistä kolmioiden sivuista. Todistus sivuutetaan.

Kulmien lukumäärä

Peruskolmioista rakennetun monikulmion kulma (ku-
vissa kulma ABC) on suora kulma, 90° , jos vie-
rekkäiset sivut ovat samanlaiset (molemmat lyhyistä
tai pitkistä sivuista koostuvia). Jos sivut ovat erilai-
sia, kulma on 45° tai 135° .



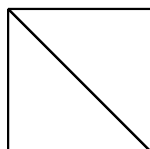
Monikulmion kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180^\circ$, missä
 n on kulmien lukumäärä. Merkitään a :lla monikul-
mion 45° kulmien lukumäärää, b :llä 90° kulmien lu-
kumäärää ja c :llä 135° kulmien lukumäärää. Monikul-
mion kulmien summa on siis $a \cdot 45^\circ + b \cdot 90^\circ + c \cdot 135^\circ =$
 $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Lisäksi $a + b + c = n$. Jälkimmäisestä
yhtälöstä $c = n - (a + b)$; sijoitetaan se ensimmäiseen
yhtälöön:

$$\begin{aligned} 45a + 90b + 135(n - a - b) &= (n - 2) \cdot 180 & | : 45 \\ a + 2b + 3n - 3a - 3b &= 4n - 8 \\ -2a - b &= n - 8 \\ 2a + b &= 8 - n \end{aligned}$$

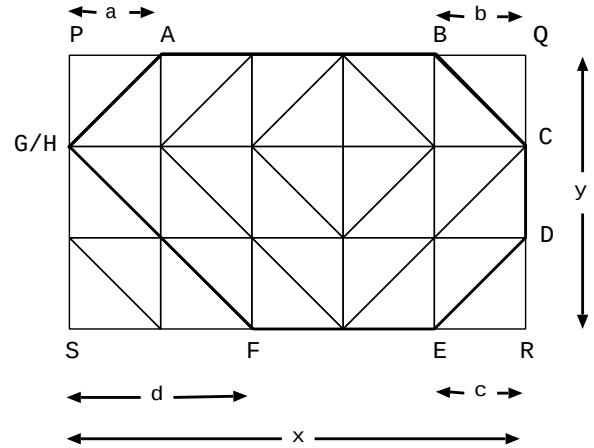
Koska $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $8 - n \geq 0$ ja $n \leq 8$. Monikul-
mion kulmien lukumäärä voi siis olla kolmesta kahdek-
saan. Tätä laskettaessa ei olla tehty minkäänlaisia olet-
tamuksia peruskolmioiden määrästä. Tulos on siis voi-
massa aina, myös silloin kun peruskolmioita on kuusi-
toista. Kuudellatoista peruskolmiolla kulmia ei kuiten-
kaan ole kuin korkeintaan kuusi, tarkempi perustelu
paljastuu seuraavassa luvussa. Olemme ratkaisseet toi-
sen ongelmistamme. Nyt voimme tutkia mahdollisten
kuperien monikulmioiden määrää.

Kuperien monikulmioiden lukumäärä

Kolmion pitkää sivua vasten voidaan laittaa toisen kol-
mion pitkä sivu. Tästä muodostuu neliö, jonka sivut
ovat kolmioiden lyhyiden sivujen pituisia.

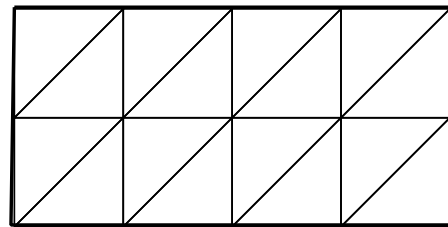


Jokainen peruskolmioista rakennettu kupera monikul-
mio voidaan siis peruskolmioita lisäämällä täydentää
suorakulmioksi. Suorakulmion sivujen pituudet ovat
kolmion lyhyen sivun pituuden moninkertoja. Moni-
kulmioiden sivut, jotka koostuvat kolmioiden lyhyistä
sivuista, sivuavat suorakulmion sivuja.

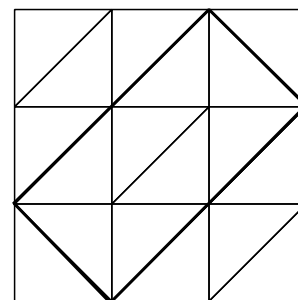


Suorakulmion kulmat: P, Q, R, S. Monikulmion kul-
mat: A, B, C, D, E, F, G, H.

Kaikki sivut kolmion lyhyistä sivuista:



Kaikki sivut kolmion pitkistä sivuista:



Suorakulmion vaakasuora sivu koostuu x :stä neliön si-
vusta ja pystysuora y :stä neliön sivusta. Neliön si-
vun pituus on peruskolmion lyhyen sivun pituinen
(täydentämisen seurauksena). Suorakulmion sivujen
pituudet ovat x ja y kertaa kolmion lyhyen sivun pi-
tuus.

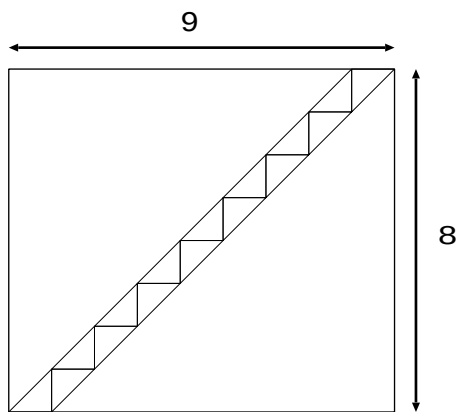
Jokainen neliö koostuu kahdesta peruskolmiosta ja suorakulmio koostuu xy :stä neliöstä. Suorakulmion ala on $2xy$ peruskolmiota.

Kolmiot PAH, BQC, DRE ja GFS ovat suorakulmaisia tasakylkisiä kolmioita, niiden alat ovat a^2 , b^2 , c^2 ja d^2 peruskolmion alaa (a , b , c , ja d ovat peruskolmion lyhyen sivun moninkertoja).

Kun suorakulmion sisälle rakennettu monikulmio koostuu kuudestatoista peruskolmiosta, ja on siis mahdollisesti tangram, on monikulmion ulkopuolelle jäävä alue (suorakulmion sisällä) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2xy - 16$. Lisäksi $a + b \leq x$, $c + d \leq x$, $b + c \leq y$, $a + d \leq y$.

Mahdollisia kuperia monikulmioita on kaksikymmentä kappaletta. Kolmetoista näistä voidaan rakentaa tangram-palikoilla. Se on osoitettavissa taulukomalla kaikki epäyhtälöryhmän ratkaisut ja piirtämällä ratkaisuja vastaavat monikulmiot (katso liitteet 1 & 2). Taulukko ja kuvat osoittavat myös jo aikaisemmin todetun asian, kuudestatoista peruskolmiosta rakennetussa kuperassa monikulmiossa on korkeintaan kuusi kulmaa.

Taulukointi voidaan aloittaa tutkimalla suorakulmioiden sivujen tuloa, xy :tä. Koska suorakulmion ala on $2xy$ peruskolmion alaa ja peruskolmioita on käytettävissä 16, niin $xy = 8$, kun koko suorakulmio on täytetty peruskolmioilla. Tämä on alaraja xy :lle. Kun peruskolmioista rakennetaan suorakulmion lävistäjä, saa xy suurimman arvonsa, $8 \cdot 9 = 72$:



Näiden rajojen löydyttyä tutkitaan jokaista tällä välillä olevaa kokonaislukua. Jaetaan tutkittava luku mahdollisiin x :n ja y :n arvoihin, esimerkiksi kun $xy = 12$, pareja voivat olla 1 ja 12, 2 ja 6 tai 3 ja 4. Sitten tutkitaan mahdollisia a :n, b :n, c :n ja d :n arvoja. Koska $2xy - 16$ on parillinen, myös lausekkeen $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ tulee olla parillinen, esimerkiksi $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ tai $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ eivät siis kelpaa.

Valitun xy :n avulla saadaan lausekkeesta

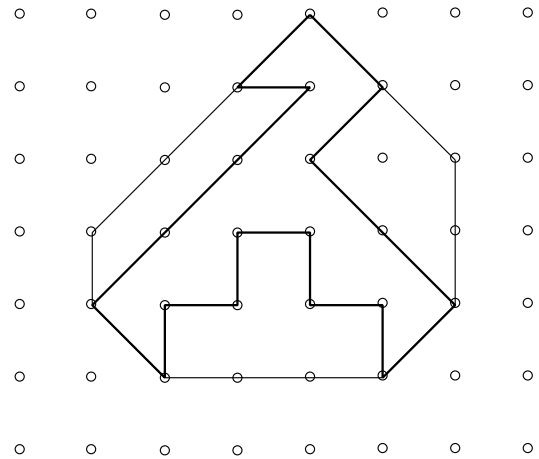
$$2xy - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

a :n, b :n, c :n ja d :n neliöiden summa, josta selvitetään a :n, b :n, c :n ja d :n eri mahdollisuudet. Lopuksi karsitaan ehdoilla $a + b \leq x$, $c + d \leq x$, $b + c \leq y$ ja $a + d \leq y$ mahdottomat neliköt suhteessa x :n ja y :n muodostamiin pareihin.

Lisää ongelmia?

Tangram täydentyy monikulmioksi

Tarkastelemme tangram-kuvioita, joiden kärkipisteet saadaan asetettua säännöllisen ruudukon suorien leikauspisteisiin. Tällaiset tangramit voidaan täydentää kuperiksi monikulmioiksi jo tutuiksi tulleiden peruskolmioiden avulla.



Jos tangramille asetetaan vielä ehdoksi, että se on yksiosainen, on mahdollista miettiä, löytyykö ylärajaa tarvittavien palikoiden lukumäärälle. Uteliaimmille voidaan paljastaa, että tällainen yläraja on olemassa, yksiosaisen tangramin täydentämiseen tarvitaan korkeintaan 56 peruskolmiota (Elffers 1981, s. 174).

Jaolliset tangramit

On myös olemassa tangrameita, jotka on mahdollista jakaa kahteen samanlaiseen osaan, jaollisia tangrameita. Näitä on 65 erilaista (Elffers 1981, s. 175). Pareja voi yhdistellä useilla eri tavoilla yhtenäisiksi jaollisiksi tangrameiksi, jotka on peruskolmioilla mahdollista täydentää kuperiksi monikulmioiksi. Ongelmanratkonnasta pitävälle voidaan esittää aivonystyröitä työllistävä ongelma: mikä on täydentämiseen tarvittavien peruskolmioiden yläraja näiden jaollisten peruskolmioiden kohdalla?

HYVÄSTIT TANGRAMILLE

Kuten tarkkaavainen ja kärsivällinen lukija on huomannut, tangram voi viihdyttää monella eri tavalla. Tangramin maailmaan voi sukeltaa puhtaasti tieteellisesti tutkien. Sen geometrisistä ominaisuuksista löytyy paljon mielenkiintoista. Mutta tämä ei ole ainoa vaihtoehto. Tangramista voi nauttia aivan mainiosti il-

man minkäänlaista matematiikkaa, työkaluna ainoastaan mielikuvitus. Voi etsiä tehtäviä, joita yrittää ratkaista. Voi itse yrittää kehittää kuvioita, eläimiä, ihmisiä toimissaan, rakennuksia. Nauttikaa elämästä tangramin seurassa!

Teemu Mehtiö

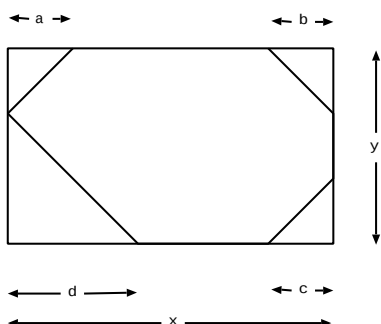
Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio

Lähdeluettelo

Elffers, Joost (1981). *Tangram*, Bokförlaget Prisma, Tukholma.

Liite 1: Mahdolliset kuperat monikulmiot kuudellatoista peruskolmiolla

Número	xy	x	y	$2xy - 16$	$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$	a	b	c	d	Tangram mahdollinen
1	8	8	1	0	0	0	0	0	0	Ei
2	8	4	2	0	0	0	0	0	0	Kyllä
3	9	9	1	2	2	1	1	0	0	Ei
4	9	9	1	2	2	1	0	1	0	Ei
5	9	3	3	2	2	1	1	0	0	Kyllä
6	9	3	3	2	2	1	0	1	0	Kyllä
7	10	5	2	4	4	1	1	1	1	Kyllä
8	10	5	2	4	4	2	0	0	0	Kyllä
9	12	6	2	8	8	2	2	0	0	Kyllä
10	12	6	2	8	8	2	0	2	0	Kyllä
11	12	4	3	8	8	2	2	0	0	Kyllä
12	12	4	3	8	8	2	0	2	0	Kyllä
13	15	5	3	14	14	3	1	2	0	Kyllä
14	15	5	3	14	14	3	2	1	0	Kyllä
15	16	4	4	16	16	2	2	2	2	Kyllä
16	16	4	4	16	16	4	0	0	0	Kyllä
17	24	6	4	32	32	4	0	4	0	Ei
18	25	5	5	34	34	4	1	4	1	Ei
19	25	5	5	34	34	5	0	3	0	Ei
20	72	9	8	128	128	8	0	8	0	Ei

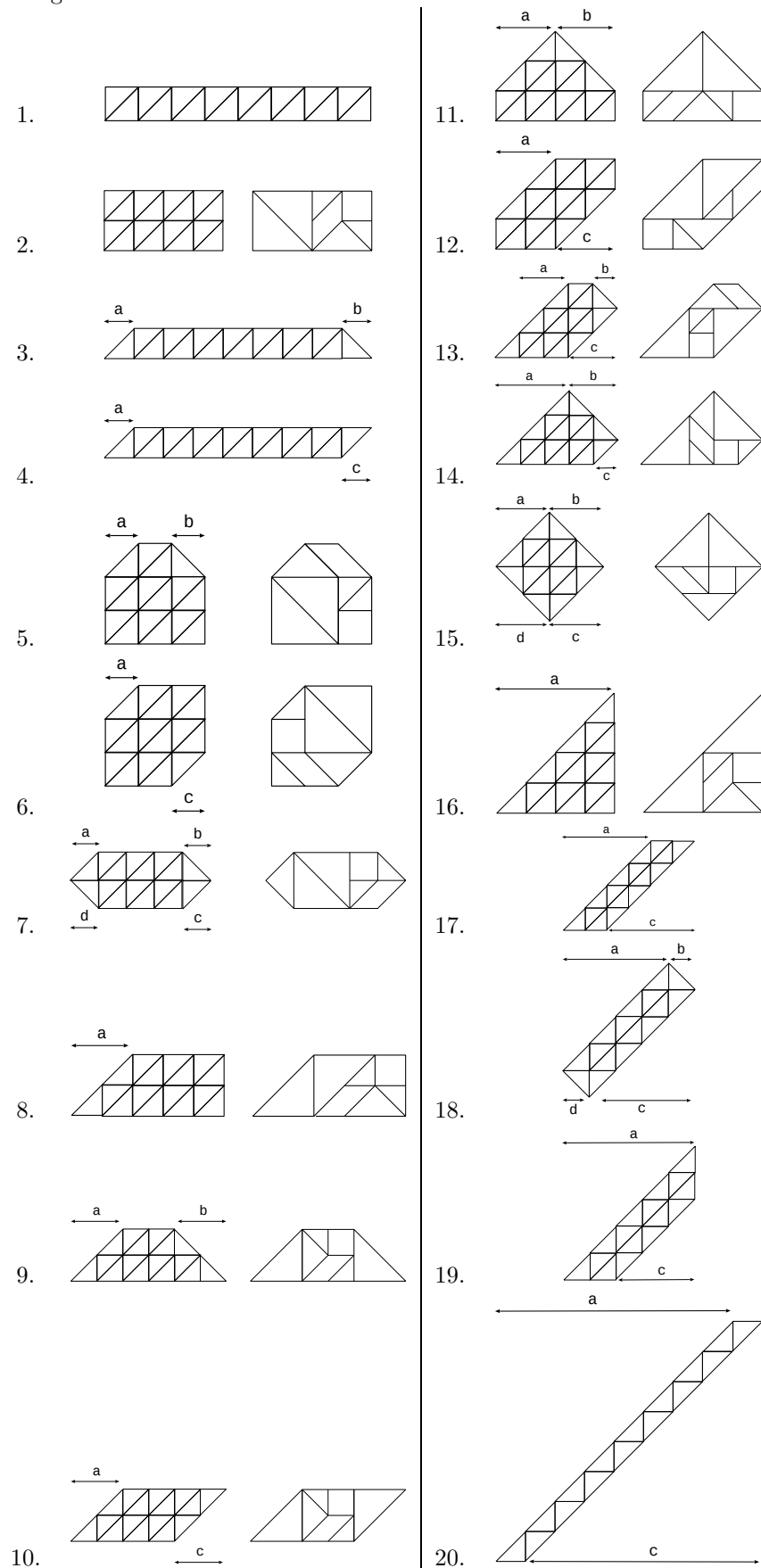


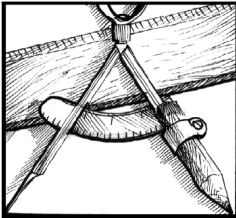
Ehdot:

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad & 2xy - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\
 2^\circ \quad & a + b \leq x \\
 & c + d \leq x \\
 & b + c \leq y \\
 & a + d \leq y
 \end{aligned}$$

Liite 2: Kuperien monikulmioiden kuvat

Tangramit vastaavien monikulmioiden vieressä.





Geometriakulma 11: Miten piirrän oikeaoppisesti avaruuskuvioita?

Kahdeksas² ja kymmenes³ geometriakulma sisältävät kuvia kolmiulotteisen avaruuden käyristä ja pinnoista. Nykyiset tietokoneohjelmistot piirtävät tällaisia helposti, mutta miten kuvat oikein lasketaan ja millaisia niiden on oltava, jotta ne olisivat 'geometrisesti oikein'?

Periaatteessa kyseessä on kaksiulotteisen kuvan muodostaminen kolmiulotteisesta kohteesta. Tällöin tarvitaan jonkinlainen *funktio* eli *kuvaus* kolmiulotteisesta avaruudesta kaksiulotteiseen tasoon, jossa periaatteessa jokaisen avaruuden pisteen kuvaksi asetetaan jokin tason, ns. *kuvatason* piste.

Tämän funktion tulee varmasti olla ainakin jatkuva: Jos kaksi pistettä on avaruudessa lähellä toisiaan, niiden kuvapisteidensäkin tulee olla lähellä toisiaan. Tätähän jatkuvuus varsinaisesti on; lukija älköön heti ajatelko lausekkeita sanan 'jatkuvuus' kuullessaan. Jatkuvuus ei kuitenkaan ole riittävä vaatimus, vaan kuvauksella tulee olla enemmän säännöllisyyttä.

Mikäli muuta ei vaadita kuin jatkuvuus, kyseeseen voi-

sivat tulla vaikkapa sellaiset kuvaukset, joita voi nähdä eräissä hollantilaisen taiteilijan *M. C. Escherin* töissä. Näitä löytyy verkostakin; hyvä lähtökohta on 'The Official M. C. Escher Website'⁴. Erinomaisia esimerkkijä ovat vaikkapa 'Kuvagalleria'⁵ tai 'Parveke'⁶. Escher itse ei kylläkään pitänyt kuviaan matemaattisina, vaan hänen näkemyksensä perustui muunlaiseen ajatteluun.

Escherin kuvat eivät kuitenkaan ole sitä, mitä tavalliselta havainnolliselta kuvalta odotetaan. Luontevampaa onkin käyttää kuvauksena jotakin *projektiota*. Tärkeimmät ja yleisimmin käytetyt vaihtoehdot ovat *yhdensuuntaisprojektio* ja *keskusprojektio*. Edellisellä muodostettuja kuvia sanotaan *aksonometrisiksi* kuviksi, jälkimmäisellä syntyy *persektiivikuvia*.

Yhdensuuntaisprojektio saadaan määritellyksi, kun kiinnitetään jokin avaruuden taso *kuvatasoksi* ja valitaan kiinteä suunta, *projektiosäteiden* suunta. Tämä ei saa olla kuvatason suuntainen. Avaruuspisteen P kuvaksi asetetaan tällöin se piste P' , jossa P :n kautta kulkeva projektiosäde leikkaa kuvatason.

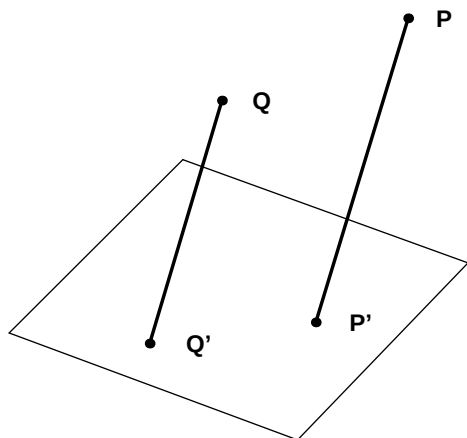
²<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/solmu12/kivela/>

³<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/solmu14/kivela/>

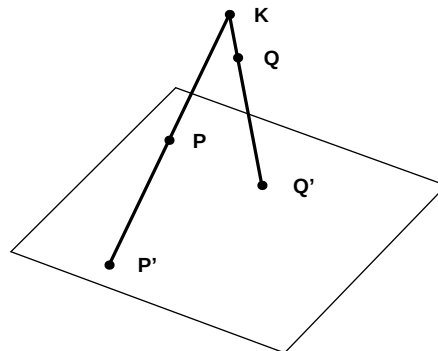
⁴<http://www.mcescher.com/>

⁵http://www.escher.freemove.co.uk/escher/PRINT_GALLERY.jpg

⁶<http://www.nga.gov/collection/gallery/ggescher/ggescher-53940.0.html>



Yhdensuuntaisprojektio



Keskusprojektio

Jos projektiosäteiden suunta on kohtisuorassa kuvatasoa vastaan, sanotaan, että yhdensuuntaisprojektio on *ortogonaaliprojektio*. Jos näin ei ole, kyseessä on *vino projektio*.

Keskusprojektiossa kiinteä suunta korvataan kiinteällä pisteellä, *projektiokeskuksella* K . Tämä ei saa sijaita kuvatasossa. Pisteen P kuva P' on suoran KP – *projektiosäteen* – ja kuvatason leikkauspiste.

Yhdensuuntaisprojektiolla voidaan kuvata – projisoida – koko avaruus kuvatasoon, keskusprojektiolla sen sijaan ei. Jos nimittäin piste P sijaitsee siten, että projektiosäde KP on kuvatason suuntainen, ei kuvapistettä ole. Projisioimatta siis jää projektiokeskuksen kautta kulkeva kuvatason suuntainen taso (jolla on nimi *katoamistaso*, koska sen pisteiden kuvat 'katoavat' kuvatasosta).

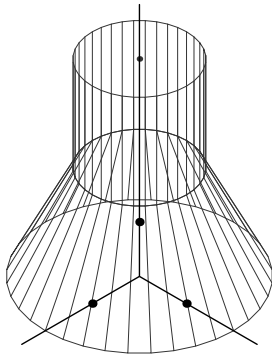
Keskusprojektion luonnollisuus perustuu siihen, että ihmissilmä ja kamera muodostavat kuvia keskusprojektion periaatteella. Projektiokeskus sijaitsee tällöin silmän tai kameran linssin optisessa keskipisteessä. Jostakin kohteesta muodostettu keskusprojektiokuva on siten samanlainen kuin silmän verkkokalvolle kohteesta syntyvä kuva. Aivan tarkoin näin ei ole: Verkkokalvo ei ole taso, vaan hieman kaareva. Keskeisellä tarkan näkemisen alueella se ei tasosta kuitenkaan paljon poikkea.

Jos projektiokeskus etääntyy äärettömän kauaksi kuvatasosta kohteen pysyessä paikallaan, projisioinnissa tarvittavat projektiosäteet muuttuvat yhdensuuntaisiksi, ts. keskusprojektiosta tulee yhdensuuntaisprojektio.

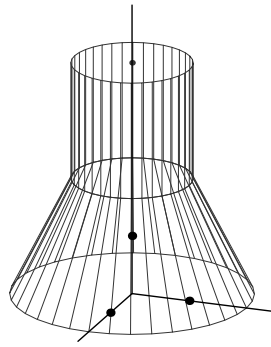
Luontevaa on, että kuvaa katsotaan kohtisuorasti kuvatasoa vastaan. Tällöin myös kuvan synnyttävässä projektiokuvauksessa tulisi projektiosäteiden olla kohtisuorassa kuvatasoa vastaan, ts. yhdensuuntaisprojektion tulisi olla ortogonaalinen ja keskusprojektiossa kuvatasoa vastaan kohtisuoran projektiosäteen, ns. *päänäkösäteen* tulisi kulkea kohteen keskiosan kautta.

Jos näitä vaatimuksia ei oteta huomioon, voivat sekä aksonometriset että perspektiivikuvat näyttää sangen kummallisilta.

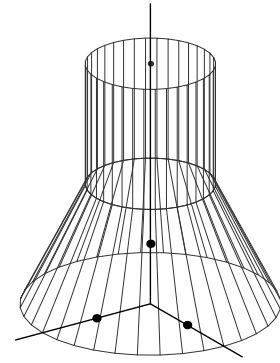
Seuraavat kuvat esittävät kaikki samaa katkaistusta kartiosta ja sen päällä olevasta lieriöstä muodostuvaa kappaletta. Kolme ensimmäistä on ortogonaalisia yhdensuuntaisprojektioita, kolme seuraavaa vinoja yhdensuuntaisprojektioita ja kolme viimeistä keskusprojektioita, ts. perspektiivikuvia. Kuvissa näkyvät myös koordinaattiakselien yksikköpisteet, so. pisteiden $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$ kuvat. Kaikissa kuvissa on piirretty näkyviin sekä näkyvissä olevat viivat että kappaleen taakse näkymättömiin jäävät.



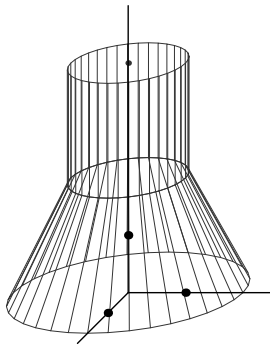
Isometrinen projektio



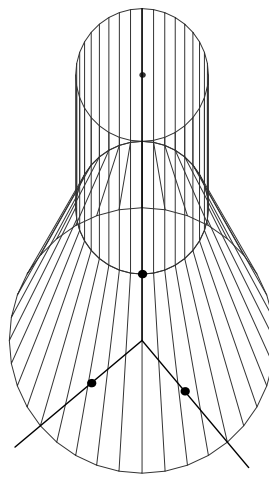
Dimetrinen projektio



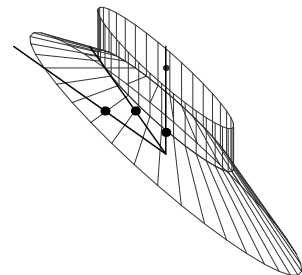
Trimetrinen projektio



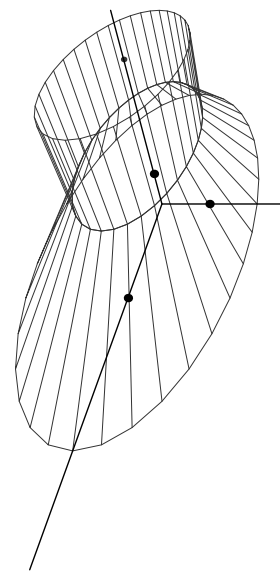
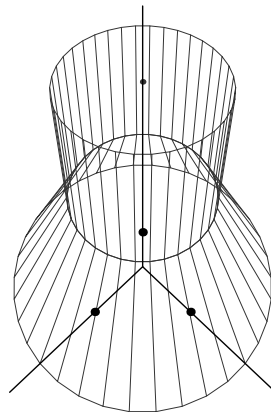
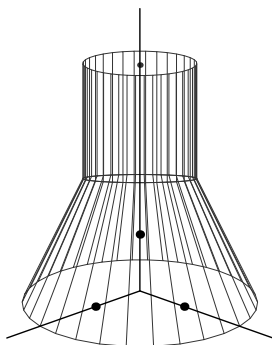
Kavaljeeriprojektio



Sotilasprojektio



Eräs vino projektio



Erilaisia keskusprojekcioita (perspektiivikuvia)

Lukija kiinnittäköön huomiota vinojen projektioiden tietynlaiseen venähtäneisyyteen. Nekin näyttävät luonnollisemmilta, jos niitä katsotaan riittävän vinosti projetiosäteiden suunnasta. Oikeaa suuntaa ei vain ole ihan helppoa päätellä kuvasta!

Kaikki aksonometriset kuvat voidaan mieltää kahdella tavalla: kappaletta katsotaan joko yläviistosta tai alaviistosta. Eri tapauksissa eri viivat ovat kappaleen taakse ja siis näkymättömiin jääviä.

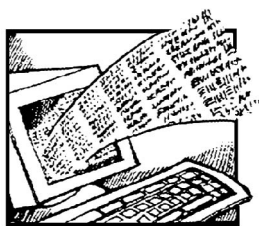
Aksonometrisissa kuvissa kappaleessa olevat yhdensuuntaiset suorat näkyvät yhdensuuntaisina; esimerk-

kinä lieriön sivuviivat. Perspektiivikuvissa ei näin välttämättä ole.

Kartio- ja lieriöosan pohjaympyrät näkyvät kaikissa kuvissa ellipseinä. Aksonometrisissa kuvissa nämä ovat kussakin kuvassa keskenään yhdenmuotoisia, perspektiivikuvissa sen sijaan eivät.

Yhdensuuntais- ja keskusprojektion määritelmien perusteella voidaan johtaa kuvien piirtämisessä perinteisesti käytetyt lainalaisuudet. Näitä tutkiva geometrian osa-alue tunnetaan nimellä *deskriptiivinen geometria*. Lähempi tarkastelu on kuitenkin toisen tarinan aihe.

Simo K. Kivelä



Unkarilaista matematiikkaa englanniksi verkossa

Unkarista Englantiin sovitettua matematiikan alkuopetusmateriaalia (*Sandor Hajdun* oppikirjojen pohjalta) on verkossa ei-kaupalliseen kokeilukäyttöön saatavana osoitteessa www.intermep.org.

Työn on tehnyt prof. *David Burghesin* ryhmä Exete-

ristä yhdessä unkarilaisten kanssa. Tulokset ovat hyviä, mutta niiden saavuttaminen vaatii paljon työtä. Tätä kokeilua seuraa ja mahdollisuuksien mukaan tuo Suomeen prof. *George Malaty* Joensuun yliopistosta, george.malaty@joensuu.fi.

Marjatta Näätänen
matematiikan laitos
Helsingin yliopisto



Vaikutteita opetukseen Unkarista

Virikkeitä matematiikan opetukseen on etsitty Unkarista, sillä Unkari on niukoista resursseistaan huolimatta menestynyt erittäin hyvin kansainvälisissä vertailuissa matematiikan koulutason oppimistulosten suhteen, kun taas Suomen sijoittuminen ei ole kehuttavaa. Tutkijatasolla noin kymmenen miljoonan asukkaan Unkarilla on ehkä maailmanennätys laskettaessa ensi luokan matemaatikkojen lukumäärää suhteutettuna väkilukuun ja yli kymmenen Nobelin palkintoa aloilla, jotka vaativat hyvää matemaattista pohjaa. Kielisukulaisuuden takia unkarilaiset ovat hyvin sydämellisesti valmiita yhteistyöhön suomalaisten kanssa.

Noin kaksi vuotta sitten aloin selvittää mahdollisuutta yhteistyöhön Unkarin kanssa. Tekijänoikeusongelmien selvittyä oli ensimmäinen konkreettinen tulos se, että Helsingin yliopistossa unkarin kielen opiskelijat käänisivät kielitieteilijän ja asian harrastuksesta unkaria Helsingin yliopistossa opiskelleen matemaatikon, tri *Taneli Huuskosen* opastuksella matematiikan tehtäviä, jotka sijoitettiin Solmun yhteyteen suomalaisia koululaisia varten. Käännöskurssia tuki AKO (Ammattikielten ja kääntämisen opintokokonaisuus). Myös Wihurin rahasto on tukenut Unkari-yhteistyötä.

Käytännön koulukokeilu aloitettiin tänä syksynä alasteelta, koska matematiikkaa rakennetaan perustasta alkaen kuin taloa. Paitsi peruskäsitteiden omaksumiseen, alkuopetus vaikuttaa voimakkaasti myös asenteisiin. Suomessa tuntuu olevan – jopa joidenkin päättäjienkin tasolla – käsitys, ettei matematiikkaa enää nykyisenä koneiden aikana tarvita. Ei tiedetä, ettei matematiikka ole koneella korvattavaa mekaanista laskemista, vaan moderni, nopeasti kehittyvä

tiede, joka on tarpeellinen yhä useammilla, myös ns. ”pehmeillä” aloilla, ja korkean teknologian perusta. Koulumatematiikan laiminlyönnillä typistetään kohtalokkaasti myöhempiä opiskelumahdollisuuksia ja suljetaan pois mielenkiintoisia uravalintoja. Teollisuudelle on Suomessa tullut yhä vakavammaksi pullonkaulaksi kyllin hyvin matemaattis-luonnontieteellisesti koulutetun työvoiman saaminen. Esimerkiksi Nokia on jo huomattava työllistäjä Unkarissa tutkimus- ja kehitystyönsä suhteen.

Aloitteestani pidettiin Jyväskylässä ja Polvijärvellä viime elokuussa suomalaisille luokanopettajille kahden viikon pituinen matematiikan alkuopetuksen tehokurssi, opettajina *Márta Oravecz* ja *Ágnes Kivovics* Budapestistä. Tulkin avulla toteutettua kurssia pidettiin äärimmäisen mielenkiintoisena, oppisisällön laajuus ja monipuolisuus yllätti suomalaiset opettajat, jotka kertoivat saaneensa paljon ahaa-elämyksiä. Opetushallitus ja Kauko Sorjosen säätiö tekivät kurssit taloudellisesti mahdollisiksi. Jyväskylässä ovat tehneet valtaosan työn prof. *Eira Korpinen* ja tri *Tuula Matikainen*, molemmat kasvatustieteilijöitä. Tutkiva opettaja -verkoston puitteissa aloitetaan tutkimusta unkarilaisesta menetelmästä. Ensi kesänä on tarkoitus jatkaa. Toiminta saattaa levitä muiden toimesta myös pääkaupunkiseudulle.

Millaista sitten on suhtautuminen matematiikkaan Unkarissa? Suomalainen saanee oikean mielikuvan asiasta oman, erinomaisia tuloksia tuottavan musiikkikasvatuksemme avulla. Unkarissa tiedetään, ettei matematiikkaan ole ”kuninkaan tietä”. Pitkät perinteet, työ ja matemaattis-luonnontieteellisten alojen arvostus

tus ovat nostaneet Unkarin matematiikan menestykseen. Jo sata vuotta sitten aloitettiin matematiikkalehti KöMaL, joka tarjosi matemaattisia ongelmia ja lisämateriaalia toisen asteen kouluille, sekä matematiikkakilpailuita. Nämä yhdessä mahdollistivat matemaattisten kykyjen löytämisen ja kehittämisen tasapuolisesti koko maassa.

Miten voisi kuvailla lyhyesti unkarilaista matematiikan alkuopetusta Varga-tyylillä? Yleisenä huomiona voisi sanoa, että se on hyvin monipuolisesti lasta kehittävää ja aktivoivaa. Äidinkielen harjoitus on hyvin keskeistä, lapset kertovat paljon, miten he ajattelevat ja päättävät sekä perustelevat vastauksiaan. Äidinkielen käyttö ja selkeä päättely kulkevat käsi kädessä. Myöhemmin vastaan tulevia matematiikan käsitteitä (esim. yhtälö, epäyhtälö, lukusuora, jaollisuus) pohjustetaan alkuopetuksessa konkreettisilla apuvälineillä ja hauskoilla tehtävillä. Näin käsitteet saavat tuekseen konkreettisen mielikuvan ja ehtivät ”kypsyä”. Pyrkimys on kehittää pienten oppilaiden luontaista uteliaisuutta ja tiedonhalua.

Lapsen omakohtaiset kokemukset ovat ensiarvoisen tärkeitä. Menetelmä vaatii paljon opettajalta, koska tehtävien pohjalta taitava opettaja pystyy ohjaamaan matematiikan rakenteen ja käsitteiden omaksumista. Oppilaiden edetessä tehtävät tulevat abstraktimmiksi, mutta alkuvaiheessa käytetään oppilaan omaa kokemuspiiriä, aisteja ja käsiä apuna. Opettajan tulee osata erottaa oppilaiden oikeansuuntaiset mutta epätarkat ideat vääristä. Hänen on oivallettava nopeasti, onko etenemissuunta oikea ja pystyttävä innostamaan eritasoisia oppilaita. Pystyäkseen kaikkeen tähän on opettajalla oltava vahva pohjakoulutus ja hänen on hallittava paljon laajemmat matematiikan maisemat kuin mihin hänen oppilaansa vielä pystyvät.

Matematiikan opetus etenee hyväksi havaitussa järjestyksessä, pohjana on omakohtaisen kokemuksen hankkiminen, sitten abstraktion vaiheittainen eteneminen. Apuvälineitä käytetään paljon, niillä pohjustetaan matemaattisia ideoita. Ikään liittyvät erityispiirteet huomioidaan, virheet ovat tärkeä ja luonnollinen osa oppimisprosessia. Työskentelyssä on vahvasti mukana koko luokan yhteishenki ja yhteinen työ. Opettaja seuraa tarkasti jokaisen oppilaan työtä. Esimerkiksi päässälaskun tuloksen tarkistus tapahtuu nopeasti näyttämällä lukukortteja, joista opettaja voi yhdellä silmäyksellä nähdä tilanteen.

Lukukäsitettä pohjustetaan huolella pienillä luvuilla. Tällöin saadaan myös esille yleisesti päteviä lukujen ominaisuuksia, esim. yhteenlaskun vaihdannaisuus. Laskutoimitusten ymmärtämistä pohjustetaan

konkreettisten toimintojen ja pienten tarinoiden avulla, nappuloilla pelaamisella, kuvien esitetyillä kertomuksilla, vasta sitten on vuorossa lausekkeiden kirjoittaminen numeroin. Konkreettisia tehtäviä ja yksinkertaisia pelejä käytetään, samoin kuvasta laskemista, havainnollistamista sekä sanallisia tehtäviä ja lukujonojen jatkamista.

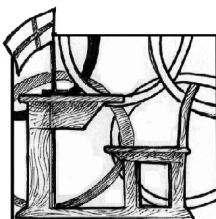
Geometriasta tehdään 2-ulotteisia ja 3-ulotteisia rakennelmia, tutustutaan monikulmioihin, tehdään peilileikkejä. Matemaattisia aiheita kuten joukot ja logiikka, funktiot, todennäköisyys, kombinatoriikka käytetään opetuksessa. Nopeusharjoituksia, lukujen luettelemista peräkkäin, takaperin, yhden, kahden tai useamman välein ja erilaisia ryhmittelyharjoituksia käytetään. Yhtäsuurten lukujen summa, luvun puolikkaan vähentäminen, yhdellä suuremman ja yhdellä pienemmän luvun lisääminen ja vähentäminen, yhteen- ja vähennyslaskun yhteys, usean yhteenlaskettavan järjestyksen vaihtaminen tulevat myös ensimmäisenä vuonna opetettavaksi Unkarissa.

Yhteenvetona voisi sanoa, että Varga-menetelmässä tärkeää on ajattelutapa ja oppilaan aktivointi. Hän suorittaa itse tehtävää, hänen päähänsä jää kuva, johon palataan yrittäen seuraavassa vaiheessa rakentaa alun konkreettiselle pohjalle abstraktimpaa ja täsmällisempää käsitettä. Kyseessä on hyvin suunniteltu, kehitetty ja tuloksiltaan hyväksi havaittu menetelmä. Neljän ensimmäisen vuoden (Unkarin ala-aste) Nemenyi-Oravecz-oppikirjoissa on Vargan lennokkaat ideat sovitettu käytännön tasolle. Suomen ongelmista unkarilaiset olivat sitä mieltä, ettei matematiikkaa opita kirjoittamalla lukuja tunnista toiseen. Oppikirjoista he totesivat kohteliaasti, että ne ovat ”kauniita ja värikkäitä”. Sisältö on kuitenkin vain luvuilla toimintaa, jolloin myös pyritään liian pian suuriin lukuihin ilman, että ymmärretään lukujen ominaisuuksia.

Ongelmanratkaisua käytetään Unkarissa opetusmenetelmänä, mutta se on vain yksi osa hyvin hallittua menetelmää, jolla yritetään kehittää oppilaan kykyjä tasapainoisesti. Unkarilaiset opettajankouluttajat kertoivat, etteivät he halua päätyä tilanteeseen, jossa kulutetaan paljon aikaa eikä ole varmuutta siitä, kuka keksii, milloin ja mitä.

Jyväskylän ja Polvijärven kurssien luentomuistiinpanot julkaistaan matematiikkalehti Solmussa kaikkien käyttöön sitä mukaa, kun työtä ennätetään tehdä.

Unkarin matematiikanopetuksessa ei tietenkään kaikki ole erinomaista eikä Suomeen sovellettavissa, mutta uskon, että paljon hyvää voidaan saada aikaan yhteistyöllä ja oikeilla valinnoilla.



Matematiikkaolympialaiset Koreassa

Koululaisten 41. kansainväliset matematiikkaolympialaiset, IMO 2000, pidettiin Korean *Taejonissa*, noin 200 km etelään Soulistä, 13.–25. heinäkuuta 2000. Tavan mukaan kolmena ensimmäisenä päivänä paikalla oli vain tehtävät laativa joukkueiden johtajista koostuva kansainvälinen tuomaristo. Joukkueet saapuivat 16. heinäkuuta ja varsinaiset kilpailut pidettiin 19. ja 20. heinäkuuta. Kilpailupaikkana samoin kuin kilpailijoiden majapaikkana oli KAISTin, Korea Advanced Institute of Science and Technologyn kampus Taejonin liepeillä.

Joukkueiden ja kilpailijoiden määrä oli jälleen ennätyksellinen, vaikka IMO:n kasvuvauhti tuntuukin hidastuneen. Joukkueensa oli lähettänyt 82 maata (joukossa oli kyllä ei varsinaisesti itsenäisiä alueita kuten Hongkong, Macao ja Puerto Rico). Kilpailijoita oli 461. Kilpailun kaikin puolin onnistuneista järjestelyistä vastasi Korean Tiede- ja tekniikkaministeriön ja Korean Opetusministeriön tukemana Korean Matemaattinen yhdistys; järjestelytoimikunnan puheenjohtajana päävastuuta kantoi professori *Sung Je Cho*.

Tuomariston tehtävänlaadintakokoukset pidettiin Chonanissa, Soulin ja Taejonin puolivälissä. Kokouspaikkana oli Korean postilaitoksen moderni koulutuskeskus, joka sopi tarkoitukseen erinomaisesti. Tehtävähdotuksia oli eri osallistujamaista saatu kaikkiaan 142, ja näistä 18-henkinen, puolalaisella *Marcin Kuzmalla* ja bulgarialaisella *Svetoslav Savchevilla* vahvistettu korealainen esivalintatoimikunta oli poiminut 27 ehdokasta tuomariston käsittelyyn. Perusteellisen pohdinnan jälkeen taejonilaisen professori *Gyo*

Taek Jinin johtama tuomaristo päätyi valitsemaan sarjan, jonka ensimmäinen ja viimeinen tehtävä edustivat klassista tasogeometriaa, viides oli puhdaspiirteinen lukuteorian tehtävä, johon oli lähes perinteeksi muodostuneen tavan mukaan myös upotettu kilpailun vuosiluku, toinen etukäteen liiankin helpoksi arvioitu epäyhtälö, neljäs kombinatorista päättelyä edellyttänyt ja kolmas lähinnä matemaattiseksi analyysiksi luokiteltava. Valinnan jälkeen ilmeni, että tehtävistä peräti kolme (1, 5 ja 6) oli Venäjän ehdottamia, muut Yhdysvalloista (2), Valko-Venäjältä (3) ja Unkarista (4). Kirjoittaja ei muista, että näin suuri osuus tehtävistä olisi koskaan ollut yhdestä maasta lähtöisin.

Kilpailujen avajaiset pidettiin 18.7. Taejonissa. Avajaisia kunniotti läsnäolollaan ja puheellaan kilpailujen suojelija, Korean pääministeri *Han Dong Lee*, joka saapui avajaispaikalle helikopterillaan. Kilpailut pidettiin 19.7. ja 20.7., ja tulokset saatiin valmiiksi Kansallisessa Chugnam-yliopistossa pidettyihin päättäjäisiin 24.7. Kilpailijat tekivät retkiä Korean Folk Village -museoon Soulin lähelle ja Kyungjuun Korean itärannikolle. Alkuperäisestä ohjelmasta poiketen kilpailijat kävivät myös Soulessa Korean presidentin erikoisvieraina. KAISTin kampuksella pidetty loppuillallinen huipentui loistavaan ilotulitukseen. Tuomariston työ ei juuri antanut mahdollisuuksia turismiin.

Kilpailun tehtävät osoittautuivat vaikeiksi. Maksimipisteet 42 annettiin kuitenkin neljälle kilpailijalle, Kiinan *Zhiwei Yunille*, Valkovenäjän *Alexandr Usnichille* ja Venäjän *Aleksei Poiarkoville* ja *Alexander Gaifoulinelle*. Kultamitaliin oikeuttavan parhaan 1/12-osan muodostivat ainakin 30 pistettä saaneet, seuraava kuu-

dennes eli hopemitalilla palkittavien osuus muodostui ainakin 21 pistettä saaneista, ja jo 11 pisteen suoritus merkitsi parempaan puolikkaaseen eli pronssimitalikategoriaan pääsyä. Viime vuonna vastaavat pisterajat olivat 28, 19 ja 12.

Pistekeskiarvoilla mitaten helpoin tehtävä oli numero 1 (keskiarvo 4,1), sitten 4 (3,2), 2 (2,8), 5 (1,6), 6 (1,0) ja 3 (0,7). Kilpailun menestyjien, kultamitalin saajien, vastaava järjestys on 1 (7, kaikilla siis täydet pisteet!), 5 (6,6), 2 (6,5), 4 (6,2), 6 (4,6) ja 3 (3,5). Luvuista voi päätellä valmennuksen merkitystä: helppo geometrian tehtävä 1 on harjoitelleelle rutiinia, samoin melko standardi lukuteoreettinen tehtävä ja epäyhtälö, mutta olennaisesti vain oivallusta vaatinut tehtävä 4 on menestyjien listalla sijoitukseltaan alempana kuin kaikilla osallistujilla.

Maiden paremmuutta ei matematiikkaolympialaisissa virallisesti mitata, epävirallisesti sitäkin innokkaammin. Parhaan yhteispistemäärän kokosi Kiina, seuraavina Venäjä, Yhdysvallat, Korea, Vietnam, Bulgaria, Valko-Venäjä, Taiwan, Unkari ja Iran.

Suomen joukkue oli valittu perinteisin kuviin. Valinnasta ja valmennuksesta vastasi Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaoston työryhmä *Matti Lehtinen, Kerkko Luosto, Jari Lappalainen* ja *Jouni Seppänen*. Toimintaa Päivölässä koordinoivat lisäksi *Kullervo Nieminen* ja *Merikki Lappi*. MAOLin lukio-kilpailun kaksi kierrosta ja 14. Pohjoismainen matematiikkakilpailu huhtikuussa yhdessä valmennusvastausten ja Päivölän Opiston matematiikkaviikonloppujen kanssa olivat pohjana, kun toukokuulle valinta- ja valmennusleirille Päivölän Opistoon Valkeakoskelle koottiin kymmenkunta osallistujakandidaattia. Neljä valintakoetta muun informaation lisäksi johtivat lopul-

ta yksiselitteiseen valintaan: Suomea edustivat *Anne-Maria Ernvall* Turusta, *Mikko Harju* Kirkkonummelta, *Riikka Korte* Helsingistä, *Teemu Murtola* Joensuusta (Päivölästä), *Jarkko Pyy* Halikosta ja *Johanna Tikanoja* Pyhäjärveltä (Päivölästä). Joukkueen johtajana ja samalla kansainvälisen tuomariston jäsenenä toimi *Matti Lehtinen*, ja joukkueen varajohtajana oli *Jari Lappalainen*.

Joukkueen suoritus oli varsin tyydyttävä. Edellisen vuoden yksi hopeamitali vaihtui nyt kolmeksi pronssimitaliksi, jotka saivat *Riikka Korte*, *Mikko Harju* ja *Anne-Maria Ernvall*. *Teemu Murtola* palkittiin lisäksi kunniamaininnalla. Kyseessä oli ensimmäinen kerta Suomen matematiikkaolympialaisosallistumisen historiassa, kun tyttöoppilas sai mitalin. Joukkueen yhteispistemäärä 52 oikeutti sijaan 52. Todettakoon, että Ruotsin sijoitus oli 31., Norjan 56., Viron 57., Islannin 60. ja Tanskan 61.

Suomalaisten pahimmaksi kompastuskiveksi muodostui taas kerran geometria. Vaikeampi tehtävä 6 tuotti Suomelle 2 pistettä, helpompi ensimmäinen tehtävä 11. Eniten pisteitä Suomi sai kombinatorisesta tehtävästä 4. On entistä ilmeisempää, että geometrian kunnollisen koulupohjan puuttuessa ainoa tie matematiikkaolympialaisten tuloslistan alkupäähän voisi kulkea todella intensiivisen ja pitkäkestoisen geometrian tehovalmennuksen kautta. Myös lukuteorian rutiini tulisi luoda harjoituksella. Vain päättelyä edellyttävissä tehtävissä ero kärkeen ei ole dramaattinen.

Seuraavat matematiikkaolympialaiset pidetään Washingtonissa Yhdysvalloissa 1.–14. heinäkuuta 2001. Sen jälkeen matematiikkaolympialaiset järjestää ennakotiedoista poiketen Iso-Britannia. Japani on vuorossa vuonna 2003 ja Kreikka vuonna 2004.

Matti Lehtinen

41. kansainväliset matematiikkaolympialaiset

Joukkueiden yhteispisteet

Sulkeissa oleva luku maan nimen jälkeen osoittaa, että joukkueessa oli vähemmän kuin 6 kilpailijaa.

1. Kiina	218	10. Iran	155	Slovakia	111
2. Venäjä	215	11. Israel	139	20. Armenia	108
3. Yhdysvallat	184	Romania	139	Saksa	108
4. Korea	172	13. Ukraina	135	22. Iso-Britannia	96
5. Bulgaria	169	14. Intia	132	23. Jugoslavia	93
Vietnam	169	15. Japani	125	24. Kazakstan	91
7. Valko-Venäjä	165	16. Australia	122	25. Argentiina	88
8. Taiwan	164	17. Kanada	112	26. Moldova (5)	84
9. Unkari	156	18. Turkki	111	27. Etelä-Afrikka	81

28. Hongkong	80	Latvia	60	Peru (4)	32
29. Bosnia	78	48. Ranska	58	Malesia (3)	32
Thaimaa	78	Brasilia	58	68. Espanja	29
31. Ruotsi	77	50. Italia	57	69. Irlanti	28
32. Puola	75	51. Indonesia	54	70. Uruguay (3)	23
Meksiko	75	52. Suomi	52	Filippiinit (4)	23
34. Kroatia	73	53. Belgia	51	72. Sri Lanka (3)	21
Slovenia	73	Luxemburg (4)	51	Portugali	21
36. Georgia	72	55. Marokko	48	74. Ecuador	19
37. Singapore	71	56. Kreikka	46	75. Albania	17
38. Uzbekistan	70	57. Norja	45	76. Kirgisia (4)	16
39. Itävalta	68	58. Viro	42	Macao	16
40. Sveitsi (4)	67	59. Trinidad	40	78. Kuwait (4)	12
Mongolia	67	60. Islanti	37	79. Guatemala	11
42. Tšekinmaa	65	61. Tanska	36	Venezuela (2)	11
43. Makedonia	63	62. Uusi-Seelanti	34	81. Brunei (2)	8
44. Kolumbia	61	Liettua	34	Puerto Rico	8
Kuuba	61	64. Azerbaidžan	32		
46. Hollanti	60	Kypros	32		

41. kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävät

1. Ympyrät Γ_1 ja Γ_2 leikkaavat toisensa pisteissä M ja N . Olkoon l se Γ_1 :n ja Γ_2 :n yhteinen tangentti, joka on lähempänä M :ää kuin N :ää. Suora l sivuaa Γ_1 :tä pisteessä A ja Γ_2 :ta pisteessä B . Pisteen M kautta kulkeva l :n suuntainen suora leikkaa ympyrän Γ_1 myös pisteessä C ja ympyrän Γ_2 myös pisteessä D . Suorat CA ja DB leikkaavat pisteessä E ; suorat AN ja CD leikkaavat pisteessä P ; suorat BN ja CD leikkaavat pisteessä Q . Osoita, että $EP = EQ$.

2. Olkoot a , b ja c positiivisia reaali-lukuja ja olkoon $abc = 1$. Todista, että

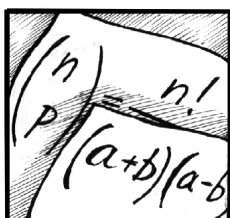
$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

3. Olkoon $n \geq 2$ positiivinen kokonaisluku. Vaakasuuralla suoralla on n kirppua, jotka eivät kaikki ole samassa pisteessä. Olkoon λ positiivinen reaali-luku. Määritellään *siirtymä* seuraavasti: valitaan jotkin kaksi kirppua, jotka ovat pisteissä A ja B , A B :n vasemmalla puolella; annetaan A :ssa olevan kirpun hypätä siihen B :n oikealla puolella olevaan suoran pisteeseen C , jolle $BC/AB = \lambda$. Määritä kaikki sellaiset λ :n arvot, joilla kaikki kirput voivat siirtyä mistä hyvänsä alkuasemasta minkä hyvänsä pisteen M oikealle puolelle äärellisen monen siirtymän avulla.

4. Taikurilla on sata korttia, jotka on numeroitu 1:stä 100:aan. Taikuri sijoittaa kortit kolmeen rasiaan, punaiseen, valkoiseen ja siniseen, niin että joka rasiassa on ainakin yksi kortti. Eräs katsojista valitsee rasioista kaksi, ottaa kummastakin rasiasta yhden kortin ja kertoo valituissa korteissa olevien numeroiden summan. Kuultuaan summan taikuri ilmoittaa, mistä rasiasta ei ole otettu kortteja. Monellako tavalla kortit voidaan sijoittaa rasioihin niin, että kuvattu temppu aina onnistuu? (Kahta sijoittelua pidetään eri sijoitteluina, jos niissä ainakin yksi kortti on eri rasiassa.)

5. Selvitä, onko olemassa positiivista kokonaislukua n , jolle n on jaollinen tasan 2000:lla eri alkuluvulla ja $2^n + 1$ on jaollinen n :llä.

6. Olkoot AH_1 , BH_2 ja CH_3 teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanat. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa sivuja BC , CA ja AB pisteissä T_1 , T_2 ja T_3 , tässä järjestyksessä. Olkoot suorat l_1 , l_2 ja l_3 suorien H_2H_3 , H_3H_1 ja H_1H_2 peilikuvat suorien T_2T_3 , T_3T_1 ja T_1T_2 yli suoritetuissa peilauksissa (tässä järjestyksessä). Todista, että l_1 , l_2 ja l_3 määrittävät kolmion, jonka kärjet ovat kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän kehällä.



Tehtäviä

1. Osoita, että

a) $\underbrace{1\dots 1}_n \underbrace{2\dots 2}_n - \underbrace{3\dots 3}_n$ ja

b) $\underbrace{4\dots 4}_n \underbrace{5\dots 5}_n - \underbrace{9\dots 9}_n$

ovat neliöitä (jonkin positiivisen kokonaisluvun toisia potensseja).

2. Osoita, että

a) $\underbrace{1\dots 1}_n \cdot \underbrace{1\dots 1}_n \underbrace{2\dots 2}_n \underbrace{1\dots 1}_n,$

b) $\underbrace{1\dots 1}_n \cdot \underbrace{4\dots 4}_n \underbrace{1\dots 1}_n$ ja

c) $\underbrace{1\dots 1}_n \cdot \underbrace{9\dots 9}_n \underbrace{6\dots 6}_n \underbrace{1\dots 1}_n$

ovat neliöitä.

3. Luku $a0bb$, missä $a, b = 0, 1, 2, \dots, 9$ ja $a \neq 0$, on jaollinen 12:lla ja jos sen jakaa luvulla 11, on jakojäännös 10. Ratkaise $a0bb$.

4. Sievennä

$$111 \cdot \underbrace{(1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)}_2 \cdot \underbrace{(1 \ 0 \ 0 \ 1)}_2 \cdot \underbrace{(1 \ 0 \dots \ 0 \ 1 \ 0 \dots \ 0 \ 1)}_8 \cdot \underbrace{(1 \ 0 \dots \ 0 \ 1 \ 0 \dots \ 0 \ 1)}_8 \cdot \dots \cdot \underbrace{(1 \ 0 \dots \ 0 \ 1 \ 0 \dots \ 0 \ 1)}_{3^n-1} \cdot \underbrace{(1 \ 0 \dots \ 0 \ 1 \ 0 \dots \ 0 \ 1)}_{3^n-1}.$$

5. Ratkaise kaikki kaksinumeroiset luvut, jotka ovat jaollisia numeroidensa neliöiden summalla. (Esimerkki: 10 on jaollinen luvulla $1^2 + 0^2 = 1$.)

Vihjeeksi seuraaviin tehtäviin: Kummassakin käytetään kongruensseja sekä Fermat'n ja Eulerin tulosta, jonka mukaan

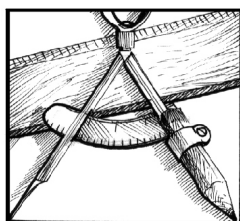
$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

aina kun lukujen a ja n suurin yhteinen tekijä on 1. Tässä φ on Eulerin φ -funktio, jonka arvo $\varphi(n)$ on niiden lukujen $m \in \{1, \dots, n\}$ lukumäärä, joille $\text{syt}(n, m) = 1$. Entisessä Neuvostoliitossa tämäntyyppisiä tehtäviä ratkaistiin Koululaisten olympialaisissa.

6. Osoita, että luku $\underbrace{2000\dots 0}_{1997}1998$ on jaollinen luvulla 1999.

7. Ratkaise luvun $4^{5^{45}}$ kolme viimeistä numeroa.

Tehtävien ratkaisut ovat sivuilla 24–25.



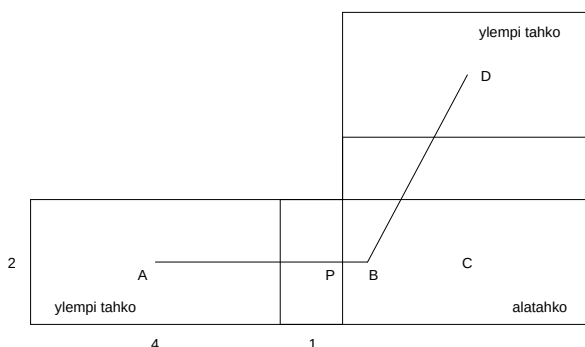
Ratkaisut geometrisiin tehtäviin

Solmun numerossa 3/1999–2000⁷ esitin kaksi geometrista tehtävää; seuraavassa niiden ratkaisut. Koska geometrian sanallinen selittäminen vie tilaa, jää perustelujen tarkempi analysointi lukijan tehtäväksi.

Molempien ongelmien käsittely perustuu siihen havaintoon, että leikkaamalla pinnat sopivia särmiä pitkin auki saadaan kappale, joka voidaan taivuttaa tasoon ilman, että laatikon pintaa pitkin mitatut etäisyydet vääristyvät.

Oletetaan ensimmäisen tehtävät kohdalla, että pesä si-

jaitsee ylätahkolla. Geometrisesti on silloin selvää, että suurin etäisyys pesälle saadaan joissakin alatahkon pisteissä. Kyseessä ei kuitenkaan ole alatahkon keskipiste! Jos tilannetta katsotaan alatahkolta käsin ja taivutetaan sopivasti aukileikattu laatikko tasoon, saadaan alla olevan kuvan mukainen tilanne; siinä ylätahkosta on otettu kaksi identtistä kopiota (vasemmanpuoleinen ja ylin suorakulmio), sillä alatahkolta päästään ylätahkon keskipisteeseen neljään eri suuntaan kulke-
malla; symmetrian vuoksi riittää tarkastella vain kahta suuntaa.



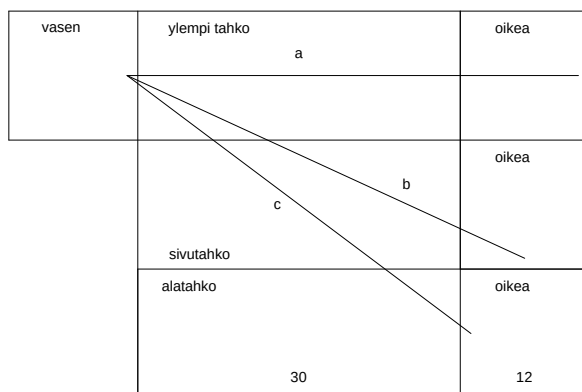
⁷<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/solmu13/alestalo/>

Etäisyyksiä voidaan nyt tutkia tavalliseen tapaan tassossa. Symmetrian perusteella havaitaan, että toinen etsityistä pisteistä (kuviassa B) sijaitsee janalla $\overline{PC}$, ja etäisyyksien $a = |\overline{AB}|$ sekä $b = |\overline{BD}|$ täytyy olla samat. Jos merkitään $x = |\overline{BC}|$, niin $a = 5 - x$ ja Pythagoraan lauseen nojalla (suorakulmaisesta kolmiosta BCD) on $b^2 = x^2 + 3^2 = x^2 + 9$. Merkitsemällä $a = b$ ja korottamalla tämä yhtälö puolittain toiseen potenssiin, saadaan ratkaistua $x = 8/5 = 1,6$. Löysimme siis kysytyn pisteen; toinen samanlainen on pisteen B peilikuva pisteen C suhteen.

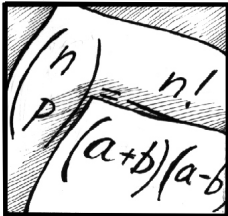
Toista ongelmaa voidaan käsitellä samaan tapaan, mutta tällä kertaa olennaisesti erilaisia kulkusuuntia on kolme. Ratkaisun kannalta tärkeä havainto

on se, että eri reittejä kuljettaessa oikealla tahkolla oleva maali sijaitseen tasoon levitettyinä eri asemissa. Yläkautta kuljettaessa saadaan matkan pituudeksi $a = 1 + 30 + 11 = 42$, joka on siis hämähäkin reitti menomatkalla. Kulkemalla ylä- ja sivutahkon kautta saadaan etäisyydeksi Pythagoraan lauseen avulla alalla olevasta kuviosta $b = \sqrt{(1 + 30 + 6)^2 + (6 + 11)^2} = \sqrt{1658} \approx 40,72$. Jos vihdoinkin kuljetaan sekä ylä-, sivu- että alatahkon kautta, saadaan matkan pituudeksi $c = \sqrt{(1 + 30 + 1)^2 + (6 + 12 + 6)^2} = 40$. Alin reitti vastaa siis hämähäkin paluumatkaa, ja se on lyhyin mahdollinen.

Lopuksi kannattaa vielä yrittää havainnollistaa eri vaihtoehdot alkuperäisen särmiön pinnalla.



Pekka Alestalo



Tehtävien ratkaisut

1. Merkitään $\underbrace{aa\dots a}_k \underbrace{bb\dots b}_k - \underbrace{cc\dots c}_k$, missä a , b ja c ovat kokonaislukuja. Tällöin

$$\begin{aligned} \underbrace{aa\dots a}_k \underbrace{bb\dots b}_k &= a \cdot \frac{10^k - 1}{9} \cdot 10^k + b \frac{10^k - 1}{9} = (a \cdot 10^k + b) \frac{10^k - 1}{9} = \dots = \frac{a \cdot 10^k + b}{3} \cdot \underbrace{33\dots 3}_k \\ &= (a \cdot \underbrace{33\dots 3}_k + \frac{a+b}{3}) \cdot \underbrace{33\dots 3}_k = a \cdot (33\dots 3)^2 + (a+b) \cdot \underbrace{11\dots 1}_k, \end{aligned}$$

eli jos $a = 1$, $a = 4$ tai $a = 9$ ja $c = a + b \leq 9$, niin $\underbrace{aa\dots a}_k \underbrace{bb\dots b}_k - \underbrace{cc\dots c}_k$ on neliö.

Esimerkiksi $\underbrace{4\dots 4}_k \underbrace{3\dots 3}_k - \underbrace{7\dots 7}_k$ on neliö.

2. a) $\underbrace{1\dots 1}_n \underbrace{2\dots 2}_n \underbrace{1\dots 1}_n \cdot \underbrace{1\dots 1}_n = \underbrace{1\dots 1}_n^2 \cdot (10^n + 1)^2$,
 b) $\underbrace{1\dots 1}_n \cdot \underbrace{4\dots 4}_n \underbrace{1\dots 1}_n = \underbrace{1\dots 1}_n^2 \cdot (2 \cdot 10^n + 1)^2$, ja
 c) $\underbrace{1\dots 1}_n \cdot \underbrace{9\dots 9}_n \underbrace{6\dots 6}_n \underbrace{1\dots 1}_n = \underbrace{1\dots 1}_n^2 \cdot (3 \cdot 10^n + 1)^2$.

3. Luku on 4:llä jaollinen, joten ainoat mahdollisuudet ovat $b = 0$, 4 tai 8. Jos $b = 0$, niin 3:lla jaettaessa saadaan $\frac{a000}{3}$, joten $a = 3$ tai 9. Jos $b = 4$, niin vastaavalla tavalla saadaan $a = 1$, 4 tai 7, ja jos $b = 8$, niin $a = 2$, 5 tai 8. Jaettaessa 11:llä jakojäännös on 10, joten jäljelle jää vain yksi mahdollisuus 1044.

4. Kaavaa $(a-1)(a^2+a+1) = a^3-1$ käyttäen saamme esimerkiksi

$$(a^2+a+1)(a^6+a^3+1)(a^{18}+a^9+1)(a^{54}+a^{27}+1) = \frac{a^{3^4}-1}{a-1} = 1+a^2+\dots+a^{80},$$

joka on $\underbrace{11\dots 1}_{80}$ silloin kun $a = 10$. Yleisessä tapauksessa saamme vastaukseksi $\underbrace{11\dots 1}_{3^n-1}$.

5. Yhtälöksi saadaan $(a^2+b^2)m = a \cdot 10 + b$, missä a , b ja m ovat kokonaislukuja. Tästä seuraa, että

$$a^2m - 10a + b^2m - b = 0$$

ja siis

$$a = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(b^2 m^2 - bm)}}{2m}.$$

Merkitään $k = bm$, jolloin k on kokonaisluku. Lausekkeen $\sqrt{100 - 4k(k-1)}$ täytyy olla kokonaisluku, joten kokeilemalla k :n arvoja 0, 1, 2, 3, 4 ja 5 nähdään, että ainoa mahdollisuus on $k = bm = 0$. Näin ollen $b = 0$, sillä $m \neq 0$. Sijoittamalla saamme

$$a = \frac{10 + 10}{2m} = \frac{10}{m} \quad \text{ja siten } a = 1, 2, \text{ tai } 5,$$

joten kysytty ominaisuus on vain kolmella luvulla 10, 20 ja 50:

$$\frac{10}{1^2 + 0^2} = 10, \quad \frac{20}{2^2 + 0^2} = 5 \quad \text{ja} \quad \frac{50}{5^2 + 0^2} = 2.$$

6. Koska $\underbrace{2000 \dots 0}_{1997} 1998 = 2000 \cdot 10^{1998} + 1998$ ja 1999 on alkuluku, jolle $\varphi(1999) = 1998$, saamme Fermat'n lausetta käyttäen tulokseksi $1 \cdot 1 - 1 \equiv 0 \pmod{1999}$.

7. Tutkitaan lukua

$$\frac{4^{5^m}}{1000} = \frac{4^{5^m}}{8 \cdot 125} = \frac{2^{2 \cdot 5^m - 3}}{125}.$$

Vihjeen mukaan $1 \equiv 2^{\varphi(125)} \pmod{125}$, missä

$$\varphi(125) = 125 - 25 = 100,$$

sillä luvuista $1, 2, \dots, 125$ ainoastaan luvuille $m = 5, 10, 15, \dots, 120, 125$ on $\text{sy}(m, 125) > 1$, ja näitä on 25 kappaletta. Tästä seuraa, että $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, ja toisaalta $5^m \equiv 25 \pmod{100}$, kun $m \geq 2$. Tätä tietoa käyttäen saamme

$$\begin{aligned} 2^{2 \cdot 5^m - 3} &\equiv 2^{2 \cdot 25 - 3} \pmod{125} \equiv 2^{47} \pmod{125} \equiv (2^7)^6 2^5 \pmod{125} \\ &\equiv (128)^6 2^5 \pmod{125} \equiv (125 + 3)^6 2^5 \pmod{125} \equiv 3^6 \cdot 2^5 \pmod{125} \\ &\equiv 729 \cdot 32 \pmod{125} \equiv 78 \pmod{125}. \end{aligned}$$

Näin ollen luvun 4^{5^m} , $m \geq 2$, kolme viimeistä numeroa ovat $78 \cdot 8 = 624$, koska $125 \cdot 8 = 1000$ ja $624 < 1000$.

Djemil Mamedjarov