

Geometriakulma 11: Miten piirrän oikeaoppisesti avaruuskuvioita?

Kahdeksas¹ ja **kymmenes**² geometriakulma sisältävät kuvia kolmiulotteisen avaruuden käyristä ja pinoista. Nykyiset tietokoneohjelmistot piirtävät tällaisia helposti, mutta miten kuvat oikein lasketaan ja millaisia niiden on oltava, jotta ne olisivat 'geometrisesti oikein'?

Periaatteessa kyseessä on kaksiulotteisen kuvan muodostaminen kolmiulotteisesta kohteesta. Tällöin tarvitaan jonkinlainen *funktio* eli *kuvaus* kolmiulotteisesta avaruudesta kaksiulotteiseen tasoon, jossa periaatteessa jokaisen avaruuden pisteen kuvaksi asetetaan jokin tason, ns. *kuvatason* piste.

Tämän funktion tulee varmasti olla ainakin jatkuva: Jos kaksi pistettä on avaruudessa lähellä toisiaan, niiden kuvapisteidenkin tulee olla lähellä toisiaan. Tätähän jatkuvuus varsinaisesti on; lukija älköön heti ajatelko lausekkeita sanan 'jatkuvuus' kuullessaan. Jatkuvuus ei kuitenkaan ole riittävä vaatimus, vaan kuvauksella tulee olla enemmän säännöllisyyttä.

Mikäli muuta ei vaadita kuin jatkuvuus, kyseeseen voisivat tulla vaikkapa sellaiset kuvaukset, joita voi

nähdä eräissä hollantilaisen taiteilijan *M. C. Escherin* töissä. Näitä löytyy verkostakin; hyvä lähtökohta on '[The Official M. C. Escher Website](#)'³. Erinomaisia esimerkkijä ovat vaikkapa '[Kuvagalleria](#)'⁴ tai '[Parveke](#)'⁵. Escher itse ei kylläkään pitänyt kuviaan matemaattisina, vaan hänen näkemyksensä perustui muunlaiseen ajatteluun.

Escherin kuvat eivät kuitenkaan ole sitä, mitä tavalliselta havainnolliselta kavalta odotetaan. Luontevampaa onkin käyttää kuvauksena jotakin *projektiota*. Tärkeimmät ja yleisimmin käytetyt vaihtoehdot ovat *yhdensuuntaisprojektio* ja *keskusprojektio*. Edellisellä muodostettuja kuvia sanotaan *aksonometrisiksi* kuviksi, jälkimmäisellä syntyy *persektiivikuvia*.

Yhdensuuntaisprojektio saadaan määritellyksi, kun kiinnitetään jokin avaruuden taso *kuvatasoksi* ja valitaan kiinteä suunta, *projektiosäteiden* suunta. Tämä ei saa olla kuvatason suuntainen. Avaruuspisteen *P* kuvaksi asetetaan tällöin se piste *P'*, jossa *P*:n kautta kulkeva projektiosäde leikkaa kuvatason.

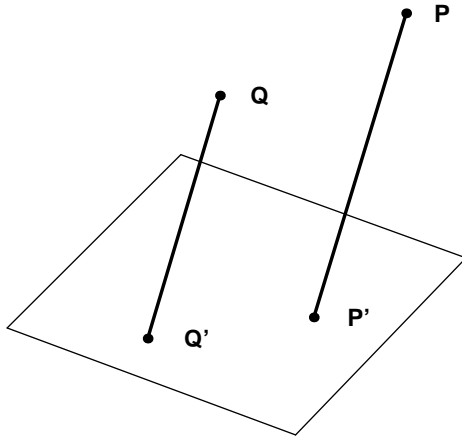
¹<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/solmu12/kivela/>

²<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/solmu14/kivela/>

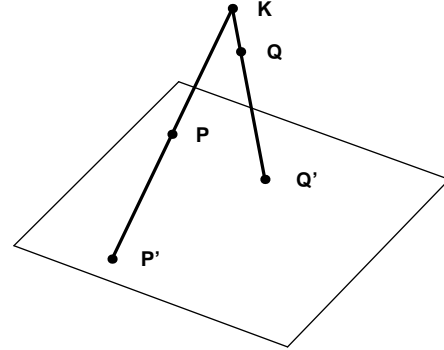
³<http://www.mcescher.com/>

⁴http://www.escher.freereserve.co.uk/escher/PRINT_GALLERY.jpg

⁵<http://www.nga.gov/collection/gallery/ggescher/ggescher-53940.0.html>



Yhdensuuntaisprojektio



Keskusprojektio

Jos projektiosäteiden suunta on kohtisuorassa kuvatasoa vastaan, sanotaan, että yhdensuuntaisprojektio on *ortogonaaliprojektio*. Jos näin ei ole, kyseessä on *vino projektio*.

Keskusprojektiossa kiinteä suunta korvataan kiinteällä pisteellä, *projektiokeskuksella* K . Tämä ei saa sijaita kuvatasossa. Pisteen P kuva P' on suoran KP – projektiosäteen – ja kuvatason leikkauspiste.

Yhdensuuntaisprojektiolla voidaan kuvata – projisoida – koko avaruus kuvatasoon, keskusprojektiolla sen sijaan ei. Jos nimittäin piste P sijaitsee siten, että projektiosäde KP on kuvatason suuntainen, ei kuvapistettä ole. Projisioimatta siis jää projektiokeskuksen kautta kulkeva kuvatason suuntainen taso (jolla on nimi *katoamistaso*, koska sen pisteiden kuvat 'katoavat' kuvatasosta).

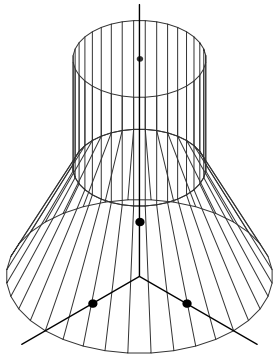
Keskusprojektion luonnollisuus perustuu siihen, että ihmissilmä ja kamera muodostavat kuvia keskusprojektion periaatteella. Projektiokeskus sijaitsee tällöin silmän tai kameran linssin optisessa keskipisteessä. Jostakin kohteesta muodostettu keskusprojektiokuva on siten samanlainen kuin silmän verkkokalvolle kohteesta syntyvä kuva. Aivan tarkoin näin ei ole: Verkkokalvo ei ole taso, vaan hieman kaareva. Keskeisellä tarkan näkemisen alueella se ei tasosta kuitenkaan paljon poikkea.

Jos projektiokeskus etääntyy äärettömän kauaksi kuvatasosta kohteen pysyessä paikallaan, projisioinnissa tarvittavat projektiosäteet muuttuvat yhdensuuntaisiksi, ts. keskusprojektiosta tulee yhdensuuntaisprojektio.

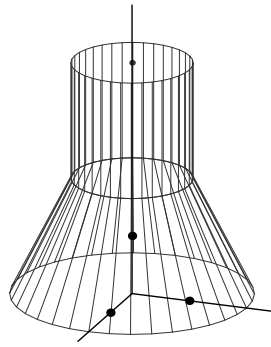
Luontevaa on, että kuvaa katsotaan kohtisuorasti kuvatasoa vastaan. Tällöin myös kuvan synnyttävässä projektiokuvauksessa tulisi projektiosäteiden olla kohtisuorassa kuvatasoa vastaan, ts. yhdensuuntaisprojektion tulisi olla ortogonaalinen ja keskusprojektiosta kuvatasoa vastaan kohtisuoran projektiosäteen, ns. päänäkösäteen tulisi kulkea kohteen keskiosan kautta.

Jos näitä vaatimuksia ei oteta huomioon, voivat sekä aksometriset että perspektiivikuvat näyttää sangen kummallisilta.

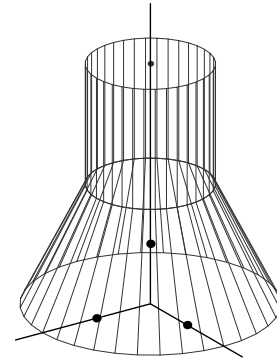
Seuraavat kuvat esittävät kaikki samaa katkaistusta kartiosta ja sen päällä olevasta lieriöstä muodostuvaa kappaletta. Kolme ensimmäistä on ortogonaalisia yhdensuuntaisprojektioita, kolme seuraavaa vinoja yhdensuuntaisprojektioita ja kolme viimeistä keskusprojektioita, ts. perspektiivikuvia. Kuvissa näkyvät myös koordinaattiakselien yksikköpisteet, so. pisteiden $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$ kuvat. Kaikissa kuvissa on piirretty näkyviin sekä näkyvissä olevat viivat että kappaleen taakse näkymättömiin jäävät.



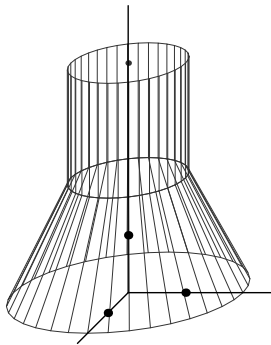
Isometrinen projektio



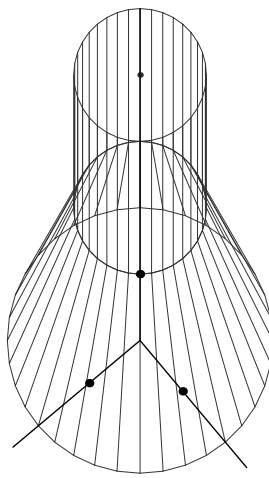
Dimetrinen projektio



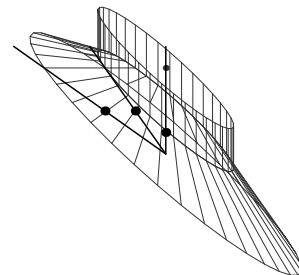
Trimetrinen projektio



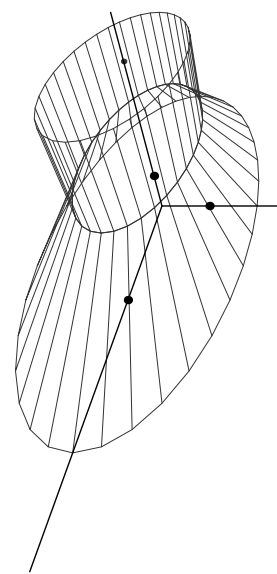
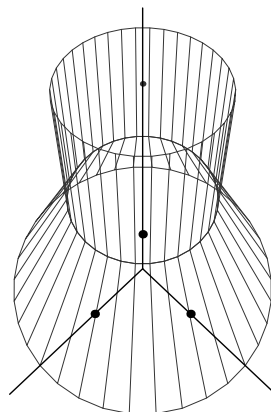
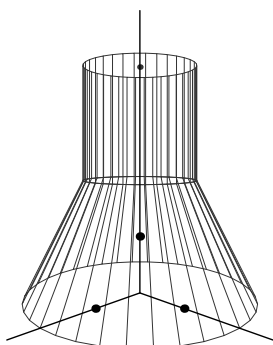
Kavaljeeriprojektio



Sotilasprojektio



Eräs vino projektio



Erilaisia keskusprojekioita (perspektiivikuvia)

Lukija kiinnittäköön huomiota vinojen projektoiden tietynlaiseen venähtäneisyyteen. Nekin näyttävät luonnollisemmilta, jos niitä katsotaan riittävän vinosti projektiosäteiden suunnasta. Oikeaa suuntaa ei vain ole ihan helppoa päätellä kuvasta!

Kaikki aksonometriset kuvat voidaan mieltää kahdella tavalla: kappaletta katsotaan joko yläviistosta tai alaviistosta. Eri tapauksissa eri viivat ovat kappaleen taakse ja siis näkymättömiin jääviä.

Aksonometrisissa kuvissa kappaleessa olevat yhdensuuntaiset suorat näkyvät yhdensuuntaisina; esimerk-

kinä lieriön sivuviivat. Perspektiivikuvissa ei näin välttämättä ole.

Kartio- ja lieriöosan pohjaympyrät näkyvät kaikissa kuvissa ellipseinä. Aksonometrisissa kuvissa nämä ovat kussakin kuvassa keskenään yhdenmuotoisia, perspektiivikuvissa sen sijaan eivät.

Yhdensuuntais- ja keskusprojektion määritelmien perusteella voidaan johtaa kuvien piirtämisessä perinteisesti käytetyt lainalaisuudet. Näitä tutkiva geometrian osa-alue tunnetaan nimellä *deskriptiivinen geometria*. Lähempi tarkastelu on kuitenkin toisen tarinan aihe.

Simo K. Kivelä