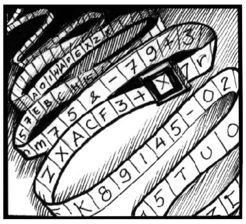


Tavallisia differentiaaliyhtälöitä Mathematicalla

Teknillisen korkeakoulun *MatTa*-projektissa kehitetään tietotekniikkaa hyödyntävää opiskelumateriaalia ja samalla tutkitaan opiskelijan työskentelyä hänen käyttäessään projektissa tuotettua materiaalia. Projektiin liittyen pidin Helsingin matematiikkalukiossa (Maunulan yhteiskoulu) kurssin, jossa opiskeltiin tavallisia differentiaaliyhtälöitä Mathematican (Mathematica 1988) avulla. Sekä tässä artikkelissa että myöhemmin ilmestyvässä kerron joitakin esimerkkejä kurssilla käsitellyistä aiheista.

Taustatietona mainittakoon, että kurssi järjestettiin kokonaan tietokoneluokassa, jossa opiskelijat annettujen ohjeiden avulla tutkivat differentiaaliyhtälöitä Mathematicaa apuna käyttäen. Opettaja oli koko ajan läsnä opastamassa. Noin kaksi viikkoa kurssin alusta kului Mathematicaan tutustumiseen. Vasta sen jälkeen alkoi perehtyminen differentiaaliyhtälöihin.

Mathematica on Solmun numerossa hrefhttp://www.math.helsinki.fi/Solmu/solmu12/2/1999–2000 esitellyn Maplen tavoin mittava symbolilaskentaohjelmisto. Vrt. `http://www.math.helsinki.fi/Solmu/solmu12/apiola/`.

Differentiaaliyhtälöitä toisella tavalla

Differentiaaliyhtälöitä käsitellään usein vain opetellen joukko mekaanisia tietyn tyyppisten yhtälöiden ratkaisukeinoja. Tällöin saattaa jäädä mielikuva, että kaikki differentiaaliyhtälöt voidaan ratkaista analyyttisesti. Tätä käsitystä vahvistaa se, että alkuarvotehtävän numeeriseen ratkaisemiseen perehdytään usein eri kurssissa (jos aikaa jää). Differentiaaliyhtälön ratkaisun kvalitatiivinen tarkastelu jää myös yleensä pintapuoliseksi.

Maunulassa pidetyllä kurssilla panostettiin lähinnä differentiaaliyhtälön kvalitatiiviseen tarkasteluun sekä numeerisiin ratkaisumenetelmiin.

Laskentaohjelmilla voidaan vaivattomasti piirtää suuntakenttiä ja faasitasoesityksiä ja tarkastella näiden avulla ratkaisun/ratkaisujen ominaisuuksia.

Laskentaohjelmat tarjoavat myös loistavat puitteet differentiaaliyhtälöiden numeeristen ratkaisumenetelmien opiskelulle. Ohjelman avulla voidaan verrata differentiaaliyhtälön numeerisia ratkaisumenetelmiä, pienentää askelpituutta ja tutkia jopa kaoottisia tapauksia. Aikaa jää asioiden pohtimiseen mekaanisen suorittamisen sijasta.

Yksinkertaisimpien numeeristen menetelmien ohjelmoiminen tietokoneelle ei myöskään kokeilukurssilla tuottanut opiskelijoille ongelmia. Tästä aiheesta lisää myöhemmin ilmestyvässä artikkelissa.

Autonominen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

Autonominen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa $y' = f(y)$. Yleisesti autonomisessa yhtälössä tuntemattomana olevan funktion argumenttia ei esiinny yhtälössä sellaisenaan, vaan siis ainoastaan tuntemattoman funktion argumenttina.

Tarkastellaan esimerkkinä autonomista ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä

$$y' = y(2 - y).$$

Yhtälö on separoituva ts. siinä esiintyvät muuttujat voidaan erottaa ja tätä kautta yhtälö voidaan ratkaista analyyttisesti. Symbolilaskentaohjelmat osaavat joukon erilaisia ratkaisukeinoja, niinpä esimerkiksi Mathematica osaa ratkaista tämän yhtälön:

$$\mathrm{DSolve}[y'[t] == y[t](2 - y[t]), y[t], t]$$

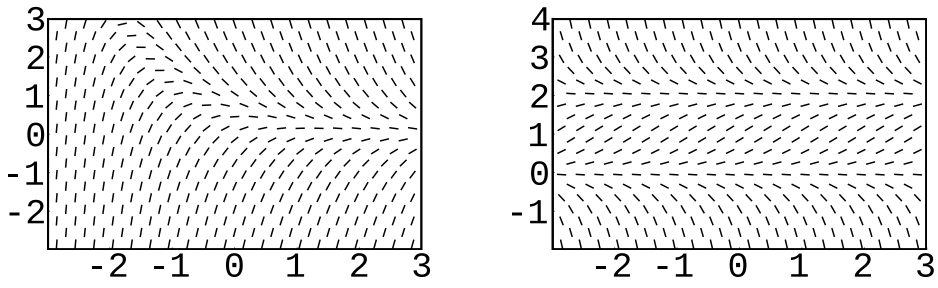
$$\{\{y[t] \to \frac{2\ e^{2\ t}}{e^{2\ t} - e^{2\ \mathrm{C}[1]}}\}\}$$

Yhtälöstä nähdään suoraan, että vakiofunktiot $y = 0$ ja $y = 2$ ovat yhtälön erikoisratkaisuja. Usein ratkaisujen lausekkeet ovat sen verran mutkikkaita, että ratkaisufunktioiden käyttäytymisen analysointi suoraan lausekkeesta saattaa osoittautua hankalaksi.

Kvalitatiivinen tarkastelu

Tarkastellaan nyt differentiaaliyhtälön ratkaisuja *kvalitatiivisesti*, eli tutkitaan, mitä itse differentiaaliyhtälö kertoo ratkaisujen laadullisesta käyttäytymisestä.

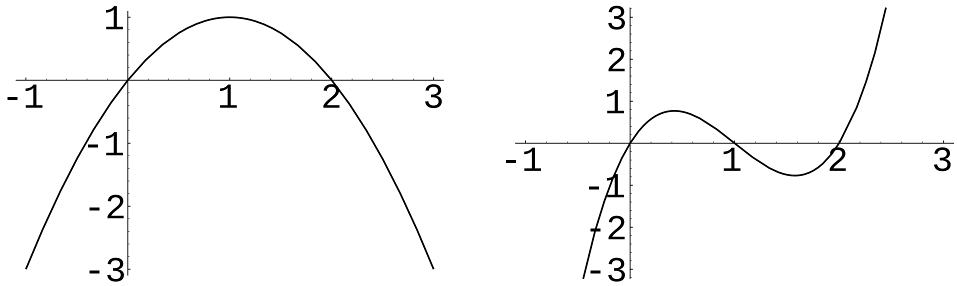
Kvalitatiivisessa tarkastelussa käytetään usein apuna differentiaaliyhtälön *suuntakenttää*. Differentiaaliyhtälön $y' = f(t, y)$ suuntakenttä muodostetaan piirtämällä sopiviin hilapisteisiin (t, y) jananpätkät, joiden kulmakertoimet saadaan lausekkeesta $f(t, y)$. Vertaa kuvan 1 suuntakenttiä. Miten autonomisuus näkyy suuntakentästä?



Kuva 1: Differentiaaliyhtälöiden $y' = e^{-t} - 2y$ ja $y' = y(2 - y)$ suuntakentät.

Mitä differentiaaliyhtälö $y' = y(2 - y)$ sitten kertoo yhtälön ratkaisufunktioista? Koska differentiaaliyhtälö on autonominen, ratkaisufunktioiden $y = y(t)$ derivaatta riippuu ainoastaan funktion y arvosta. Välittömästi löydetään yhtälön vakioratkaisut eli *tasapainoratkaisut*: $y = 0$ tai $y = 2$. Muut ratkaisukäyrät eivät voi leikata näitä, joten muut ratkaisut sijaitsevat alueissa $y < 0$, $0 < y < 2$ tai $y > 2$.

Derivaatan kuvaaja (kuva 2) on y:n suhteen alaspäin aukeava paraabeli (nollakohdat $y = 0$ ja $y = 2$). Derivaatta on siis positiivinen, kun $0 < y < 2$, joten tässä alueessa olevat ratkaisut ovat kasvavia funktioita. Lisäksi ratkaisut lähestyvät arvoa 2, kun t lähestyy ääretöntä. Vastaavasti derivaatta on negatiivinen alueissa $y < 0$ ja $y > 2$, joten näiden alueiden ratkaisut ovat väheneviä funktioita. Alueen $y > 2$ ratkaisut lähestyvät myös lukua 2, kun t lähestyy ääretöntä. Alueen $y < 0$ ratkaisut taas vähenevät rajatta.



Kuva 2: Lausekkeiden $y(2-y)$ ja $2y^3 - 6y^2 + 4y$ kuvaajat.

Paraabelista voidaan myös nähdä välillä $0 < y < 2$ olevien ratkaisukäyrien käännepiste $y = 1$. Kuperuuden suunnat saadaan selville esimerkiksi derivoimalla differentiaaliyhtälöä puolittain, jolloin saadaan yhtälö

$$y'' = 2y' - 2yy'.$$

Kun tähän sijoitetaan alkuperäisestä yhtälöstä y':n lauseke, saadaan

$$y'' = 2(y(2-y)) - 2y(y(2-y)) = 2y^3 - 6y^2 + 4y.$$

Laskemalla y'':n nollakohdat ja tutkimalla lausekkeen y'' merkkiä (kuva 2) havaitaan, että välille $y > 2$ sijoittuvat ratkaisut ovat alaspäin kuperia ja välille $y < 0$ sijoittuvat ylöspäin kuperia. Välille $0 < y < 2$ sijoittuvien ratkaisujen toinen derivaatta vaihtaa merkkiään positiivisesta negatiiviseksi ohittaessaan kohdan $y = 1$, joten tässä kohdassa näiden ratkaisujen kuperuussuunta muuttuu alaspäin kuperasta ylöspäin kuperaksi.

Autonominen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

Autonominen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa $y'' = f(y, y')$. Tämä voidaan kirjoittaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöpariksi

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(y,z). \end{cases}$$

Kun tämä kirjoitetaan muotoon

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = f(y,z) \end{cases}$$

ja jaetaan puolittain, saadaan

$$\frac{dz}{dy} = \frac{f(y,z)}{z}.$$

Tämän yhtälön oikealle puolelle voidaan laskea arvo jokaisessa yz-tason pisteessä, jossa se on määritelty. Tällä tavoin voidaan piirtää suuntakenttä yz- eli yy'-tasoon. Suuntakenttä kuvaa ratkaisukäyriä

$$\begin{cases} y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

tässä tasossa. Muuttuja t on siis käyräparametrin asemassa. Kun tähän suuntakenttään piirretään alkuehdon $y(0) = a$, $z(0) = b$ toteuttava ratkaisukäyrä, saadaan tämän alkuehdon toteuttavan ratkaisun *faasitasoesitys*. Tasoa yz sanotaan usein *faasitasoksi*.

Tutustutaan faasitasoesitykseen esimerkin avulla.

Harmoninen värähtelijä

Tutkitaan kappaletta (massa m), joka on ripustettu pystysuoraan kierrejouseen, jonka jousivakio on k. Kappale saatetaan pystysuoraan värähdysliikkeeseen poikkeuttamalla se tasapainoasemasta ja antamalla sille lähtönopeus v_0. Olkoon positiivinen suunta ylöspäin. Kappaleeseen vaikuttaa tasapainoasemaa kohti suuntautuva harmoninen voima $F = -ky$, missä y on kappaleen poikkeama tasapainoasemasta. Kappaleen liikeyhtälö on

$$my'' = -ky.$$

Kappaleen liikettä kuvaa siis vakiokertoiminen ja lineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$my'' + ky = 0.$$

Alkuehto $y(0) = y_0$ ja $y'(0) = v_0$ määrää yksikäsitteisesti kappaleen radan. Käsin yhtälöä ratkaistaessa muodostetaan yhtälöä vastaava karakteristinen yhtälö $r^2 + k/m = 0$, jonka ratkaisut ovat $r = \pm i\sqrt{k/m}$. Värähtelevän kappaleen ratakäyräksi saadaan (käsin tai koneella)

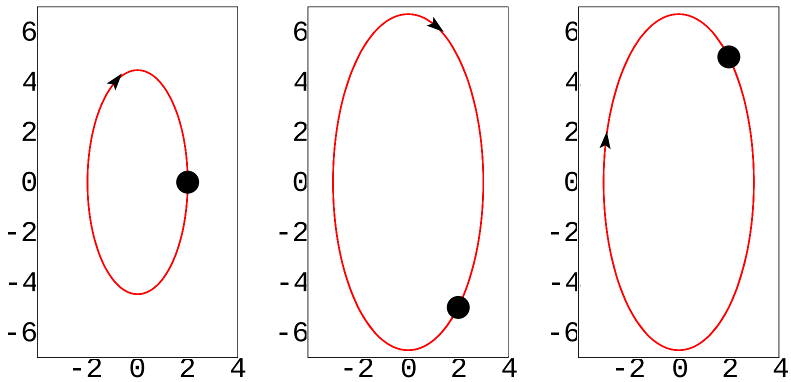
$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

missä on kirjoitettu $\sqrt{k/m} = \omega_0$, joka kuvaa värähtelyn ominaistaajuutta. Erityisesti, jos alkunopeus $v_0 = 0$, liikeradan yhtälö on $y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t)$.

Alkuarvotehtävän ratkaisu voidaan esittää faasitasossa muokkaamalla differentiaaliyhtälö yhtälöpariksi

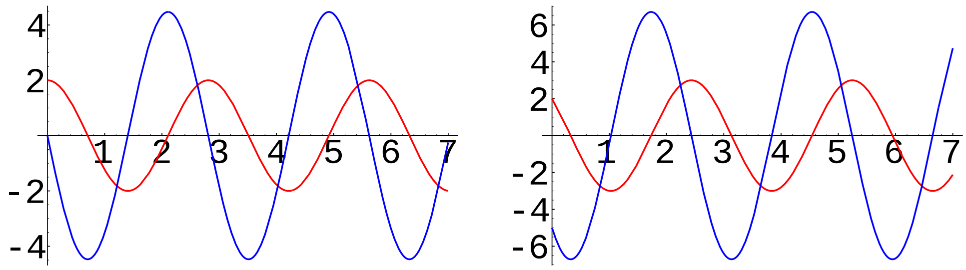
$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\dfrac{k}{m} y. \end{cases}$$

Olkoon nyt jousivakio $k = 5$ ja kappaleen massa $m = 1$. Seuraavassa kuvasarjassa (kuva 3) on kolmen eri alkuehdon määräämien ratkaisujen faasitasoesitykset ts. kuvat paikka–nopeus-koordinaatistossa. Etsi faasitasoesityksistä kohdat, joissa kappale ohittaa tasapainoaseman tai on ääriasemissa. Milloin kappaleen nopeus on positiivinen/negatiivinen ja milloin se on itseisarvoltaan pienin/suurin. Miten kappaleen alkunopeus vaikuttaa amplitudiin?



Kuva 3: Yhdistä harmonisen värähtelijän ratkaisukäyrän faasitasoesitys oikeaan alkunopeuteen. Kaikissa alkupoikkeama $y(0) = 2$. Alkunopeudet ovat $y'(0) = 0$, $y'(0) = -5$ ja $y'(0) = 5$.

Kuvassa 4 on piirrettyinä kahden kuvassa 3 esitetyn ratkaisun faasitasoesityksen aikariippuvuuskuvat sekä paikalle että nopeudelle. Mieti, minkä kuvien esitykset ovat kyseessä?



Kuva 4: Kahdella eri alkuehdolla aikariippuvuuskuvat paikalle ja nopeudelle.

Vaimeneva värähtely

Harmonisen värähtelyn amplitudi säilyy muuttumattomana. Jokainen todellinen värähtelijä kuitenkin vaimenee vähitellen, ellei sen värähtelyä ylläpidetä ulkoisella voimalla. Sen energia kuluu vähitellen työhön liikettä vastustavia voimia vastaan. Oletetaan nyt, että kappaleeseen vaikuttaa harmonisen voiman lisäksi kappaleen nopeuteen verrannollinen vastusvoima

$$F_v = -\beta v.$$

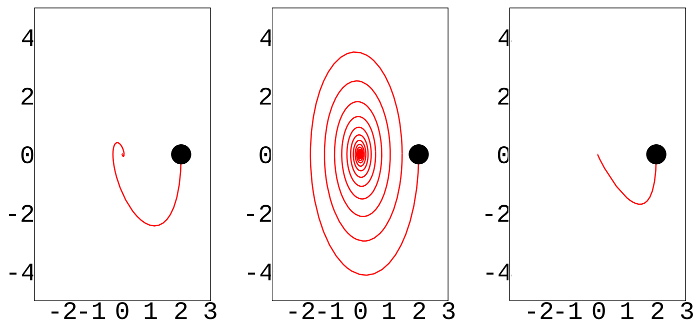
Vaimennetun värähtelijän liikeyhtälöksi saadaan

$$my'' = -ky - \beta y'.$$

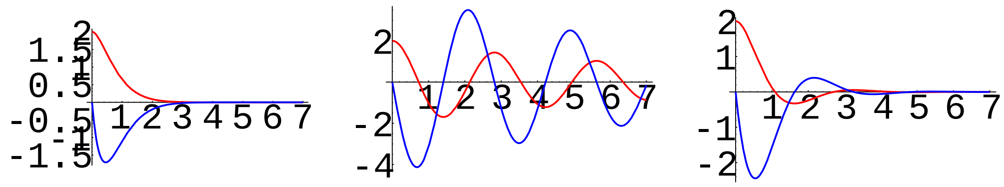
Osaatko muokata yhtälön ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöpariksi?

Tarkastelemalla yhtälöä vastaavan karakteristisen yhtälön juurien eri tapauksia (kaksi eri suurta reaalijuurta, reaalinen kaksoisjuuri, kompleksiset juuret) saadaan kolmen tyyppistä vaimenevaa värähtelyä.

- Ylivaimeneva värähtely, jolloin kappale ei värähtele, vaan lähestyy eksponentiaalisesti tasapainoasemaansa.
- Kriittinen vaimennus, jolloin tasapainoasemastaan poikkeutettu kappale heilahtaa korkeintaan kerran tasapainoaseman ohi ja lähestyy sitä sitten asymptoottisesti.
- Vaimeneva värähtely, jolloin kulmataajuus on vakio, mutta pienempi kuin vastaavan vaimenemattoman värähtelyn ominaiskulmataajuus. Värähtelyn amplitudi pienenee eksponentiaalisesti.



Kuva 5: Kolmen erityyppisen vaimenevan värähtelyn faasitasoesitykset. Mikä vastaa mitäkin?



Kuva 6: Kolmen erityyppisen vaimenevan värähtelyn aikariippuvuuskuvat. Yhdistä kuvan 5 kuviin.

Lopuksi

Edellä esitettyjen esimerkkien suuntakenttä, faasitasokuvat ja aikariippuvuuskuvat on toteutettu kaupallisella VisualDSolve-paketilla (Schwalbe & Wagon 1997). Nämä voidaan esittää Mathematicassa ilman tätä pakettiakin. *MatTa*-projektissa on myös kehitteillä kaupallisista ohjelmistoista riippumaton differentiaaliyhtälöiden visualisoimiseen tarkoitettu paketti nimeltään *DiffEqWeb*. Testiversio on löydettävissä osoitteesta `http://www.math.hut.fi/~spara/`.

Differentiaaliyhtälöiden kvalitatiivista tarkastelua varsin laajasti käsiteltynä löytyy mm. kirjoista (Hubbard & West 1991) ja (Hubbard & West 1991). Nykyään myös monissa differentiaaliyhtälöitä käsittelevissä yliopistojen peruskurssitason kirjoissa on kiinnitetty huomiota kvalitatiiviseen tarkasteluun.

Edellä esitettyjä esimerkkejä voidaan tarkastella myös ilman interaktiivista laskentaohjelmistoa; kuten juuri olet tämän lukiessasi tehnytkin. Tietokone tarjoaa kuitenkin mahdollisuuden muuttaa yhtälöitä, alkuehtoja yms. ja tarjoaa täten loistavan ympäristön erilaisille kokeiluille.

Viitteet

Mathematica (1988), Wolfram Research, Inc. (Stephen Wolfram), Champaign, Illinois, USA; `http://www.wri.com/`, Suomessa `http://www.clinet.fi/naykki/` .

Dan Schwalbe & Stan Wagon (1997), *VisualDSolve, Visualizing Differential Equations with Mathematica*, TELOS, The Electronic Library of Science, Springer-Verlag, New York.

John H. Hubbard & Beverly H. West (1991), *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach Part I: Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

John H. Hubbard & Beverly H. West (1995), *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach Part II: Higher-Dimensional Systems*, Springer-Verlag, New York.

Riikka Nurmiainen
`Riikka.Nurmiainen@evitech.fi`

Artikkelin kirjoittaja on Teknillisen korkeakoulun *MatTa*-projektissa mukana oleva Espoon-Vantaan teknillisen ammattikorkeakoulun matematiikan lehtori.