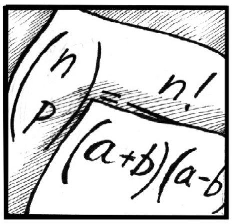

Eräs (kakkosen) potenssien erikoisuus

On olemassa kakkosen potensseja, jotka alkavat ykkösellä kuten $2^4 = 16$ tai $2^7 = 128$, kakkosella kuten $2^1 = 2$, $2^8 = 256$ tai $2^{11} = 2048$, kolmosella kuten $2^5 = 32$. Mutta onko kakkosen potenssia, jonka ensimmäinen numero on 7? Entä kakkosen potenssia, jonka ensimmäiset numerot ovat 2000?

Laskimella tai sopivalla laskentaohjelmalla voi tehdä kokeita. Esimerkiksi luku $2^{46} = 70368744177664$ on pienin kakkosen potenssi, joka alkaa seitsemällä, ja pienin kaksinumeroinen luku, joka ei esiinny lukua 2^{100} pienempien kakkosen potenssien kahtena ensimmäisenä numerona on 44 (mutta

$$2^{145} = 44601490397061246283071436545296723011960832$$

alkaa 44:llä).

Kokeilemalla saattaisi löytyä vastaus ensimmäisen kappaleen viimeiseenkin kysymykseen, mutta laskeminen saattaisi olla toivottoman työlästä. Matematiikassa voidaan kuitenkin usein vastata myöntävästi muotoa ”onko tyyppiä T olevaa asiaa olemassa?” olevaan kysymykseen ilman, että yhtään tyyppiä T olevaa asiaa konkreettisesti havaitaan. Tällä kertaa voidaan osoittaa seuraava väite on todeksi: annettakoon mikä hyvänsa numerosarja $abcd\ldots kl$, niin on olemassa kakkosen potenssi, jonka ensimmäiset numerot ovat kyseiset $abcd\ldots kl$.

Tämä väite tulee todistetuksi, kun näytetään toteen, että olipa A mikä positiivinen kokonaisluku hyvänsä, löytyvät eksponentit n ja t siten, että

$$A \cdot 10^t \le 2^n < (A+1) \cdot 10^t.$$

Tällöin nimittäin luku 2^n alkaa numerosarjalla A. Kymmenkantaisten logaritmien avulla epäyhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$t + \log A \le n \log 2 < t + \log(A+1). \tag{1}$$

Todistamme, että epäyhtälöt (1) toteuttavia lukuja n ja t on olemassa. Tätä varten merkitsemme $v = \log A$ ja $u = \log(A+1)$. Silloin

$$u - v = \log(A+1) - \log A = \log\left(\frac{A+1}{A}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{A}\right) \le \log 2 < 1.$$

Tarkastellaan lukujen $\log 2^n = n \log 2$ *desimaaliosia*. Käytetään näistä merkintää $d(n)$. Todistetaan, että nämä desimaaliosat ovat kaikki erisuuria. Jos nimittäin joillain i ja j olisi $d(i) = d(j)$ eli lukujen $i \log 2$ ja $j \log 2$ desimaaliosat olisivat samat, niin $(i-j)\log 2$ olisi kokonaisluku ja $\log 2$ olisi kahden kokonaisluvun osamäärä eli rationaaliluku. Olisi siis $\log 2 = \frac{p}{q}$, $q \log 2 = \log 2^q = p$ ja $2^q = 10^p$. Viimeinen yhtälö on kuitenkin päivänselvästi mahdoton, koska sen oikea puoli on viidellä jaollinen luku, mutta vasen puoli ei.

Koska kaikilla n on $0 < d(n) < 1$ ja eri lukuja $d(n)$ on äärettömän monta, lukujen joukossa täytyy olla sellaisia, joiden etäisyys toisistaan on pienempi kuin $u - v$. Olkoot $d(s)$ ja $d(s + r)$, missä $r > 0$, kaksi tällaista lukua. Ruvetaan tarkastelemaan lukuja $d(s)$, $d(s+r)$, $d(s+2r)$, $d(s+3r)$, $\ldots$. Jonon peräkkäisten lukujen erotus on joko $|d(s+r) - d(s)|$ tai $1 - |d(s+r) - d(s)|$. (Jälkimmäinen tilanne tulee, jos peräkkäisistä luvuista toinen sattuu olemaan lähellä ykköstä ja toinen lähellä nollaa.) Luvut $d(s+jr)$ seuraavat toisiaan muuten tasavälisesti, lukua $u - v$ pienemmin välein, paitsi että ne hyppäävät joskus läheltä nollaa lähelle ykköstä tai päinvastoin, kumpaan suuntaan nyt sattuvatkaan kasvamaan. Niiden ääretön jono ei silloin voi sivuuttaa mitään $(u - v)$:n pituista väliä. Jonkin niistä, sanokaamme luvun $d(s + kr)$, on pakko osua myös lukujen $\log A$ ja $\log(A + 1)$ desimaaliosien väliin (tai jos $\log A$:n ja $\log(A+1)$:n välissä sattuu olemaan kokonaisluku, $\log A$:n desimaaliosan ja ykkösen tai nollan ja $\log(A+1)$:n desimaaliosan väliin). Mutta tämä merkitsee, että jos merkitään $n = s+kr$, niin on olemassa kokonaisluku t siten, että (1) toteutuu.

Jos tätä todistusta ryhtyy tarkemmin miettimään, huomaa, että luvun 2 ominaisuuksia ei käytetty muuten hyväksi kuin siinä, että yhtälö $2^q = 10^p$ osoittautui mahdottomaksi. Tästä seuraa, että jos m ei ole kymmenen potenssi (jonka kaikki potenssit alkavat ykkösellä!), niin jokaista ajateltavissa olevaa numerosarjaa kohden on olemassa jokin tällä numerosarjalla alkava m:n potenssi.

Todistuksia, jotka yllä kerrottuun tapaan varmistavat jonkin asian olemassa olevaksi kertomatta kuitenkaan, miten tällainen asia löydetään, sanotaan *olemassaolotodistuksiksi*. Olemassaolotodistus synnyttää lisäkysymyksiä ja tutkimisen tarvetta. Jos löydät kakkosen tai jonkin muun luvun potensseista mielenkiintoista, kerro Solmulle!

Matti Lehtinen