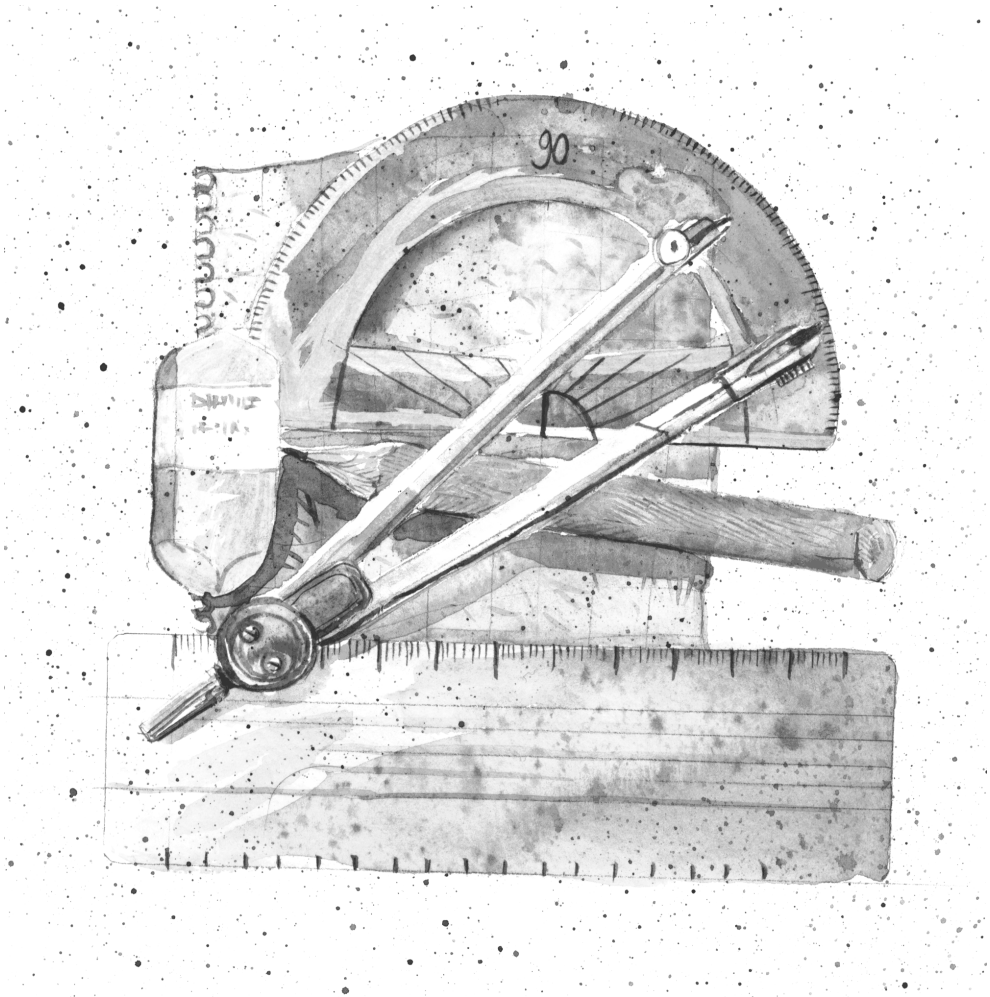


Solmu

1/2000–2001



<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/>

Solmu 1/2000–2001

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto

<http://www.math.helsinki.fi/Solmu/>

Päätoimittaja *Pekka Alestalo*
Toimitussihteerit *Jouni Seppänen* ja *Mika Koskenoja*

Sähköposti
pekka.alestalo@helsinki.fi
jouni.seppanen@iki.fi

Toimituskunta:
Heikki Apiola
Matti Lehtinen
Kullervo Nieminen
Marjatta Näätänen

Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*

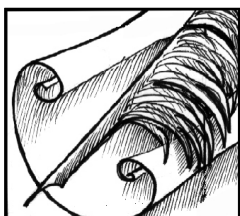
Seuraavaan lehteen tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään syyskuun loppuun mennessä.

Lehden aloittamisen tekivät taloudellisella tuellaan mahdolliseksi Nokia (<http://www.nokia.com/>) ja Taloudellinen Tiedotustoimisto (<http://www.tat.fi/>). Opetusministeriö (<http://www.minedu.fi/>) on kevästä 1997 alkaen avustanut taloudellisesti Solmua.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan nykyisin vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Solmun Internet-sivuilta saatava paperiversio on mahdollista tulostaa omalla kirjoittimella. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus	4
Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa	5
Geometriakulma 10: Mikä on pinta?	13
Roomalaiset numerot – laskentoa ilman kertotaulua	16
Pythagoraan lause	19
Englannissa kohotetaan matematiikan kouluopetuksen tasoa	28



Pääkirjoitus

Matematiikan ylioppilaskokeen uudistuminen viime keväänä jäi tuskin keneltäkään matematiikan parissa työskentelevältä huomaamatta. Mistään radikaalista uudistuksesta ei tosin ollut kysymys, sillä ainakin päällisin puolin tarkasteltuna voisi ajatella, että entisten kokeiden valinnaiset a- ja b-kohdat muuttuivat omiksi tehtävikseen. Taustalla lienee kuitenkin suuntaus, jonka mukaan loppupäään tehtävien aihepiiri koskettaa aikaisempaa enemmän myös valinnaisten kursien asioita.

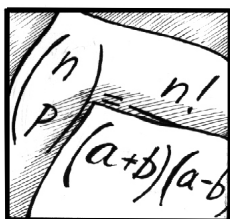
Sen sijaan reaalikokeen kohdalla on julkisuudessa esitetty paljon suurempia muutosvaatimuksia, joiden keskeisenä sisältönä on ollut kokeen jakaminen luonnon-tieteelliseen ja humanistiseen osaan. Nähdäkseni nämä esitykset tuntuvat hyvin perustelluilta, sillä reaaliaineiden sekamelska ylioppilaskokeessa on ihmetyttänyt itseänikin aina lukioajasta lähtien. Toisaalta olisin valmis menemään vieläkin pidemmälle, sillä mielestäni fy-

siikka, kemia ja biologia ansaitisivat oman kokeensa siinä missä espanja, italia ja portugali, millään tavalla väheksymättä näitä hienoja kieliä. Tämän tapainen jako vahvistaisi matemaattisesti suuntautuneiden lukiolaisten asemaa.

Toisen katsantokannan mukaan koko ylioppilaskoe on tarpeeton, sillä esimerkiksi useimmat korkeakoulut valitsevat opiskelijansa omien valintakokeidensa perusteella, eikä ylioppilaskokeen arvosanoja tasoittavaa vaikutusta näin ollen tarvittaisi. Yliopistoissa näyttää kuitenkin olevan suuntauksena pikemminkin suoran opiskelijavalinnan lisääminen kuin siitä luopuminen. Jos tämä suuntaus jatkuu, korostuu ylioppilastutkinnon merkitys entisestään.

Tätä kirjoitettaessa ollaan opetusministeriössä ryhtymässä tositoimiin reaalikokeen uudistamiseksi; jäämme odottamaan tuloksia.

Pekka Alestalo



Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa

Taustana tarinallemme on tämän kevään lyhyen matematiikan yo-tehtävä, jossa käskettiin osoittamaan, että yhtälöllä $f(x) = x^3 - 4x - 2 = 0$ on juuri välillä $(2, 3)$ ja pyydettiin haarukoimaan kyseiselle juurelle kaksidesimaalinen likiarvo. Moni kokelas yritti vahingossa soveltaa probleemaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, toki huonolla seurauksella. Tietystikään tehtävän ratkaisussa ei tarvita juuren tarkan arvon määrittämistä – juuren olemassaolo annetulla välillä seuraa polynomifunktion f jatkuvuudesta ja havainnosta $f(2)f(3) < 0$ (merkin vaihtuminen). Mutta meitä motivoikin uteliaisuus: olisihan jännittävää tietää tarkka lauseke kyseiselle juurelle!

Johdamme seuraavassa yleisen ratkaisukaavan kolmannen asteen yhtälölle sekä kerromme lyhyesti asiaan liittyvästä historiasta. Esitiedoiksi riittää lukion pitkän matematiikan kurssi, liitteessä kertaamme lyhyesti kompleksilukujen juurtamista. Myöhemmässä kirjoituksessa tarkoitukseni on käsitteellä hieman yleisemmin likiarvomatematiikkaa, eli kuinka esimerkiksi yllä mainittu juuri voidaan laskea tehokkaasti niin tarkasti kuin halutaan.

1. Reaalijuurten lukumäärä.

Lähdetään liikkeelle yleisestä kolmannen asteen yhtälöstä

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

missä oletamme, että kertoimet ovat mielivaltaisia reaalilukuja ja $a_3 \neq 0$. Voimme olettaa, että $a_3 = 1$, koska tähän tilanteeseen päästään jakamalla puolittain luvulla a_3 . Yhtälö yksinkertaistuu, kun valitsemme uudeksi tuntemattomaksi luvun x asettamalla

$$z = x - a_2/3.$$

Päädymme yhtälöön $(x - a_2/3)^3 + a_2(x - a_2/3)^2 + a_1(x - a_2/3) + a_0 = 0$, mikä sieventyy muotoon (tarkista itse välivaiheet!)

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1}$$

Tässä luvuilla p ja q on lausekkeet

$$p = a_1 - \frac{1}{3}a_2^2, \quad q = a_0 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_2^3.$$

Jos osaamme ratkaista jokaisen muotoa (1) olevan yhtälön, osaamme silloin ratkaista kaikki kolmannen asteen yhtälöt. Johdannossa mainittu yhtälö $x^3 - 4x - 2 = 0$ onkin jo valmiiksi tätä muotoa. Yhtälön $x^3 + 6x^2 - 3x - 7 = 0$ juuret saadaan puolestaan lisäämällä luku -2 yhtälön $x^3 - 15x + 15 = 0$ juuriin. Jatkossa tarkastelemmekin ainoastaan yhtälöä (1).

Lukion kurssissa mainitaan yleinen tieto – algebran peruslause – jonka mukaan n :nnen asteen yhtälöllä on aina tasan n juurta, kun useammankertaiset juuret lasketaan kertalukunsa mukaan ja juuret voivat saada kompleksilukuarvoja. Erityisesti kolmannen asteen yhtälöllä (1) on aina enintään kolme erisuurta juurta.

Merkitään $f(x) = x^3 + px + q$. Funktio f on polynomifunktiona jatkuva ja helposti nähdään, että $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ja $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Koska f vaihtaa merkkiä reaaliakselilla, on sillä oltava ainakin yksi reaalinen nollakohta, olkoon se a . Tiedämme silloin, että polynomi f on jaollinen polynomilla $x - a$ ja voimme kirjoittaa $f(x) = (x - a)(x^2 + dx + e)$. Toisen asteen yhtälöllä $x^2 + dx + e$ on tutun ratkaisukaavan mukaan juuret $-d/2 \pm \sqrt{(d/2)^2 - e}$, jotka joko ovat kumpikin reaalisia tai sitten erisuuria (liitto-)kompleksilukuja.

Päteee siis:

Jos yhtälön (1) kaikki juuret ovat reaaliset, niin erisuuria juuria on 1–3 kappaletta. Muussa tapauksessa yksi juurista on reaalinen ja kaksi muuta ovat (ei-reaalisia) liittokompleksilukuja.

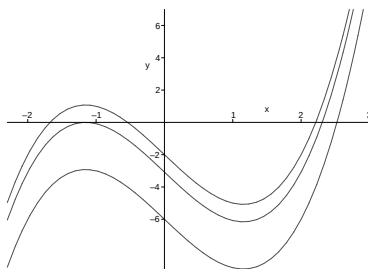
Toisen asteen yhtälön $x^2 + bx + c = 0$ juurten reaalisuuden voimme selvittää ilman että ratkaisemme yhtälöä: riittää pelkästään tarkastella diskriminantin $b^2 - 4c$ merkkiä. Näytämme seuraavassa, että myös kolmannen asteen yhtälölle on olemassa vastaava keino selvittää reaalijuurten lukumäärä. Kun otamme käyttöön hieman differentiaalilaskentaa, ei meidän tarvitse ensin ratkaista kyseistä yhtälöä!

Tarkastellaan tätä varten funktion f derivaattaa $f'(x) = 3x^2 + p$ ja jaetaan käsittely eri tapauksiin luvun p merkin mukaan.

Jos $p > 0$ niin $f'(x) \geq p > 0$ kaikilla x , joten f on aidosti kasvava koko reaaliakselilla. Siispä funktiolla $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on enintään yksi nollakohta ja aiempien havaintojemme nojalla sellainen todella löytyy.

Tapauksessa $p < 0$ derivaatalla $f'(x) = 3x^2 + p$ on kaksi erisuurta reaalista nollakohtaa $x = \pm\sqrt{-p/3}$. Tarkastelemalla derivaatan merkkiä (tee merkikaaaviot!) näemme, että f on aidosti kasvava väleillä $(-\infty, -\sqrt{-p/3})$ ja $(\sqrt{-p/3}, \infty)$ sekä aidosti vähenevä välillä $(-\sqrt{-p/3}, \sqrt{-p/3})$. Erityisesti $f(-\sqrt{-p/3}) > f(\sqrt{-p/3})$. Lisäksi totesimme jo aiemmin, että $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ja $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Jos nyt esimerkiksi kumpikin luvusta $f(\pm\sqrt{-p/3})$ on (aidosti) positiivinen, niin f vaihtaa merkkiä ainoastaan välillä $(-\infty, -\sqrt{-p/3})$, jolloin voimme aiemman nojalla päätellä, että f :llä on täsmälleen yksi nollakohta välillä $(-\infty, -\sqrt{-p/3})$ ja muita nollakohtia ei ole (piirrä hahmotelma kuvaajasta tarkan päättelysi tueksi). Vastaavasti reaalijuuria on vain yksi, jos luvut $f(\pm\sqrt{-p/3})$ ovat negatiivisia. Jos taas luvut $f(\pm\sqrt{-p/3})$ ovat eri merkkisiä, näemme että f :n kuvaaja leikkaa reaaliakselin kerran jokaisella yllä käsitellyistä kolmesta välistä, joten tässä tapauksessa nollakohtia on kolme.

Tarkastellaan vielä vaihtoehtoa, jossa jompi kumpi luvusta $f(\pm\sqrt{-p/3})$ on nolla. Kyseisessä tilanteessa kuvaaja sivuaa reaaliakselia vastaavassa kohdassa, jolloin päättelemme, että yhtälöllä (1) on kaksi reaalista juurta (aiemman mukaan myös kolmas juuri on reaalinen, joten nyt yhtälöllä on kaksoisjuuri).



Kuva 1: Kolme eri vaihtoehtoa tapauksessa $p < 0$.

Havaintomme voidaan kiteyttää yksinkertaisesti: kun $p < 0$, on reaaliuuria maksimimäärä vain jos luvut $f(\pm\sqrt{-p/3})$ ovat eri merkkiset, eli niiden tulo on negatiivinen. Lasketaan

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{-p/3})f(\sqrt{-p/3}) &= \left(-\sqrt{-p/3}(-p/3) + p(-\sqrt{-p/3}) + q\right) \left(\sqrt{-p/3}(-p/3) + p\sqrt{-p/3} + q\right) \\ &= \left(q - \frac{2}{3}p\sqrt{-p/3}\right) \left(q + \frac{2}{3}p\sqrt{-p/3}\right) = 4\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right). \end{aligned}$$

Otetaan käyttöön merkintä (huomaa miinus-merkki!)

$$D = -\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right) = -\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

Lukua D sanotaan yhtälön (1) *diskriminantiksi*, ja olemme juuri näyttäneet, että (ainakin tapauksessa $p < 0$) se näyttölee samanlaista roolia kuin toisen asteen yhtälön diskriminantti. Nimittäin, edellä tekemiemme havaintojen mukaan yhtälöllä (1) on kolme juurta jos $D > 0$, kaksi juurta jos $D = 0$ ja vain yksi reaalijuuri jos $D < 0$.

Tutkitaan lopuksi, miten edellä johdettu diskriminanttiehto toimii tapauksessa $p \geq 0$. Jos $p > 0$, niin aikaisemman mukaan reaaliuuria on yksi ja toisaalta myös $D < 0$, koska aina $q^2 \geq 0$ ja siis $D \leq -p^3/27$. Tapauksessa $p = 0$ yhtälö saa muodon $x^3 = q$, jolla on yksi reaalijuuri ja kaksi (aitoa) kompleksijuurta, jos $q \neq 0$, jolloin myös $D < 0$. Jos $q = 0$, niin yhtälöllä on yksi (kolmois)juuri $x = 0$. Jälkimmäinen vaihtoehto vastaa tapausta $D = p = 0$.

Voimme koota tuloksemme seuraavasti:

Lause 1. Jos diskriminantti on positiivinen, eli $D > 0$, on reaalikertoimisella yhtälöllä (1) kolme keskenään erisuurta reaaliuurta. Jos $D < 0$, on reaaliuuria yksi, ja lisäksi yhtälöllä on kaksi (aitoa) kompleksijuurta, jotka ovat toistensa liittolukuja. Tapauksessa $D = 0$ yhtälön juuret ovat reaaliset, ja niitä on kaksi erisuurta jos lisäksi $p \neq 0$, ja ainoastaan yksi (kolmoisjuuri) jos lisäksi $p = 0$.

ESIMERKKI. Ylioppilastehtävän yhtälölle $x^3 - 4x - 2 = 0$ saamme $D = -((-2/2)^2 + (-4/3)^3) = 37/27 > 0$, joten sillä on kolme erisuurta reaaliuurta.

HARJ. 1. Montako reaaliuurta on yhtälöllä $x^3 + 3x^2 - 5x - 7 = 0$? Entä yhtälöllä $x^3 - 300x + 1000 = 0$?

HARJ. 2. Olkoot luvut x_1, x_2, x_3 yhtälön $x^3 + rx^2 + px + q = 0$ juuret. Osoita, että $r = -(x_1 + x_2 + x_3)$, $p = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ ja $q = -x_1x_2x_3$. Muodosta kolmannen asteen yhtälö, jonka juurina ovat luvut $-3, 2$ ja 7 .

HARJ. 3. Tiedämme että luvut u, v ovat muotoa $x^3 + px + q = 0$ olevan yhtälön juuria. Voitko päätellä kolmannen juuren, vaikket tiedäkään lukuja p ja q ? Sama kysymys, jos yhtälö on muotoa $x^3 + rx^2 + q = 0$.

2. Ratkaisukaava.

Ratkaisukaavan löytäminen kolmannen asteen yhtälölle ei ole lainkaan niin helppoa kuin toisen asteen yhtälölle. Ottaen huomioon algebrallisten merkintöjen puutteellisuuden ei olekaan ihme, ettei sitä keksitty ennen 1500-lukua. Luonnollinen ajatus olisi yrittää täydentää yhtälön (1) vasen puoli kuutioksi, mutta tämä lähestymistapa ei sellaisenaan toimi. Eteenpäin pääsemiseen tarvitaan uusi idea. Sellaisen tarjoaa sijoitus

$$x = u + v.$$

Yhtälö (1) saa sievennysten jälkeen muodon (tarkista se)

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Selvästikin tämä yhtälö toteutuu mikäli u ja v toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -p/3. \end{cases} \quad (2)$$

Korottamalla jälkimmäisen yhtälön kolmanteen potenssiin saamme yhtälön

$$u^3 v^3 = -(p/3)^3. \quad (3)$$

Siispä tiedämme mitä ovat lukujen u^3 ja v^3 summa ja tulo. Toisen asteen yhtälön teoriasta (sievennä $(y - u^3)(y - v^3)$) tiedämme silloin, että luvut u^3 ja v^3 toteuttavat toisen asteen yhtälön

$$y^2 + qy - (p/3)^3,$$

jota kutsutaan yhtälöä (1) vastaavaksi *resolventtiyhtälöksi*. Tämän osaamme ratkaista tutulla ratkaisukaavalla ja saamme

$$u^3 = -q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3} = -q/2 + \sqrt{-D},$$

missä $D = -(q/2)^2 - (p/3)^3$ on yhtälön diskriminantti. Vastaavasti

$$v^3 = -q/2 - \sqrt{-D}.$$

Toki edellä u ja v ovat symmetrisessä asemassa, eli merkit saattaisivat olla toisinkin päin. Tässä vaiheessa tiedämme, että ratkaisemamme luvut u^3, v^3 toteuttavat yhtälöparin (2), jossa jälkimmäinen yhtälö on korvattu yhtälöllä (3).

Olkoon sitten $u_0 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{-D}}$ (mikä tahansa kuutiojuuren arvo kelpaa tässä). Tämän jälkeen valitsemme kuutiojuuren $v_0 = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{-D}}$ arvon niin, että yhtälöparin (2) jälkimmäinen yhtälö toteutuu, eli $u_0 v_0 = -p/3$. Tämä on mahdollista, koska suoraan laskemalla voimme tarkistaa, että valinta $v_0 = -p/3u_0$ toimii, tapauksen $u_0 = 0$ ollessa yksinkertainen. Silloin pari (u_0, v_0) selvästikin toteuttaa yhtälöparin (2) ja siis $u_0 + v_0$ on yhtälön (1) ratkaisu. Olemme selittäneet kolmannen asteen yhtälön!

Yhtälön muiden juurien löytämiseksi merkitsemme $\rho = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, jolloin siis pätee $\rho^3 = 1$; vrt. Liite lopussa. Havaitsemme suoraan laskemalla että myös lukuparit $(\rho u_0, \rho^2 v_0)$ ja $(\rho^2 u_0, \rho v_0)$ toteuttavat yhtälöparin (2). Etsimämme RATKAISUKAAVA saa muodon:

Lause 2. Merkitään $D = -(q/2)^2 - (p/3)^3$ ja $\rho = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. Yhtälön (1) juuret ovat luvut

$$u_0 + v_0, \quad \rho u_0 + \rho^2 v_0 \quad \text{ja} \quad \rho^2 u_0 + \rho v_0,$$

missä $u_0 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{-D}}$, $v_0 = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{-D}}$ ja kuutiojuuren valinnat on tehty niin, että yhtälö $u_0 v_0 = -p/3$ toteutuu.

Johtamamme ratkaisukaavat tunnetaan CARDANON KAAVOJEN nimellä, koska ne julkaistiin ensimmäisen kerran vuonna 1545 Geronimo Cardanon teoksessa *Ars magna*.

HARJ. 4. Edellinen päättely ei vielä näytä, että nämä kaavat antavat *kaikki* juuret. Tämän todistamiseksi sievennä lauseke $(x - (u_0 + v_0))(x - (\rho u_0 + \rho^2 v_0))(x - (\rho^2 u_0 + \rho v_0))$, ja osoita että saat alkuperäisen yhtälön (1) vasemman puolen.

ESIMERKKI. Testataksemme johtamaamme ratkaisukaavaa tarkastelemme yksinkertaista yhtälöä $x^3 + x = 0$. Koska $x^3 + x = x(x^2 + 1) = x(x + i)(x - i)$, ovat juuret $0, \pm i$. Nyt $D = -1/27$ ja voimme valita $u_0 = \sqrt[3]{\sqrt{1/27}} = 1/\sqrt{3}$, missä siis valitsemme kuutiojuurelle reaalisen arvon. Silloin $v_0 = -1/3u_0 = -1/\sqrt{3}$, joten $u_0 + v_0 = 0$, ja muut kaksi juurta saavat muodon

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left((-1/2 \pm i\sqrt{3}/2) - (-1/2 \mp i\sqrt{3}/2) \right).$$

Sievennysten jälkeen lauseke tuottaa luvut $\pm i$, kuten pitääkin.

HARJ. 5. Ratkaise yhtälöt $x^3 + 63x = 316$ ja $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$.

HARJ. 6. Todista yllättävä yhtäsuuruus

$$\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$$

osoittamalla, että vasen puoli toteuttaa kolmannen asteen yhtälön, jonka ainoa reaalijuuri on 1. Etsi itse lisää vastaavia identiteettejä.

3. Casus irreducibilis: trigonometria astuu näyttämölle.

Oletetaan nyt, että ylioppilaskokelas tuntee ratkaisukaavan ja soveltaa sitä em. tehtävään ja ratkaisee yhtälön $x^3 - 4x - 2 = 0$. Hän laskee ensin $D = -(-\frac{2}{2})^2 - (-\frac{4}{3})^3 = 37/27$, ja prääntää sitten sumeilematta paperille kaavan

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{-37/27}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-37/27}}.$$

Saattaa siinä kokeen tarkastajalta tipahtaa punakynä kädestä! Mutta sormi menisi helposti suuhun kokelaalta-kin. Kaavathan vaativat ottamaan kolmannen juuren aidosta kompleksiluvusta, ja tämä osoittautuikin erikoislaatuksella tavalla hankalaksi tehtäväksi. Voidaan nimittäin osoittaa, ettei kyseisiä kolmansia juuria yleisessä tapauksessa voida lausua lausekkeina pelkästään reaalisista juurroksista!

Yhtälön (1) kohdalla tapaus $D > 0$, joka siis johtaa kompleksilukujen kuutiojuuriin, tunnetaan nimellä *casus irreducibilis* ("jakautumaton tapaus"). Casus irreducibilis jäi varsin mystiseksi Cardanolle ja hänen aikalaisilleen, varsinkin kun etukäteen olisi luultavaa, että juuri tapaus $D > 0$, jolloin yhtälöllä on kolme eri suurta reaalijuurtta, olisi helpompi kuin tapaus, jossa osa juurista on kompleksisia.

Liitteessä on näytetty, kuinka de Moivren kaavan avulla kompleksiluvusta voidaan ottaa kolmas juuri trigonometristen funktioiden avulla ja Cardanon kaavat säilyvät sikäli käyttökelpoisina. Osoitamme kuitenkin seuraavassa, kuinka tapauksessa $D > 0$ voidaan yhtälö (1) ratkaista suoraan trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavan avulla ilman Cardanon kaavoja!

Nyt $p < 0$ ja voimme tehdä yhtälössä (1) sijoituksen $x = 2y\sqrt{-p/3}$, jolloin se saa muodon

$$4y^3 - 3y = q', \quad \text{missä} \quad q' = \frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}.$$

Palautamme mieleen kolminkertaisen kulman kosinin kaavan: koska $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ ja $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, saamme kosinin yhteenlaskukaavan avulla

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(x + 2x) = \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x(2\sin x \cos x) \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x, \end{aligned} \tag{4}$$

missä käytimme tietoa $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Sijoitamme lisäksi $y = \cos(t)$ ja $q' = \cos(\phi)$, missä $\phi = \arccos(q')$. Jälkimmäinen sijoitus on mahdollinen, sillä tapauksessa $D > 0$ on välttämättä $|q'| < 1$. Tällöin myös $|y| < 1$, sillä tapauksessa $|y| \geq 1$ on lausekkeen $4y^3 - 3y$ itseisarvo vähintään 1.

Suorittamalla viimeiset sijoitukset yhtälö saa muodon $4\cos^3(t) - 3\cos(t) = \cos(\phi)$, mikä yhteenlaskukaavan nojalla on yhtäpitävä yksinkertaisen yhtälön

$$\cos(3t) = \cos(\phi)$$

kanssa. Pienen laskun jälkeen näemme, että tämän yhtälön ratkaisuiksi (mod 2π) soveltuvat luvut

$$t \in \{\pm\phi/3, \pm(\phi/3 + 2\pi/3), \pm(\phi/3 + 4\pi/3)\}.$$

Kun näistä otetaan kosinit, ei merkillä ole väliä, joten puolet vaihtoehdoista tippuu pois. Siispä:

Lause 3. Jos $D > 0$, niin yhtälön (1) juuret ovat luvut

$$2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right), \quad 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{ja} \quad 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right),$$

missä $\phi = \arccos\left(\frac{q/2}{(-p/3)^{3/2}}\right)$.

Selvästi saadut juuret ovat kaikki erisuuret. Yllättäen tarvitsimmekin trigonometriset funktiot avuksi algebralisen yhtälön ratkaisemisessa!

HARJ. 7. Tarkastele tapausta jossa diskriminantti häviää, $D = 0$. Näytä, että Cardanon kaavoissa voidaan valita $u_0 = v_0 = \sqrt[3]{-q/2} = -\sqrt[3]{q/2}$, joten yksi juuri on $-2\sqrt[3]{q/2}$, ja toteaa, että muut kaksi juurta yhtyvät koska $\rho^2 + \rho = -1$, ja että niiden arvo on $\sqrt[3]{-q/2}$.

Yhteenvetona kertaamme vielä:

Tapauksessa $D > 0$ on erisuuria reaalijuuria kolme ja ratkaisu on mahdollista esittää trigonometrinen funktioiden avulla reaalisessa muodossa. Tapauksessa $D < 0$ reaalijuuria on yksi ja se saadaan suoraan Cardanon kaavojen avulla reaalisilla juurroksilla, lisäksi kompleksijuuret saadaan kyseisistä juurroksista kertomalla sopivasti luvuilla $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Jos diskriminantti on nolla, niin juuret ovat reaaliset ja osa niistä yhtyy.

Voidaan osoittaa, että Cardanon kaavat ovat voimassa, vaikka yhtälön kertoimet olisivat kompleksilukuja. Jopa tässä osiossa johtamamme kaavat pätevät yleisesti, kun ne tulkitaan oikein – tällöin joudutaan laskemaan trigonometrisia funktioita kompleksilukuarvoilla, mikä olisi mielenkiintoisen tarinan aihe sinänsä.

ESIMERKKI. Tarkastellaan yhtälöä $x^3 - x = 0$, jonka ratkaisuksi havaitaan helposti luvut $0, \pm 1$. Nyt $q' = 0$, eli voimme valita $\phi = \pi/2$ ja siis $\phi/3 = \pi/6$. Lisäksi $2\sqrt{-p/3} = 2/\sqrt{3}$ ja juuret saavat muodon $2\cos(t)/\sqrt{3}$, missä $t \in \{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2\}$, eli saamme täsmälleen oikeat luvut.

HARJ. 8. Ratkaise yhtälö $x^3 - 63x = 162$. Keksi itse lisää esimerkkejä ja testaa laskimella saamiasi juuria.

HARJ. 9. Totea vihdoinkin, että ylioppilaskirjoitustehtävän yhtälön $x^3 - 4x - 2 = 0$ välillä $(2, 3)$ oleva juuri voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \right).$$

Mitkä ovat yhtälön muut juuret?

4. Historiaa.

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisutarina on kiehtova pala matematiikan historiaa. Jo antiikin kreikkalaiset kohdasivat kolmannen asteen yhtälöitä, koskapa monet aikakauden keskeiset ongelmat kuten kuution kahdennus tai kulman kolmijako johtavat sellaiseen. Arkhimedes kykeni esittämään geometrisen ratkaisun, joka väistämättä johti konstruktion, jota ei voi suorittaa pelkästään harppia ja viivotinta käyttäen. Geometrisen ratkaisun esittivät myös eräät muut matemaatikot kuten kuuluisa runoilija-matemaatikko Omar Khayam 1200-luvulla.

Algebraalinen ratkaisu kolmannen asteen yhtälölle keksittiin lopulta 1500-luvulla. Muotoa (1) olevan yhtälön ratkaisun löysi noin v. 1515 Scipione del Ferro (1465–1526), matematiikan professori Bolognan yliopistossa. Pidetään mahdollisena, että hän olisi saanut ratkaisevan idean vanhemmista arabialaisista lähteistä. Ferro ei julkaissut tulosta, mutta paljasti suuren salaisuutensa oppilaalleen Antonio Maria Fiorille. Noin vuonna 1535 matemaatikko Niccolo Fontana alias Tartaglia löysi ilmeisestikin itsenäisesti ratkaisun yhtälölle, joka on muotoa $x^3 + rx^2 + q = 0$. Fior haastoi Tartaglian julkiseen kaksintaisteluun kolmannen asteen yhtälöiden ratkaisemisessa, aseenaan Ferron ratkaisukaava. Kumpikin osallistuja asetti toisen ratkaistavaksi tukun yhtälöitä. Päivää ennen määräaikaa yötä päivää uurastanut Tartaglia lopulta löysi ratkaisukeinon myös Fiorin edustamalle yhtälötyypille. Lopputuloksena oli, että Tartaglia ratkaisi kaikki hänelle annetut tehtävät, Fior ei ainuttakaan.

Voitokas Tartaglia halusi puolestaan pitää maineensa avaimet omana tietonaan ja päätti olla paljastamatta ratkaisuaan muille kunnes ehtisi julkaista sen kirjan muodossa. Monitieteilijä Geronimo Cardano sai kuitenkin houkuteltua Tartaglian paljastamaan ratkaisukaavan itselleen, tosin ensin runomuotoon puettuna! Tähän liittyi vakuutus olla paljastamatta salaisuutta. Lupauksestaan huolimatta Cardano julkaisi Tartaglian tulokset suuressa teoksessaan *Ars Magna* (Suuri Taide/Tiede). Lisäksi hän sisällytti tähän teokseen neljännen asteen yhtälön ratkaisun, jonka oli keksinyt hänen lahjakas oppilaansa Ludovico Ferrari (1522–1565).

On ymmärrettävää, että Tartaglia oli katkera Cardanolle, ja tilanteesta kehkeytyikin matematiikan historian ensimmäisiä tunnettuja prioriteettikiistoja. Käydyssä kiistassa Ferrari puolusti kiihkeästi opettajaansa. Cardanon ja Ferrarin hyväksi on luettava se seikka, että he saivat käsiinsä myös Fiorin alkuperäisen ratkaisun Fiorin vävyiltä. Cardanon kunniaksi on myös sanottava, että hän ei väittänyt keksineensä itse ratkaisukaavoja, vaan tunnusti tässä suhteessa täysin muiden ansiot.

Kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen oli suuri läpimurto algebrassa, joka toi tekijöilleen kuuluisuutta. Tuona hetkenä eurooppalainen matematiikka ylitti antiikin saavutukset. Kaavojen käytännöllinen arvo on huomattavasti vähäisempi (toisen asteen yhtälön ratkaisukaava sen sijaan on matematiikan perustyökaluja) kuin itse ratkaisemisen periaatteellinen ja psykologinen merkitys.

Lisäksi on merkittävää, että Cardanon kaavojen löytäminen johti kompleksilukujen keksimiseen: erityisesti edellä tarkasteltu *casus irreducibilis* näytti, että puhtaasti reaalisten ilmiöiden käsittelyyn tarvitaan kompleksilukuja. Jo Cardano laski formaalisti imaginääriluvuilla, vaikkei hän hyväksynyt niitä oikeasti olemassa oleviksi suureiksi. Teoksessa *Ars Magna* hän laskee formaalisti tulon $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15})$ saaden tulokseksi korrektisti 40. Mahdollisesti Cardano harrastaa tässä yhteydessä sanaleikkiä, sillä hän mainitsee kyseisestä laskutoimituksesta *dimissis incruciationibus*, jonka voi kääntää ”unohtaen henkiset kärsimykset” tai yhtä hyvin ”ristitulojen supistuttua pois” (vrt. viite [C], s. 238).

Italialainen Rafael Bombelli (1526–1573) ymmärsi, että Cardanon kaavat toimivat myös *casus irreducibilis* kohdalla; hän itse kuvasi oivallustaan ”villiksi ajatukseksi.” François Viète (1540–1603) keksi yllä esittämämme trigonometrisen ratkaisun kyseiselle tapaukselle. Tarkasteltavana ajanjaksona huomattavaa kehitystä tapahtui myös matematiikan symbolisessa esityksessä: Cardano muotoili algebralliset kaavat sanallisessa muodossa, mikä nykykatsannossa raskauttaa suurella määrällä esityksen ymmärtämistä. Viète puolestaan sovelsi symboleita tavalla, joka jo jossain määrin lähentelee nykyaikaista merkitsemistapaa.

GERONIMO CARDANO (1501–1576) syntyi Paviassa Italiassa. Hän oli aikakautensa tunnetuimpia lääkäreitä ja toimi huomattavissa yliopistollisissa viroissa Paviassa ja Bolognassa. Myös keksijänä Cardanon nimi on säilynyt: voimansiirron perusrakenne kardaaniakseli on nimetty hänen mukaansa. Matemaatikkona hänet tunnetaan ennen muuta merkittävästä teoksestaan *Ars Magna* [GC], joka kokosi yhteen tunnetun algebran ja nosti sen uudelle tasolle kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavojen myötä. Lisäksi teoksessa sallitaan negatiiviset (Cardanon kielessä ”kuvitellut”) ratkaisut yhtälöille ja myös viitataan imaginääristen ratkaisujen mahdollisuuteen. Monipuolisuuden puutteesta Cardanoa ei voi syyttää: eräässä vaiheessa hänet tuomittiin jumalanpilkasta, myöhemmin hän kuitenkin toimi Roomassa paavin hoviastrologina. Elämä oli tuohon aikaan värikkäämpää kuin ”Kauniissa ja rohkeissa” tänään: Cardanon vanhempi poika surmasi oman vaimonsa arsenikilla, Cardanon oppilaan Ferrarin puolestaan myrkytti hänen oma sisarensa.

NICCOLO FONTANA alias TARTAGLIA (1499–1557) syntyi Bresciassa Italiassa. Hän sai melkein surmansa miekaniskusta ranskalaisten sotilaiden vallatessa Brescian v. 1512. Tartaglia parani (tarinan mukaan hänen äitinsä pelasti poikansa matkimalla koiran tapaa hoitaa haavoja: nuolemalla ne säännöllisesti!), mutta kärsi tapahtuneen johdosta vakavasta änkytyksestä loppuikänsä, mistä lempinimi Tartaglia (änkyttäjä) juontaa juurensa. Köyhyyden vuoksi Tartaglia joutui opettelemaan kirjoittamista yksin käyttäen salaa kirjoituslustana läheisen hautausmaan hautakiviä! Tartaglia opetti matematiikkaa useissa Italian kaupungeissa. Kolmannen asteen yhtälöiden lisäksi hän teki pioneeritutkimusta muun muassa ballistiikassa.

Viitteet.

Esitetty ratkaisukaavan johto seuraa Kalle Väisälän mainiota teosta [V, 81§], josta myös löytyy (82§) neljännen asteen yhtälön ratkaisukaava sekä todistus sille, että viidennen tai korkeamman asteen yhtälöille ei ole olemassa yleistä ratkaisukaavaa. Matematiikan historian erinomainen yleisesitys [B] sekä erikoistuneempi lähdeos [E] sisältävät lisää tietoa kolmannen asteen yhtälöön liittyvästä historiasta.

[B] Carl Boyer: *Tieteiden kuningatar I-II*. Art House, 1994.

[C] Ronald Calinger: *Classics of mathematics*. Moore Publishing Company, 1982.

[GC] Geronimo Cardano: *The great art (Ars magnae)*, 1545.

[E] Howard Eves: *Great moments in mathematics (before 1650)*. The Mathematical Association of America, 1980.

[V] Kalle Väisälä: *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet*. Otava, (toinen painos) 1961.

Liite: Juurenotto ja toisen asteen yhtälö kompleksiluvuille.

Palautamme mieleen, että mielivaltainen kompleksiluku z voidaan kirjoittaa muotoon $z = a + ib$, missä a ja b ovat mielivaltaisia reaalilukuja ja i on niin sanottu imaginääriyksikkö, joka toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$. Luku a on luvun z reaaliosa ja b imaginääriosia. Luvun z konjugaattiluku on $a - ib$. Luku ja sen konjugaatti ovat keskenään liittokompleksilukuja – tästä esimerkkinä luvut $1 \pm i$.

Kompleksiluvuilla harrastetaan algebrallisia laskutoimituksia (ja monia muitakin) aivan kuin tavallisilla luvuilla; lisäksi termit i^2 voidaan aina sieventää luvuksi -1 . Esimerkiksi

$$(a + ib)(c + id) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Toisen asteen reaalikertoimiselle (itse asiassa jopa kompleksikertoimiselle) yhtälölle $x^2 + bx + c = 0$ juuret saadaan tavallisesta ratkaisukaavasta: jos diskriminantti $D = b^2 - 4c$ on negatiivinen, saavat juuret muodon $(-b \pm i\sqrt{-D})/2$.

HARJ. 10. Osoita että toisen asteen yhtälön $x^2 + bx + c = 0$ juurten summa on $-b$ ja tulo c vaikka juuret olisivat kompleksiset. Testaa tämä osoittamalla ratkaisukaavaa käyttäen, että yhtälön $x^2 - 6x + 13 = 0$ juuret ovat luvut $3 \pm 2i$. Tarkista juuret myös suoraan yhtälöön sijoittamalla.

Algebran peruslauseen mukaan yhtälöllä $z^n = w$, missä w on kompleksiluku, on tasan n juurta. Tapauksessa $n = 2$ juurten (siis luvun a neliöjuuren) laskeminen ekplisiittisessä muodossa reaalilla juurilausekkeilla luvun w reaal- ja imaginääriosista on mahdollista (vrt. harj. 13 alla). Kun $n \geq 3$, tämä ei ole yleisesti totta.

Juuret voidaan kuitenkin helposti laskea käyttämällä kompleksiluvuille polaariesitystä:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

missä $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ on luvun w moduli ja $\theta \in [0, 2\pi)$ on vaihekulma. Luku $r \geq 0$ on yksikäsitteisesti määrätty ja θ on yksikäsitteinen modulo 2π . Vaihekulma voidaan ratkaista vaikkapa yhtälöstä $\tan(\theta) = y/x$, missä ratkaisusta on valittava ne jotka antavat oikeat merkit trigonometrisille funktioille $\cos \theta$ ja $\sin \theta$.

DE MOIVREN KAAVA sanoo, että

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)),$$

eli korotettaessa potenssiin n moduli korotetaan vastaavaan potenssiin ja vaihekulma kerrotaan n :llä. de Moivre'n kaavan avulla voimme helposti ottaa kompleksiluvusta w n :nnen juuren kirjoittamalla sille ensin polaariesityksen $w = R(\cos \phi + i \sin \phi)$, jolloin näemme että juurella $z = \sqrt[n]{w}$ on n eri arvoa (kun $w \neq 0$)

$$z = \sqrt[n]{R} \left(\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

ESIM. Kun nyt osaamme ottaa juuria myös kompleksiluvuista (tosin trigonometrian avulla), tutkimme miten Cardanon kaavat toimivat yhtälölle $x^3 - x = 0$, jonka juuret ovat $0, \pm 1$ (kyseessä on casus irreducibilis). Cardanon kaavat antavat yhdeksi juureksi luvun

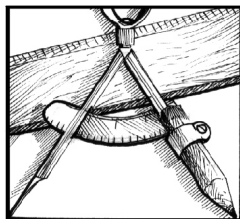
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-1/27}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-1/27}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(\sqrt[3]{\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-1}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i})$$

Luvun $\sqrt[3]{i}$ määrittämiseksi kirjoitamme $i = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)$, jolloin saamme kuutiojuurelle arvot $\cos \phi + i \sin \phi$, missä $\phi \in \{\pi/6, \pi/6 + 2\pi/3, \pi/6 + 4\pi/3\}$. Kyseisten kulmien trigonometriset funktiot osaamme laskea tarkasti ja päädymme lukuihin $i, (\pm\sqrt{3} + i)/2$. Vastaavasti laskemme että juuri $\sqrt[3]{-i}$ saa arvot $-i, (\pm\sqrt{3} - i)/2$. Cardanon kaavoissa voimme vaikkapa valita $u_0 = i/\sqrt{3}$ ja $v_0 = -i/\sqrt{3}$, jolloin myös ehto $u_0 v_0 = -(-1/3)$ toteutuu. Summa $u_0 + v_0 = 0$ antaa yhden juuren, tarkista itse että kaavat antavat oikein muut juuret.

HARJ. 11. Ratkaise yhtälö $z^3 = 1$. (Vihje: voit joko käyttää de Moivre'n kaavaa tai sitten kirjoittaa $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ ja ratkaista toisen asteen yhtälön $z^2 + z + 1 = 0$ ratkaisukaavalla)

HARJ. 12. Jos luku z on luvun w kuutiojuuri, näytä että muut juuret ovat $\rho z, \rho^2 z$, missä $\rho = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

HARJ. 13. Osoita, että neliöjuuri kompleksiluvusta $w = u + iv$ (tässä u, v ovat reaalilukuja) voidaan lausua eksplisiittisesti reaalisten juurrosten avulla. Merkitse $(x + iy)^2 = u + iv$ ja totea, että reaaliluvut x ja y toteuttavat yhtälöparin $x^2 - y^2 = u, 2xy = v$. Ratkaise tämä korottamalla jälkimmäinen yhtälö neliöön, jolloin saat selville lukujen x^2 ja $-y^2$ summan ja tulon, eli voit kirjoittaa toisen asteen yhtälön, jonka nämä luvut toteuttavat.



Geometriakulma 10: Mikä on pinta?

Kahdeksas geometriakulma (Solmu 2/1999-2000) pyrki määrittelemään *käyrän*. *Pintoja* voidaan käsitellä samaan tapaan.

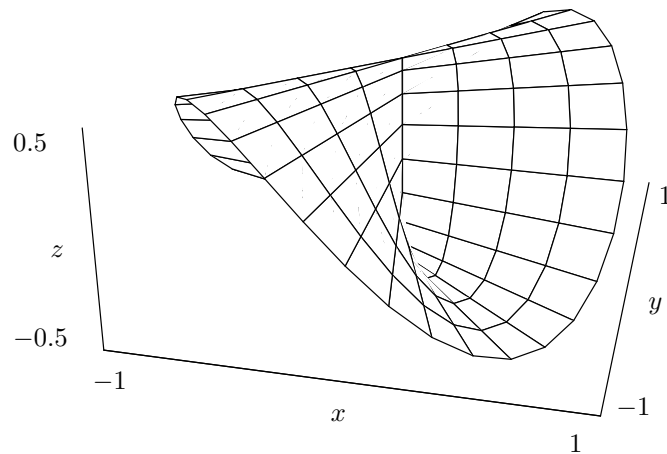
Melko luontevalta — ainakin liikaa pohtimatta — tuntuu kutsua pinnaksi kahden muuttujan funktion $f(x, y)$ kuvaajaa, so. niiden pisteiden (x, y, z) joukkoa, jotka toteuttavat yhtälön $z = f(x, y)$. Tässähän xy -tason pisteen (x, y) yläpuolelle (tai ala-) korkeuteen $f(x, y)$ asetetaan yksi pinnan piste. Jos funktio f on jatkuva, pisteet ilmeisestikin sijaitsevat siten, että niiden voidaan kuvitella muodostavan pinnan. Tilanne on verrattavissa muodossa $y = f(x)$ annettuun käyrään.

Selvyiden vuoksi todettakoon, että lukujen x , y ja z ajatellaan tällöin olevan suorakulmaisia koordinaatteja. Välttämätöntähän tämä ei ole. (Pallokoordinaatteja tunteva lukija pohtikoon, mitä edellä sanotusta tulisi, jos kyseessä olisivatkin pallokoordinaatit $z = r =$ etäisyys origosta, $x = \vartheta =$ maantieteellinen leveys, $y = \varphi =$ maantieteellinen pituus.)

Yksinkertaisena esimerkkinä olkoon suorakulmaisissa koordinaateissa annettu pinta

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

joka on määritelty kaikkialla muualla paitsi origossa. Oheinen kuvio osoittaa, että origon kohdalla pinta käyttäytyy hieman erikoisella tavalla. Funktiosta ei saada origossa jatkuvaa, annetaanpa sille origossa mikä tahansa arvo. Lukija miettiköön, onko hän valmis kutsumaan funktion kuvaajaa pinnaksi. (Määritelmähän ovat tiettyssä määrin mielivaltaisia: ne asetetaan täsmällistämään jokin intuitiivinen idea.) Kuvio on samalla esimerkki siitä, että funktion epäjatkuvuus voi olla monimutkaisempaa, kuin yhden muuttujan funktioiden antaman mielikuvan pohjalta voi kuvitella.



Toisaalta muotoa $F(x, y, z) = 0$ oleva yhtälö tuntuisi ainakin aika usein esittävän pintaa. Esimerkiksi $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ esittää R -säteistä origokeskistä palloa. Muodossa $z = f(x, y)$ esitetty pinta on tämän esitystavan erikoistapaus: $z - f(x, y) = 0$. Toisaalta mikä tahansa kolmen muuttujan funktio F ei kelpaa määrittelemään pintaa: $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ ei esitä mitään; $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ on yksi ainoa piste; $(x - y)^2 + (y - z)^2 = 0$ toteutuu vain, kun $x = y = z$, ts. kyseessä on origon kautta kulkeva suora.

Helpoin ja monikäyttöisin tapa pinnan esittämiseen on kuitenkin sen *parametriesitys*: Olkoon annettuna funktiot $x(u, v)$, $y(u, v)$ ja $z(u, v)$. Kun *parametrit* u ja v saavat kaikki parametrialueen arvot, so. piste (u, v) sijaitsee eräässä uv -tason joukossa, määrittävät funktiot xyz -avaruuden pisteen $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Tämä on pinnan piste.

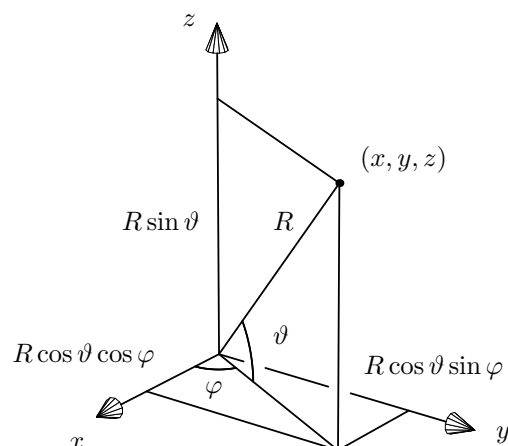
Funktioilta x , y ja z on edellytettävä jonkinlaista säännöllisyyttä, jotta syntyvää pistejoukkoa olisi järkevää kutsua pinnaksi. Jatkuvia niiden tulee ainakin olla. Tämä ei kuitenkaan riitä: jos esimerkiksi $x(u, v) = y(u, v) = z(u, v) = u + v^2 + \sin(uv)$, on aina $x = y = z$, ja pisteet sijaitsevat suoralla. Mitä funktioista itse asiassa on oletettava, ei ole aivan yksinkertaista eikä täysin vakiintunutta matemaattisessa kirjallisuudessaakaan. Lisätietoja kaipaava lukija etsiköön käsiinsä jonkin (hyvän) usean muuttujan analyysia käsittelevän oppikirjan.

Muodossa $z = f(x, y)$ annetulle pinnalle on parametriesitys helposti kirjoitettavissa: parametreiksi valitaan $u = x$ ja $v = y$, jolloin tarvittavat kolme funktiota ovat $x(u, v) = u$, $y(u, v) = v$, $z(u, v) = f(u, v)$.

Parametriesityksen etsiminen pallopinnalle $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ei ole aivan yhtä suoraviivaista. Mahdollisuuksiakin on useita. Pallokoordinaattien perusteella saataisiin

$$x = R \cos \vartheta \cos \varphi, \quad y = R \cos \vartheta \sin \varphi, \quad z = R \sin \vartheta,$$

missä parametrialueena on $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Lausekkeet tulevat ymmärrettäviksi pohtimalla niitä alkeistrigonometrian ja oheisen kuvion valossa. Lukija voi myös laskemalla todeta, että lausekkeiden neliösumma todellakin on R^2 .

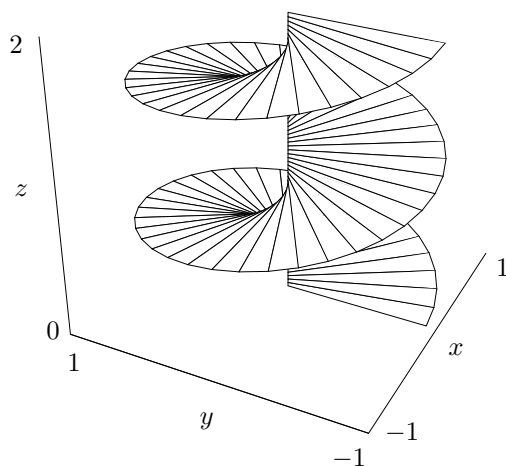


Tällä pallon parametriesityksellä on heikkoutensa: Pallo tavallaan saadaan taivutteleamalla parametritason suorakulmio $\{(\vartheta, \varphi) \mid -\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2, -\pi \leq \varphi \leq \pi\}$ pallopinnaksi ja liimaamalla reunat $\varphi = -\pi$ ja $\varphi = \pi$ yhteen; liimauskohta on pallon meridiaanikäyrä. Liimauskohdan eri puolilla sijaitsevat pallopinnan pisteet voivat olla hyvinkin lähellä toisiaan, mutta niitä vastaavat parametritason pisteet (ϑ, φ) ovat toisistaan kaukana.

Lukija miettiköön myös, mitkä pallopinnan pisteet syntyvät parametritason suorakulmion kahdesta muusta sivusta $\vartheta = -\pi/2$, $\vartheta = \pi/2$.

Hieman yksinkertaisempi esimerkki on *ruuvipinta*:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \frac{v}{2\pi}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 4\pi.$$



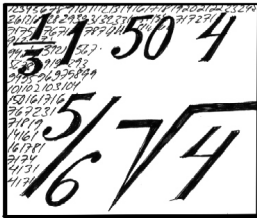
Lopuksi harjoitustehtävä: Millainen on pinta

$$x = (v^2 - 1) \cos u, \quad y = (v^2 - 1) \sin u, \quad z = v ?$$

Lukija miettiköön asiaa ensin pelkästään yhtälöitä pohtimalla. Jos käytävissä on jokin sopiva tietokoneohjelma, pinnan voi piirtää. Tätä varten on kuitenkin ensin löydettävä sopiva parametrialue. Onko pinnalla joitakin erikoisasemassa olevia pisteitä?

P.S. Kuvat ovat peräisin laatimistani oppimateriaaleista: pinnat monisteesta *Vektorimuuttujan analyysi*, Otatieto 1999, ja pallokoordinaatit kirjasta *M niinkuin matematiikka*, MFKA 1998. Jälkimmäinen on saatavissa myös verkkodokumenttina: http://www.math.hut.fi/matta/Iso_M/Tskirja/koord.pdf

Simo K. Kivelä



Roomalaiset numerot – laskentoa ilman kertotaulua

Vaikka normaaliin kirjoitusjärjestelmäämme kuuluvat *arabialaiset numerot* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 ovat saavuttaneet jokseenkin universaalin aseman, roomalaista lukumerkintää näkee yhä kellotauluissa, juhlallisesti ilmaistuissa vuosiluvuissa, kuninkaallisten nimissä (Kaarle XVI Kustaa), joskus amerikkalaisissa vähemmänkin kuninkaallisissa nimissä (Henry Ford III), kirjojen lukujen tai osien järjestysnumeroissa sekä ulkomaalaisten kirjojen esipuheosaston sivunumeroissa. Myös lääkeresepteissä on tapana ilmoittaa annoskoko roomalaisin numeroin.

Roomalaisen numerojärjestelmä perusajatus on yhteenlasku. Se on sama kuin sormilla laskemisen tai helmitaulun tai tukkimiehen kirjanpidon: numeroa esitetään yhtä monella merkillä kuin numeron esittämä luku ilmaisee. Siten 1 = I, 2 = II, 3 = III, 4 = IIII. Koska lukujen kasvaessa menettely tulee kömpelöksi, otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät 5 = V, 10 = X, 50 = L, 100 = C, 500 = D ja 1000 = M. Joidenkin käsitysten mukaan viiden kymmenmonikertoja edustavat V, L ja D olisivat peräisin muinaisten roomalaisten naapureilta, sittemmin roomalaisiin sulautuneilta etruskeilta.

Antiikin roomalaiset muodostivat numeronsa yksinkertaisesti kirjoittamalla näitä merkkejä peräkkäin tarvittavan määrän. Siten esim. 90 = DXXXX ja 1492 = MCCCCLXXXII. Keskiajalla tuli kuitenkin käyttöön lyhennysmerkintä, jota nykyäänkin sovelletaan. Siinä symbolit I, X ja C kirjoitettuna jomman kumman välittömästi suuremman symbolin eteen tulkitaan vähentävästi. Siis IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400 ja CM = 900. Siis 19 = XIX, 49 = XLIV, 1999 = MCMXCIX, 1492 = MCDXCII. Nämä nykyisin ”oikeiksi” kiteytyneet käsitykset roomalaisista numeroista ovat vähän liiankin selkeitä. Tosiasiassa merkintätavat ovat olleet huomattavasti kirjavampia ja käytössä olleiden numeromerkkien valikoimakin suurempi.

Roomalaiset numerot eivät nykyään esiinny yhteyksissä, joissa niillä pitäisi suorittaa laskutoimituksia. Mutta toki roomalaisilla numeroilla on laskettu – käytiinhän antiikissakin kauppaa ja kerättiin veroja. Yhteenlasku alkuperäisillä antiikin merkinnöillä on helppoa: kirjoitetaan vain yhteenlaskettavien merkit peräkkäin ja yhdistetään viiden niput: $434 + 136 = \text{CCCCXXXIIII} + \text{CXXXVI} = \text{CCCCXXXVIIII} = \text{DLXVV} = \text{DLXX}$. Huomaa, että et tässä tarvitse sellaisia ala-asteella tai aikaisemmin ulkoa oppimiasi asioita kuin $6 + 4 = 10$ tai $3 + 3 = 6$. Jos käytetään ”modernimpaa” merkintää, täytyy ottaa huomioon sievennyssääntö: vähentävän I:n, X:n tai C:n kompensoi vastaava lisäävä merkki. Siis $\text{CDXXXIV} + \text{CXXXVI} = \text{CDCXXXXXIVVI} = \text{DXXXXXXVV} = \text{DLXX}$.

Roomalaisten numeroiden kertolasku on helpointa hahmottaa helmitaulunomaisella menetelmällä. Tämä on erityisen selkeää, jos kerrottavassa ja kertojassa ei esiinny yhtä aikaa ”etruskimerkkejä” V, L tai D. Tällöin riittää,

kun kirjoitetaan kerrottavan ja kertojan ”MDCLVI-rakenteet” allekkain käyttämällä jotain laskumerkkiä, vaikkapa x:ää. Jokaista kertojan kaaviossa olevaa merkkiä kohden kirjoitetaan kerrottavan rakenne alkamaan oikealta tämän merkin kohdalta. Lasketaan samassa pystyrivissä olevat merkit yhteen ja sievennetään tarpeen mukaan. Tarkastetaan esimerkkinä kertolaskua XXVI kertaa CXXI eli 26×121 .

M	D	C	L	X	V	I
		x		xx		x
				xx	x	x
		x		xx		x
	x		xx		x	
x		xx		x		
x		xx		x		
MM	D	CCCC	LL	XXXX	V	I

Sievennyksen jälkeen saadaan tulos MMMCXLVI eli 3146.

Etruskimerkkien keskinäinen kertolasku vaatii oman sääntönsä. Tällaisessa kertolaskussa kirjoitetaan asianomaiseen sarakkeeseen edelleen yksi laskumerkki, mutta sen lisäksi seuraavaan vasemmanpuoleiseen kaksi merkkiä. Lasketaan VI kertaa XVI eli 6×16 ja käytetään etruskilukuihin liittyvänä laskumerkkinä selvyuden vuoksi y:tä. Symbolit y ja x ovat kuitenkin ihan samanarvoisia.

L	X	V	I
	x	y	x
		y	x
	x	y	x
x	yy	yx	
L	XXX	VVV	I

Sievennys antaa lopputuloksen XCVI eli 96.

Jos luvuissa käytetään vähennysmerkkintöjä kuten IX tai XL, tarvitaan vielä yksi sääntö. Tällöin merkitään vähentävien symbolien sarakkeeseen esimerkiksi ’illa täydennetty laskumerkki. Jos kertojasarakkeessa on tällainen merkki, kerrottavan siirrossa jokainen pilkuton merkki muutetaan pilkulliseksi ja pilkullinen pilkuttomaksi. Yhteensalaskussa pilkullinen ja pilkuton merkki kumoavat toisensa. Esimerkki XLIV kertaa XLIV eli 44^2 valaisee asiaa:

M	D	C	L	X	V	I
			y	x'	y	x'
			y	x'	y	x'
			y'	x	y'	x
		yy	yx'	yy	yx'	
	y'	x	y'	x		
yy	yx'	yy	yx'			
MM	D'	CCCC	L'L'	XXXX	V'	I

Laskun tulos on MCMXXXVI eli 1936.

Tuntuuko mutkikkaalta? Ehkä tämä onkin hankalaa, mutta toisaalta huomaat, että kertolaskun olennaista apuvälinettä, kertotaulua, et tarvitse ollenkaan. Jos siis huomaat, että sellaisen tiedon kuin $7 \times 6 = 42$ tai $8 \times 7 = 56$ tallentaminen päässä on työlästä, voit yrittää ruveta laskemaan roomalaisin numeroin!

Entä jakolasku? Jakolasku perustuu siihen, että selvitetään montako kertaa jakaja voidaan vähentää vähennettävästä. Lasketaan esimerkiksi CCCLXXVII jaettuna XV:llä.

	C	L	X	V	I
(1)			x	y	
(2)			xx	y	
(3)	xx[x]	(xx)x	xx	x	xx
(4)	xx	yy			
(5)		x	xx	x	xx
(6)		x	yy	y	
(7)					xx

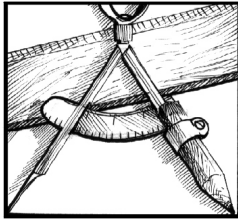
Kaavioon on riville (1) merkitty jakaja ja riville (3) jaettava. Osamäärä kertyy riville (2). Riville (4) on kirjoitettu jakaja siirrettynä kahdesti. Koska L-sarakkeessa oli alkuaan vain yksi merkki, ei kahta L:ää voisi vähentää. Tämän vuoksi C-sarakkeen kolmesta merkistä yksi on lainattu L-sarakkeeseen, jossa sitä vastaa kaksi merkkiä. Linausoperaatio on havainnollistettu hakasulkein ja tavallisin sulkein. Osamäärään on siirretyn luvun ykkössarakkeeseen merkitty yhtä monta merkkiä kuin (4)- riviltä näkyvä jakajan monikerta (tässä siis kaksi). Rivi (4) on sitten vähennetty rivistä (3). Koska seuraava siirto johtaisi siirretyn jonon ykköset etruskimerkien paikalle, kirjoitetaan riville (6) rivin (1) siirron sijasta rivi, joka ottaa huomioon etruskikertosäännön. Vähennys voidaan tehdä vain kerran, joten siirretyn jakajan ykkössarakkeeseen eli sarakkeeseen V tulee vain yksi merkki. Vähennyslaskun tulos rivillä (7) antaa jakojäännöksen. Vastaus luetaan riveiltä (2) ja (7): CCCLXXVII jaettuna XV:llä on XXV, jää II.

Roomalaisen numerojärjestelmän perusajatus, lukuun sisältyvien kymmenpotenssien lukumäärän ilmaiseminen kutakin kymmenpotenssia vastaavan merkin lukumäärällä, esiintyy monissa eri kulttuureissa, jo egyptiläisestä hieroglyfikirjoituksesta alkaen. Muinaiskreikkalaisten kahdesta lukujärjestelmästä toinen, ns. attikalainen järjestelmä, on hyvin samanlainen kuin roomalaisten lukujärjestelmä. Eri kulttuureissa esiintyi myös toisenlaisia lukujenmerkitsemisajatuksia. Muinaisessa Kaksoisvirtainmaassa, nuolenpääkirjoituksen alueella, tuli käyttöön järjestelmä, jossa luvuille 1, ..., 59 oli kullekin oma merkkinsä, mutta luvuille 60 ja 60^2 käytettiin samaa merkkiä kuin luvulle 1, ja kaksi rinnakkain olevaa ykkösen ja kakkosen merkkiä tarkoitti joko lukua $62 = 1 \times 60 + 2$ tai $121 = 2 \times 60 + 1$. Tämä on varhaisin *paikkajärjestelmä*, lukujärjestelmä, jossa sama merkki tarkoittaa eri lukua riippuen siitä, missä asemassa se on muihin numeromerkkeihin nähden. Muinaisilla kiinalaisilla oli käytössä lähes nykyaikainen paikkajärjestelmä, joka kuitenkin toimi niin, että ykkösiä osoittavat merkit saattoivat osoittaa myös satoja, kymmeniä tuhansia jne., kun taas kymmeniä osoittavat merkit tarkoittivat myös tuhansia ja satoja tuhansia.

Meidän kymmenjärjestelmämme juuret johtavat Intiaan, jossa ainakin jo varhaiskeskiajalla noin 500 jKr. oli käytössä paikkajärjestelmä, jossa alkuun yhdeksällä numeromerkillä osoitettiin kaikki positiiviset luvut. Näillä luvuilla laskeminen vaati omat tekniikkansa – ja kertotaulun. Tärkeän palveluksen intialaisten numeroiden maailmanvalloitusmatkalle teki Bagdadissa 800-luvun alkupuolella vaikuttanut *Muhammad ibn Musa Al-Khowarizmi*. Hän kirjoitti arabian kielellä intialaisten numeroiden käyttöoppaan, joka myöhemmin käännettiin latinaksi. Al-Khowarizmin nimi vääntyi muotoon *algorismi*, jolla tarkoitettiin uutta tapaa laskea, ja intialaisista numeroista alettiin puhua arabialaisina. (Al-Khowarizmin kirjan latinankielinen nimi oli kyllä *De numero indorum*) Ei ole vaikea tunnistaa Al-Khowarizmista myös *algoritmi*-sanan alkuperää.

Nyt päättymässä olevan vuosituhantemme (sehän kaikesta millenniumkohusta huolimatta päättyy vasta vuoden 2000 lopussa!) ensimmäisten vuosisatojen aikana uutta laskutapaa kannattaneet *algoristit* ja roomalaisia numeroita sekä helmitaulun eli *abakuksen* käyttöä puolustaneet *abbakistit* kiistelivät menetelmien paremmuudesta. Algoristien voitto tuli hitaasti – ennakkoluulot olivat voimakkaita. Vielä vuonna 1299 annettiin Firenzessä asetus, joka kielsi rahanvaihtajia käyttämästä liiketoimissaan arabialaisia numeroita.

Matti Lehtinen



Pythagoraan lause

Pythagoras Samoslainen

Pythagoras on legendaarinen kreikkalainen matematiikko ja filosofi. Tiedot hänen elämästään ovat epävarmoja ja ristiriitaisia. Tärkein Pythagorasta ja pythagoralaisia koskeva lähde on Lamblichosin (n. 300 eKr.) kirjoittama ”Pythagoraan elämä”. Suoria asiakirjoja ei ole säilynyt vaikka antiikissa kirjoitettiin useita Pythagoraan elämäkertoja. Seuraava kuvaus on peräisin E. S. Loomisilta, joka vuonna 1940 kokosi yhteen 370 todistusta Pythagoraan lauseesta.

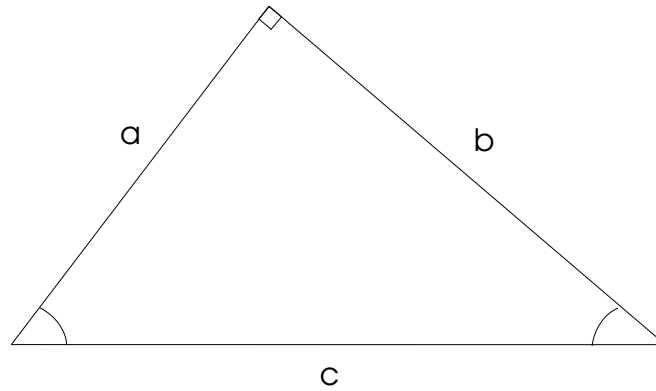
Pythagoras syntyi Tyroksessa 569 eKr., mutta kasvoi Samoksella. Vuonna 549 hän matkusti Miletokseen, jossa hän tapasi Thaleen ja Anaksimandroksen, joista ensimmäinen oli tuolloin 75-vuotias. Miletoksessa Pythagoras opiskeli kosmografiaa, joka tarkoitti fysiikkaa ja matematiikkaa. Pari vuotta myöhemmin hän matkusti Egyptiin, jossa hänestä tuli Theban uskonnollisen seuran jäsen. Kun persialaiset vuonna 526 valloittivat Egyptin, Pythagoras matkusti edelleen Babyloniaan, jossa hän tapasi intialaisia, kiinalaisia ja juutalaisia. Kymmenisen vuotta myöhemmin hän palasi Samokselle.

Kun Pythagoras vuonna 510 joutui tyranni Polykrateen epäsuosioon Samoksella, hän lähti Krotoniin Magna Graeciassa. Siellä hän piti puheita nuorille ja perusti koulun. Hän saikin melko pian suuren joukon oppilaita, joiden kanssa hän keskusteli etiikasta, sielun kuolemattomuudesta ja transmigraatiosta eli sielunvaelluksesta. Vuonna 490 Pythagoras jätti Krotonin ja muutti Tarasiin. Hän kuoli 99-vuotiaana vuonna 469 eKr. Metapontionissa. Prokloksen mukaan Pythagoras ja Thales toivat matematiikan idästä Kreikkaan. [TM93, s. 321]

Pythagoraan lause

Tämä matematiikan kuuluisin ja tunnetuin lause sanoo:

Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan neliö on kateettien neliöiden summa, eli kuvan 1 merkinnöin $c^2 = a^2 + b^2$.

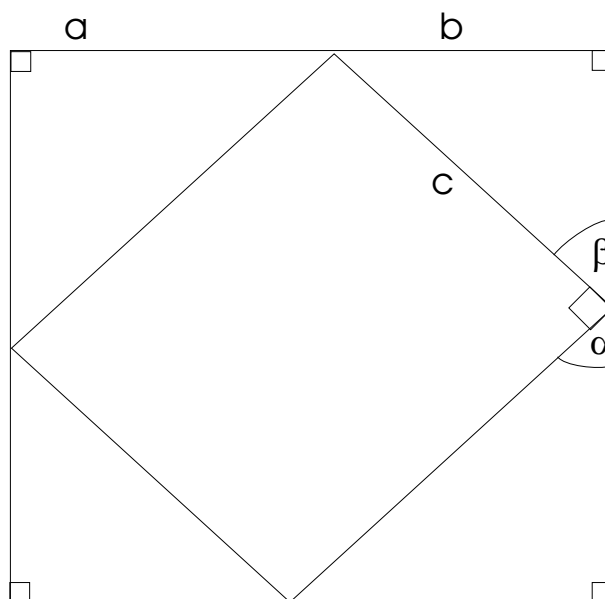


Kuva 1.

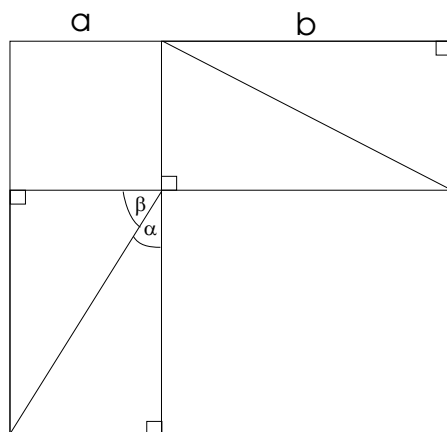
Pythagoraan lausetta havainnollistavia palapelejä ja niihin liittyviä todistuksia

Palapeli 1

[Väi64, s. 48] Kuvassa 2 neliön sivun pituus on $a + b$ kuten myös kuvassa 3, joten molemmat neliöt ovat samankokoisia. Molempiin neliöihin on sijoitettu neljä suorakulmaista kolmiota, joiden kateetit ovat a ja b , hypotenuusa c ja terävät kulmat α ja β . Kolmioiden ulkopuoliset alueet ovat siis yhtäsuuret. Kuvan 2 nelikulmion sivut ovat kaikki yhtä pitkiä. Jokainen kulma on $180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Nelikulmio on siis neliö ja sen ala on c^2 . Kuvassa 3 yhteneviä kolmioita on siirrelty siten, että muodostuu kaksi neliötä, joiden pinta-alat ovat a^2 ja b^2 . Siispä $c^2 = a^2 + b^2$.



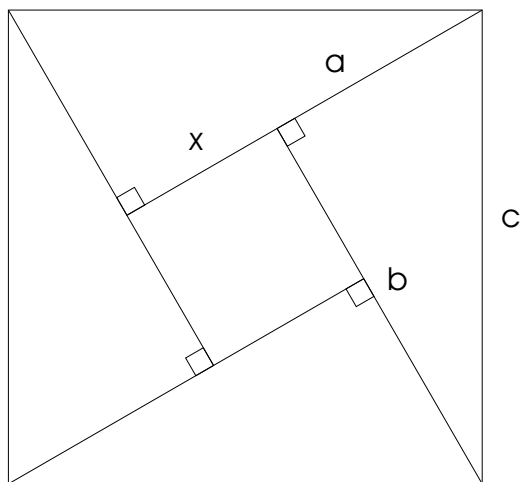
Kuva 2.



Kuva 3.

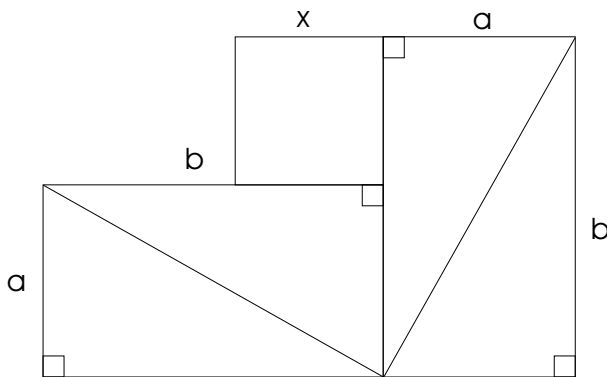
Bhaskaran todistus

Intialainen matemaatikko Bhaskara, joka eli 1150-luvulla, todisti Pythagoraan lauseen näin:



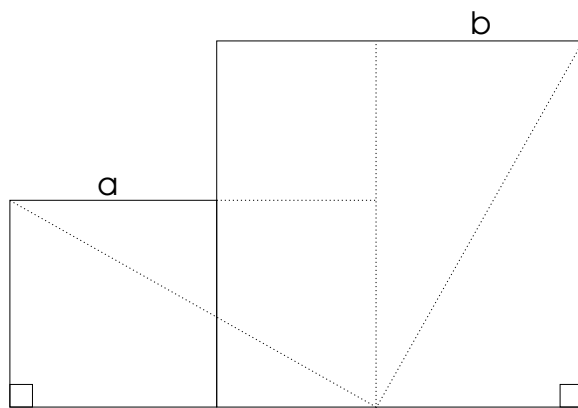
Kuva 4.

Neliön ala kuvassa 4 on kolmion hypotenuusan neliö. Se on jaettu neljäksi suorakulmaiseksi kolmioksi, joista jokainen on identtinen annetun kanssa, sekä pienemmäksi neliöksi [TM93, s. 320]. Pienen neliön sivun pituus x on kateettien erotus $b - a$.



Kuva 5.

Kuvassa 5 on palaset siirretty seuraavasti. Siinä on neljä yhtenevää kolmiota ja pieni neliö. Kuten aiemmin totesimme, on pienen neliön sivu sama kuin kateettien erotus.



Kuva 6.

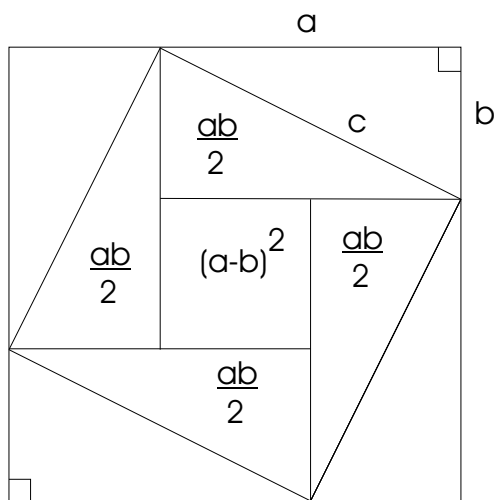
Kuvassa 6 muodostuu kaksi neliötä kateettien sivuista. Todistus perustuu nyt siihen, että kateettien muodostamat neliöt peittävät saman pinta-alan kuin kuvan 4 neliö, joten kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö.

Kiinalainen todistus

Kiinalainen todistus, joka on peräisin teoksesta ”Aritmeettinen klassikko gnomoneista ja taivaiden ympyräradoista”, on seuraava.

Annettu suorakulmainen kolmio on kuvan 7 oikeassa yläkulmassa. Kolmio on peilattu hypotenuusan suhteen, ja näistä on otetut kolme kopiota on sijoitettu neliön muotoon. Keskelle jää pieni neliö, jonka sivun pituus on suorakulmaisten kolmioiden kateettien erotus. Näin ollen

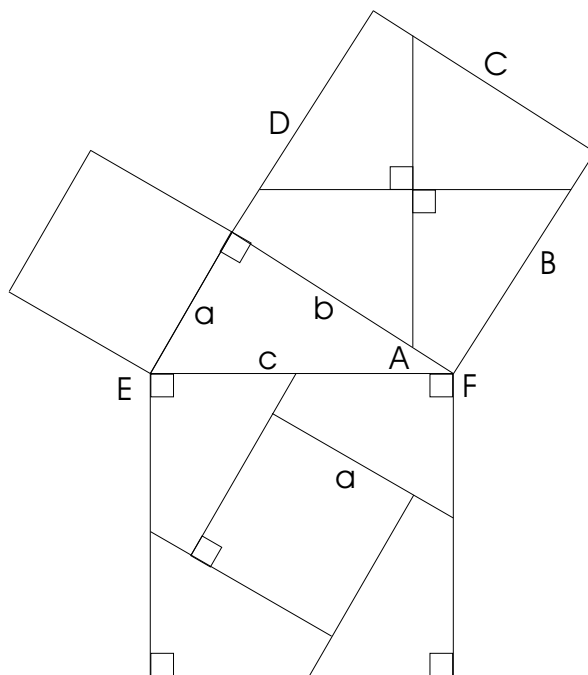
$$c^2 = 4 \left(\frac{ab}{2} \right) + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 \quad [\text{TM93, s.320}].$$



Kuva 7.

Palapeli 2

[TM93, s. 319] Yksi kaunis tapa hahmotella todistus on kuvassa 8:



Kuva 8.

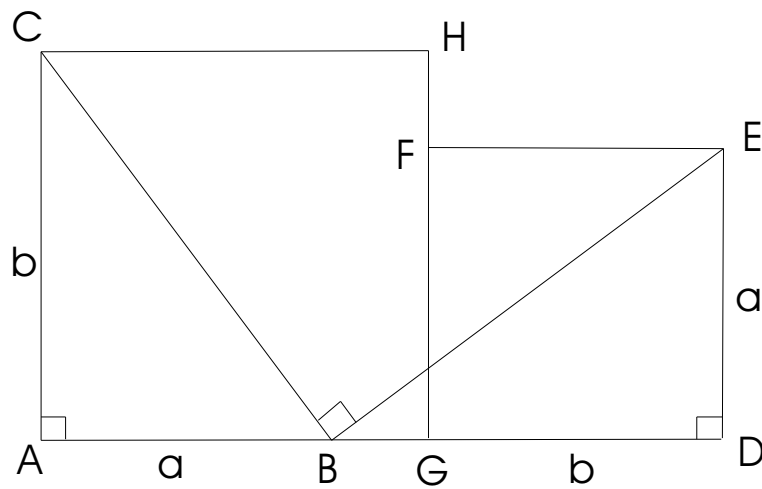
Lyhyemmän kateetin neliö sekä neljä palapelin palaa, joista pitemmän kateetin neliö muodostetaan, voidaan siirtää niin, että ne täyttävät hypotenuusan neliön.

Jaetaan sivua b vasten piirretyn neliön sivut osiin, joiden pituudet ovat $(b+a)/2$ ja $(b-a)/2$. Yhdistetään jakopisteet janoilla AC ja BD . Nelikulmio $EFBD$ on suunnikas, koska $ED \parallel FB$ ja $|ED| = a + (b-a)/2 = (a+b)/2 = |BF|$. Siis $|DB| = c$. Neliön symmetrian vuoksi myös $|AC| = c$. Erotetaan hypotenuusaa vasten piirretystä neliöstä kateetille b piirretyn neliön palojen kanssa yhtenevät palat. Voidaan ajatella, että palat siirretään kuvan osoittamalla tavalla. Keskelle muodostuu nelikulmio, jonka sivut ovat $(b+a)/2 - (b-a)/2 = a$ ja jonka kaikki kulmat ovat symmetrian perusteella suoria; kyseessä on siis neliö. Laskemalla palasten alat saadaan $c^2 = a^2 + b^2$.

Muita Pythagoraan lauseen todistuksia

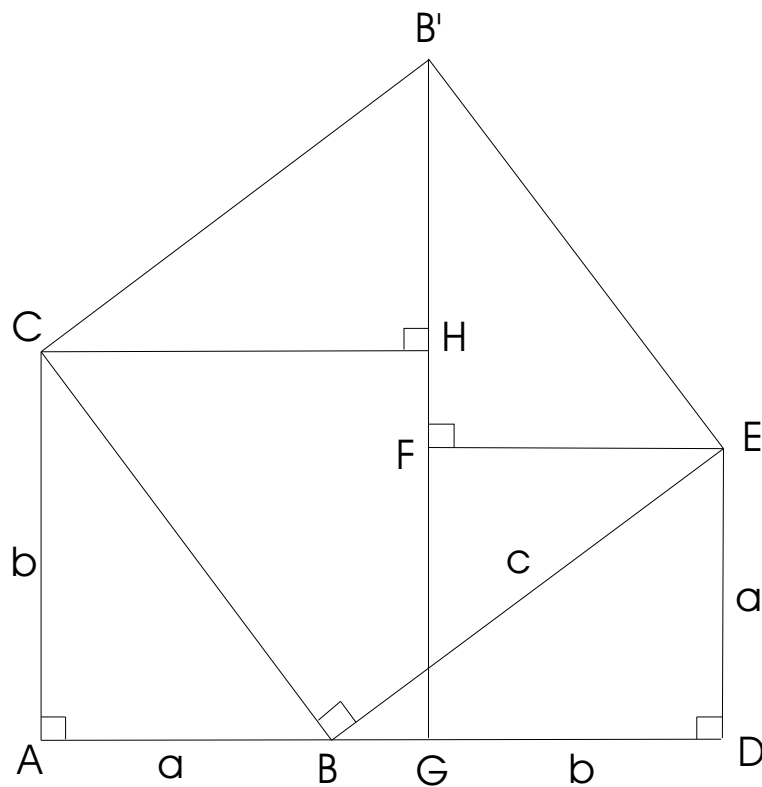
Thabit Ibn Quarran todistus

Thabit Ibn Quarran (n. 880) todistus on yksi kauneimmista [TM93, s. 318-319].



Kuva 9.

Olkoon ABC on annettu suorakulmainen kolmio. Piirretään kolmion ABC kanssa yhtenävä kolmio BDE kuvan 9 osoittamalla tavalla. Piirretään neliöt $DEFG$ ja $ACHG$, joiden sivuina ovat yhtäpitkät kateetit DE ja AB sekä AC ja BD . Kulma $\angle CBE$ on suora.



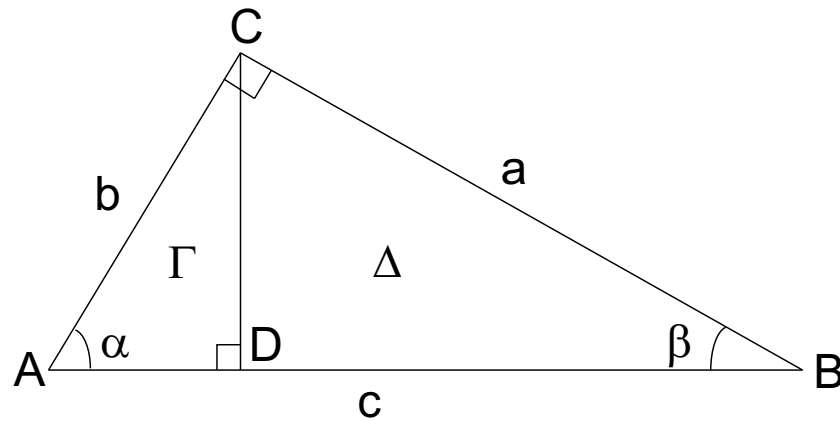
Kuva 10.

Todistus perustuu nyt siihen, että kolmiota ABC kierretään 90° vastapäivään pisteen C ympäri ja kolmiota DEB vastaavasti 90° myötäpäivään pisteen E ympäri kuten kuvassa 10. Kolmio ABC saa tällöin paikan $HB'C$, kun taas kolmio DEB saa paikan FEB' . Neliön $BCB'E$ ala on hypotenuusan $|BC| = |BE|$ neliö. Siirtojen jälkeen tämä neliö on summa kahden kateetin neliöstä. Huomaa, että monikulmion $CBEFH$ ala on sama molemmissa kuvissa.

Nimetön todistus

Mielestäni hienoin todistus Pythagoraan lauseelle on seuraava. Se perustuu kahteen periaatteseen:

- (1) Pinta-alayksikkö on pituusyksikön neliö.
- (2) Jos voidaan löytää kolme yhdenmuotoista kuviota, jotka voidaan piirtää kolmion sivuille siten, että kateeteilla a ja b olevien kuvioiden alojen summa $\Gamma + \Delta$ on yhtä kuin hypotenuusalla c olevan kuvion Σ ala todistus on selvä. Oletetaan nimittäin, että pätee $\Sigma = \Gamma + \Delta$. Tällöin seuraa (1):stä, että $c^2 = a^2 + b^2$.



Kuva 12.

Mutta jo kuvassa 12 oleva yksinkertainen konstruktio antaa yhden mahdollisuuden [TM93, s. 320]. Se sisältää vaaditut yhdenmuotoiset kolmiot ADC , CDB ja ACB .

Kolmiot ADC , CDB ja ABC ovat yhdenmuotoisia:

Jokaisessa on suorakulma

Kulma $\angle DAC = \alpha$ on molemmissa kolmioissa ADC ja ABC . Siis $\triangle ADC \sim \triangle ABC$.

Kulma $\angle DBC = \beta$ on molemmissa kolmioissa DBC ja ABC . Siis $\triangle DBC \sim \triangle ABC$.

Siis $\triangle DBC \sim \triangle ABC \sim \triangle ADC$.

$\triangle ADC$ on piirretty sivulle AC

$\triangle DBC$ on piirretty sivulle BC

$\triangle ABC$ on piirretty sivulle AB

Olkoon A_1 kolmion $\triangle ADC$ ala, A_2 on kolmion $\triangle DBC$ ala ja A_3 kolmion $\triangle ABC$ ala.

$$A_2 : A_3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$A_1 : A_3 = \frac{b^2}{c^2}$$

$$A_2 = A_3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$+ A_1 = A_3 \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$A_3 = A_1 + A_2 = A_3 \cdot \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \right] \quad \| : A_3$$

$$1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \quad \| \cdot c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Viitteet

- [DI78] P. Dedron and J. Itard. *Mathematics and mathematicians 2*. The Open University Press., Stony Stratford, 2nd edition, 1978.
- [TM93] Jan Thompson and Thomas Martins. *Matematiikan käsikirja, käännös Soft Artist Oy*. WSOY, Juva, Tampere, 1993.
- [Väi64] Väisälä. *Keskikoulun geometria, kolmas painos*. Werner–Söderström OY, Porvoo–Helsinki, 3. painos, 1964.

Janis Künnap



Englannissa kohotetaan matematiikan kouluopetuksen tasoa

Englannissa on huomattu, että matematiikan oppimistulokset koulutasolla ovat huonoja. Eräissä prof. David Burghesin (Exeter) ryhmän suorittamissa kansainvälisissä vertailuissa englantilaisia huonommin pärjäsivät vain suomalaiset ja norjalaiset. Kansallisiin projektein yritetään nyt kohottaa tasoa. Hallitus seuraa tilannetta tarkkaan. Kaikissa kouluissa tehdään kansallisia testejä (7-, 11-, 14-, 16- ja 18-vuotiaille) ja mikäli oppimistulokset ovat huonoja, koulu voidaan jopa sulkea tai opettaja erottaa. Testien tulokset ovat julkisia ja vanhemmat ottavat tulokset huomioon koulua valitessaan. Vaikeutena koulujen kannalta on se, että pätevistä matematiikan opettajista on kova pula. Työmarkkinoilla heille on kysyntää houkuttelevammilla aloilla ja koulut voivat joutua tyytymään tilapäiseen, epäpätevään ja usein vaihtuvaan työvoimaan. Epäpätevien opettajien käyttäminen ei siis ole Englannissa - päinvastoin kuin Suomen eräillä paikkakunnilla - säästökeino, vaan pätevää opettaja-voimaa ei todellakaan ole saatavana kaikkiin kouluihin.

Koulu aloitetaan 5-vuotiaana. Menossa on National Numeracy Strategy, joka ei ole pakollinen ohjelma, mutta johon melkein kaikki koulut osallistuvat, koska edellämainitut testit ovat pakolliset kaikille. Alasteella matematiikan oppitunteja on viikossa viisi. Pääsälaskutaitoja korostetaan, eikä laskimen käyttöä

lainkaan rohkaista alle 11-vuotiaille. Unkarilaisista opetusmenetelmistä on otettu paljon vaikutteita ja käynnissä on unkarilaisten kanssa yhteistyönä tehty englantilaiseen ympäristöön sovitettun unkarilaisen materiaalin kokeilukäyttö. Seurantatutkimuksen mukaan tulokset ovat hyviä.

Kouluille tarjotaan myös lisämateriaalia, Internetissä on eräänlainen matematiikkaklubi, Enrich-projekti, jonka käyttäjiä on nyt kymmeniä tuhansia eri puolilla maailmaa. Taustavoimina toimii mm. Cambridgen yliopiston matemaatikkoja ja matematiikan opiskelijoita. Projektin osoite on <http://nrich.maths.org/>, ja Cambridge STIMULUS Project löytyy osoitteesta <http://stimulus.maths.org/>.

Mukana on myös Royal Institution of Great Britain, joka on tukenut maan eri puolilla lauantaiaamuisin järjestettävää matematiikan lisäopetusta (Master Classes). Erityinen 10 vuoden professuuri on luotu, jotta tieto matematiikan merkityksestä leviäisi suurelle yleisölle. Professorina on John Barrow, jonka kirjoja on käännetty suomeksikin. Hänen virkatehtäviinsä ei kuulu opetusta, vaan tutkimusta ja matematiikan merkityksestä kertomista. Rahoitusta tällaiseen toimintaan saadaan mm. Cambridge University Pressiltä, Examination Boardilta ja veikkausvaroista.

matematiikan laitos
Helsingin yliopisto