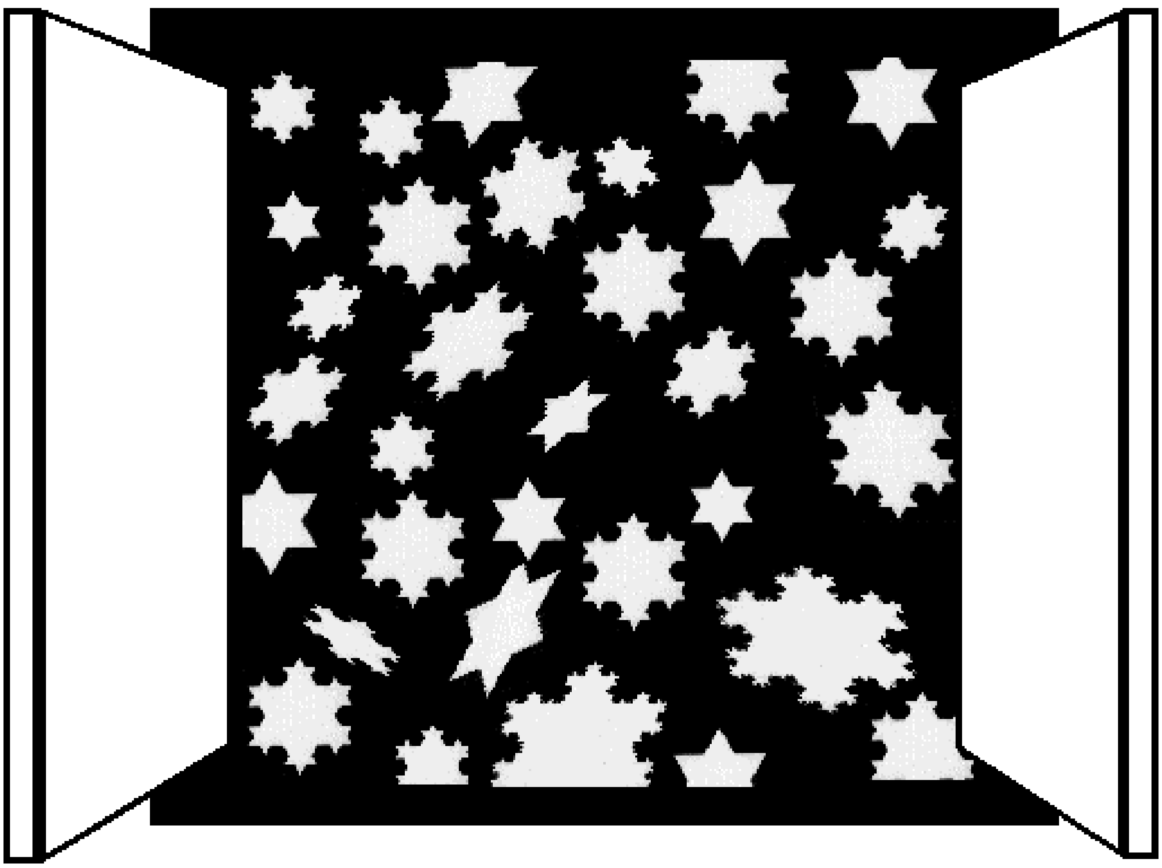
Solmu

matematiikkalehti

1/1997-98



http://www.math.helsinki.fi/Solmu/

Solmu 1/1997-98

Matematiikan laitos
PL 4 (Yliopistonkatu 5)
00014 Helsingin yliopisto
`http://www.math.helsinki.fi/Solmu/`

Päätoimittaja *Kerkko Luosto*
Toimitussihteeri *Jouni Seppänen*

Sähköposti (Internet)
`Kerkko.Luosto@Helsinki.FI`
`Jouni.Seppanen@Helsinki.FI`

Lehden aloittamisen tekivät taloudellisella tuellaan mahdolliseksi Nokia (`http://www.nokia.com`) ja Taloudellinen Tiedotustoimisto (`http://www.tat.fi`). Keväästä 1997 alkaen on Opetusministeriö (`http://www.minedu.fi`) avustanut taloudellisesti Solmua.

Kiitämme Kullervo Niemistä ja Päivölän kansanopiston matematiikkalinjan opiskelijoita yli tuhannen lehden postittamisesta. .

Huom! Solmua jaetaan jokaiseen kouluun vain yksi kappale. Toivomme, että lehti ei jää vain opettajien luettavaksi, vaan sitä kopioidaan kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus

Kun luokkakaverini aikoinaan valitsivat opiskelupaikkojansa, taustalla häämöttivät paljolti hyötynäkökohdat: opiskelujen piti johtaa hyvin palkattuun ja mielekkääseen ammattiin, kun taas opiskeltaessa saavutetyt tiedot ja taidot olivat sivuseikka. Oma valintani sen sijaan perustui matematiikkaa kohtaan tuntemaani kiinnostukseen. Yritin toki perustella kummasteleville luokkatovereilleni valintani hyödyllisyyttä, mutta perustelujen löytäminen oli vaikeata ja omalta kannaltani toisarvoista. Olin 13-vuotiaana päättänyt perehtyä matematiikkaan niin kauan, kuin se minua innostaisi. Tämä periaatepäätös on ohjannut ratkaisujani tähän päivään saakka, kaikista julkisen vallan ja yliopiston tiedepoliittisista sekoiluista huolimatta.

Paljon myöhemmin, luultavasti vasta jatko-opiskelijana, minulle valkeni kiinnostukseen perustuvan valinnan hyvät puolet hyötynäkökohtiin perustuvaan verrattuna. Minkä tahansa tieteenalan taloudellisen ja yhteiskunnallisen merkityksen arvioiminen on vaikeata, mutta matematiikan kohdalla hyötymekanismin selvittäminen on erityisen hankalaa. Usein soveltamisketju on ainakin kaksiportainen: matematiikkaa käytetään menetelmätieteenä esim. jossakin luonnontieteessä, jolla sitten on sovelluksia. Kun lisäksi matematiikka jakautuu lukuisiin eri aloihin, jotka ovat eri suhteessa sukulaistieteisiin, soveltamisketju on niin monimutkainen, että sitä voisi tutkia kokopäiväisesti. Tuntuu siis mielekkäämmältä tutkia matematiikkaa kuin kuluttaa aikaansa sen murehtimiseen, miten sitä voi hyödyntää.

Muisteloni liittyvät toisaalta edellisessä Solmun numerossa olleeseen kokoelmaan kirjoituksia "Mitä hyötyä matematiikasta?", toisaalta Pasi Erosen tässä numerossa olevaan vastaukseen "Miksi matematiikkaa opiskellaan?", jossa Eronen puolustaa matematiikan yleissivistävyyttä. Uskon, että hän osuu pohdinnoissaan oikeaan ja että itse asiassa matematiikan merkitykselle tehdään vääryyttä, kun sitä mitataan vain tieteen suorien sovellusten kautta. Matemaattinen osaaminen on suuressa määrin lukutaidon kaltainen asia. Hyötynäkökulmasta tämän voi tulkita niin, että esim. toimiva rahajärjestelmä vaatii tavallisilta ihmisiltä peruslaskutoimitusten osaamista ja jokin vaativampi asia, kuten optiokauppa, periaatteessa stokastiikan ja differentiaaliyhtälöjen hallitsemista. Mutta siinä, missä suomalaiset lukutaidossaan ovat edenneet kaunokirjallisuuden ymmärtämiseen saakka, he matematiikassa rämpivät tavaamisen tasolla, peruslaskutoimituksissa.

Kerkko Luosto

Toimitussihteerin palsta

Toimitussihteerin palstasta näyttää muotoutuvan matemaattinen linkkilista — ihmekös se, kun toimitussihteeri itse edustaa verkkosukupolvea. Jos lukija etsii tietoa jostain tietystä aiheesta, tällainen pieni lista tuskin auttaa. Isompi lista voi olla parempi siihen tarkoitukseen, varsinkin jos se on hyvin jäsennelty, mutta vielä parempi väline on hyvä hakukone.

Mutta ainakin allekirjoittanut lueskelee joskus tietosanakirjaa päättämättä ennalta, mitä etsii, ja siinä puuhassa kuluu kummallisen paljon aikaa. Ehkä syy on siinä, että silloin opiskelun motivaatio on puhtaasti oma kiinnostus eikä jonkin kurssin suorittaminen tai muu ulkoinen palkinto. Juuri tällaiseen ajanvietteeseen WWW:n hypertekstimuoto on omiaan. Seuraavassa taas muutama verkon solmu, joista voi aloittaa löytöretken.

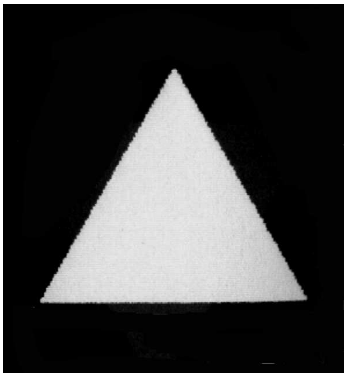
Suomalainen yritys CSC — Tieteellinen laskenta Oy[1] on koonnut kansainvälisestikin merkittävän matemaattisen linkkilistan.[2] Matematiikan opiskelua suunnittelevalle sen sisältämä lista matematiikan laitoksista[3] voi olla avuksi.

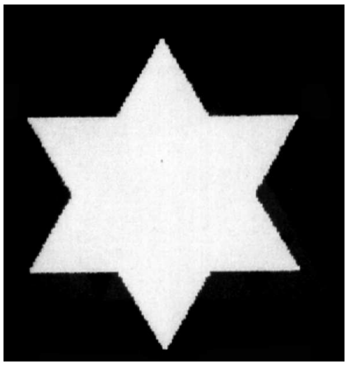
Nuorempia lukijoita voi kiinnostaa Mathematics Virtual Libraryn[4] luettelo high school -tason matematiikkaservereistä.[5]

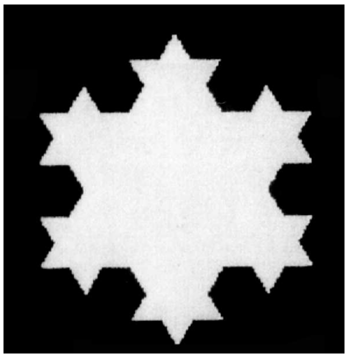
Kaikenikäiset lukijamme, niin matematiikan kuin muidenkin tieteiden harrastajat, ehtivät vielä osallistua Tutki-kokeile-kehitä -kilpailuun.[6] Eräänä houkuttimena on, että parhaat pääsevät EU:n Young Scientist -kilpailuun.[7]

Jouni Seppänen

Kansi:







Kansikuvassa leijailee von Kochin lumihiutaleita. Yllä on tämän lumihiutaleen konstruoinnista kolmen kuvan sarja. Keksitkö, miten ensimmäisestä saadaan toinen ja samoin jatkamalla toisesta kolmas? Osaatko jatkaa edelleen kohti sivun 20 lumihiutaletta?

[1] `http://www.csc.fi`
[2] `http://www.csc.fi/math_topics/`
[3] `http://www.csc.fi/math_topics/Dept.html`
[4] `http://euclid.math.fsu.edu/Science/math.html`
[5] `http://euclid.math.fsu.edu/Science/highsch.html`
[6] `http://www.tek.fi/palvelut/nuorisoprojektit/tukoke.html`
[7] `http://www.cordis.lu/tmr/src/yshome.htm`

Geometriakulma: Napoleonin lause

Ranskan keisari Napoleonin lähipiiriin kuului useita merkittäviä matemaatikkoja kuten Gaspard Monge, Pierre Simon de Laplace ja Jean Baptiste Joseph Fourier.

Monge oli maineikkaan erityiskorkeakoulun École Polytechniquen professori, joka loi deskriptiivisen geometrian alaan kuuluvan, aikoinaan sotasalaisuutenakin pidetyn sotilaallisen ja teknillisen suunnittelun apuvälineen, Mongen projektion.

Laplace oli École Militairen professori, tunnettu taivaanmekaniikkaa, matemaattista fysiikkaa ja todennäköisyyslaskentaa koskevista tutkimuksistaan. Hänen mukaansa on matemaattisen fysiikan ehkä merkittävin differentiaaliyhtälö saanut nimensä, samoin monien soveltajien käyttämä integraalimuunnos.

Myös Fourier oli École Polytechniquen professori; teoksessaan Théorie analytique de la chaleur (= lämpö) hän esitti myöhemmin Fourier-analyysina tunnetun menetelmän.

Jokainen näistä matemaatikoista osallistui myös tavalla tai toisella Napoleonin ajan sotiin tai hallintoon. Keisari itse puolestaan harrasti muun ohella matematiikkaa. Hänen nimensä esiintyy eräässä alkeisgeometrian lauseessa, jonka lukija seuraavassa saa pohdittavakseen.

Olkoon ABC mielivaltainen kolmio. Tämän sivuille asetetaan tasasivuiset kolmiot ABD, BCE ja CAF siten, että kärjet D, E ja F osoittavat alkuperäisestä kolmiosta poispäin. Tasasivuisten kolmioiden keskipisteet olkoot P, Q ja R. Lukija piirtäköön kuvion.

Ja sitten pohdittavat lukijalle:

1. Napoleonin lause koskee kolmiota PQR. Tutki kuviota ja keksi lause. Huomiota kannattaa kiinnittää kolmion sivujen pituuksiin ja kolmion keskipisteeseen.

   Tarkasteluja helpottaa, jos piirtää useita erilaisia kolmioita ABC. Tätä puolestaan helpottaa CABRI-geometria -nimisen ohjelman käyttö.

   CABRI Géomètre on kaupallinen ohjelma, mutta demoversio on vapaasti kopioitavissa verkosta[8]. Saatavilla on ainakin englannin- ja ranskankieliset versiot, sekä Macille että PC-koneelle.

   CABRI on lyhennys sanoista *CAhier de BRouillon Interactif*, interaktiivinen luonnoslehtiö. Ohjelma on peräisin Ranskasta, Joseph Fourier -yliopistosta tyyliin sopivasti.

2. Miten Napoleonin lauseen voisi todistaa? Äkkiä ajatellen lähestymistapoja voisi olla ainakin kolme: puhdas geometrinen, ehkä sopivaan apupiirrokseen perustuva; vektorialgebra; kompleksilukualgebra. Viimeksi mainittu on ehkä vieraampi varsinkin geometrisissa yhteyksissä, mikä ei kuitenkaan vähennä sen arvoa.

   Kirkkaiksi hiotut puhtaaksi kirjoitetut todistukset voi lähettää Solmun toimitukseen. Parhaasta annetaan runsaasti kunniaa.

3. Voisiko lauseen yleistää nelikulmioille? Entä n-kulmioille? Miten? Vihjeeksi tieto, että voi. Ei kuitenkaan rajoituksetta. Mutta millainen on rajoitus?

Simo K. Kivelä

[8] `http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm`

Ketjumurtoluvut

Äärelliset ketjumurtoluvut

Äärellinen ketjumurtoluku on muotoa

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{1}$$

oleva lauseke, missä a_0 on kokonaisluku ja $a_1, \ldots, a_n$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Käytämme seuraavassa (1):lle myös hieman mukavampaa merkintätapaa $[a_0, \ldots, a_n]$. On selvää, että äärellinen ketjumurtoluku (1) esittää *rationaalilukua*, jonka esitys muodossa p/q (p kokonaisluku ja q positiivinen kokonaisluku) saadaan lasketuksi (1):stä "alhaalta ylöspäin". Jos ketjumurtoluvussa on monta termiä, on sen arvon laskeminen tällä tavala aika hankalaa. Tällöin voidaan käyttää seuraavia *palautuskaavoja*:

Olkoon $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$ sekä

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & k = 2, \ldots, n \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, & k = 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{2}$$

Voidaan osoittaa, että

$$[a_0, \ldots, a_k] = p_k/q_k,\ k = 0, \ldots, n. \tag{3}$$

Esimerkki. Lasketaan $x = [1, 2, 3, 4, 5]$ (3):n avulla. Nyt $p_0 = 1$, $p_1 = 1 \cdot 2 + 1 = 3$, $p_2 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$, $p_3 = 4 \cdot 10 + 3 = 43$, $p_4 = 5 \cdot 43 + 10 = 225$ ja samoin $q_0 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, $q_3 = 4 \cdot 7 + 2 = 30$, $q_4 = 5 \cdot 30 + 7 = 157$. Kaavan (3) mukaan on siis $x = p_4/q_4 = 225/157$. Lukija voi tarkistaa tuloksen kirjoittamalla ketjumurtoluvun $[1, 2, 3, 4, 5]$ muotoon (1) ja laskemalla "alhaalta ylöspäin". Kannattaa myös laskea likiarvot luvuille p_k/q_k, $k = 0, 1, \ldots, 4$ ja verrata saatuja lukuja toisiinsa.

Tarkastellaan seuraavaksi käänteistä probleemaa: annettuna on rationaaliluku $x = p/q$ (p kokonaisluku ja q positiivinen kokonaisluku) ja tehtävänä on esittää x äärellisenä ketjumurtolukuna (1). Sovelletaan lukuihin p ja q *Eukleideen algoritmia*, menetelmää, jota voidaan käyttää kahden luvun suurimman yhteisen tekijän määrittämiseen. Tämä menetelmä muodostuu perättäisistä jakolaskuista seuraavaan tapaan:

$$\begin{aligned} p &= a_0 q + r_0, & 0 < r_0 < q, \\ q &= a_1 r_0 + r_1, & 0 < r_1 < r_0, \\ r_0 &= a_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ &\cdots \\ r_{n-3} &= a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\ r_{n-2} &= a_n r_{n-1} \end{aligned}$$

(jolloin lukujen p ja q s.y.t. on viimeinen nollasta eroava jakojäännös r_{n-1}). Voidaan osoittaa, että $x = p/q = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Esimerkki. Tarkastellaan edellisen esimerkin lukua $x = 225/157$. Eukleideen algoritmi antaa seuraavat jakolaskut

$$\begin{aligned} 225 &= 1 \cdot 157 + 68, \\ 157 &= 2 \cdot 68 + 21, \\ 68 &= 3 \cdot 21 + 5 \\ 21 &= 4 \cdot 5 + 1, \\ 5 &= 5 \cdot 1 \end{aligned}$$

ja tulokseksi saamme ketjumurtoluvun $[1,2,3,4,5]$, josta edellisessä esimerkissä juuri lähdimme liikkeelle.

Huomautamme lopuksi, että rationaaliluvun esitys äärellisenä ketjumurtolukuna *ei ole yksikäsitteinen*. Jos nimittäin esityksessä (1) viimeinen termi $a_n \geq 2$ (Eukleideen algoritmi antaa aina tällaisen esityksen) voidaan esitystä "jatkaa" korvaamalla a_n lausekkeella $a_n - 1 + 1/1$, toisin sanoen asettamalla uudeksi a_n:ksi vanha $a_n - 1$ ja uudeksi a_{n+1}:ksi luku 1. Esimerkiksi luvulla $x = 225/157$ on myös ketjumurtolukuesitys $[1,2,3,4,4,1]$.

Äärettömät ketjumurtoluvut

Tarkastellaan ääretöntä jonoa $a_0, a_1, \ldots$, missä a_0 on positiivinen kokonaisluku ja $a_1, a_2, \ldots$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Tällöin jokaiselle ei-negatiiviselle positiiviluvulle n on $x_n = [a_0, \ldots, a_n]$ määritelty äärellisenä ketjumurtolukuna. Lisäksi $x_n = p_n/q_n$, missä p_n ja q_n saadaan palautuskaavoista (2). Voidaan osoittaa, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi, \tag{5}$$

missä ξ on *irrationaaliluku*, toisin sanoen reaaliluku, joka ei ole rationaaliluku. Sanomme nyt, että ξ on *äärettömän ketjumurtoluvun* $[a_0, a_1, \ldots,]$ arvo. Olkoon ξ kääntäen mielivaltainen irrationaaliluku. Voidaan kysyä, onko ξ esitettävissä äärettömänä ketjumurtolukuna, toisin sanoen onko olemassa ääretöntä jonoa $a_0, a_1, \ldots,$ jolle ξ on ketjumurtoluvun $[a_0, a_1, \ldots]$ arvo. Vastaus kysymykseen on myönteinen ja lisäksi voidaan osoittaa, että esitys on *yksikäsitteinen* (toisin kuin äärellisten ketjumurtolukujen tapauksessa). Näytämme seuraavassa, kuinka kyseinen esitys löydetään. Olkoon $\xi = \xi_0$. Olkoon a_0 suurin kokonaisluku, joka on enintään ξ_0. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\xi = \xi_0 = a_0 + \alpha_1, \tag{6}$$

missä $\alpha_1 = \xi_0 - a_0$. Tässä a_0:n määritelmän nojalla $0 \leq \alpha_1 < 1$ ja itse asiassa $0 < \alpha_1 < 1$, koska α_1, joka on irrationaaliluku (jos α_1 olisi rationaaliluku, olisi ξ_0 kahden rationaaliluvun summana rationaalinen, mikä on ristiriita) ei voi olla 0. Olkoon $\xi_1 = 1/\alpha_1$. Tällöin ξ_1 on *irrationaaliluku* ja lisäksi $\xi_1 > 1$. Olkoon nyt a_1 suurin kokonaisluku, joka on enintään ξ_1. Tällöin a_1 on *positiivinen kokonaisluku* ja kuten edellä voidaan kirjoittaa

$$\xi_1 = a_1 + \alpha_2,\ 1/\alpha_2 = \xi_2,$$

missä ξ_2 on irrationaaliluku ja $\xi_2 > 1$. Tällä tavalla jatkaen saadaan ääretön jono $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ja voidaan osoittaa, että äärettömän ketjumurtoluvun $[a_0, a_1, \ldots]$ arvo on $\xi_0 = \xi$.

Huomattakoon, että aikaisemmin esittämämme Eukleideen algoritmiin perustuva menetelmä rationaaliluvun äärelliseen ketjumurtolukuesitykseen löytämiseksi on itse asiassa täsmälleen sama kuin yllä oleva menetelmä sovellettuna rationaalilukuun ξ (menetelmää voidaan nimittäin soveltaa niin kauan kuin luvut α_n, jotka nyt olisivat rationaalisia, ovat nollasta eroavia.)

Ensimmäisenä *esimerkkinä* tarkastelemme irrationaaliluvun $\xi = (1+\sqrt{5})/2$ (kultaiseen leikkaukseen liittyvä luku!) esitystä äärettömänä ketjumurtolukuna. Koska $\xi = 1{,}618\cdots$, on $a_0 = 1$. Nyt $\alpha_1 = (1+\sqrt{5})/2 - 1 = (-1+\sqrt{5})/2$, joten $\xi_1 = 2/(-1+\sqrt{5}) = (1+\sqrt{5})/2 = \xi$ ja seurauksena on, että $\xi = [1,1,1,\ldots]$. Koska nyt $a_n = 1$, $n = 0,1,2,\ldots$, nähdään palautuskaavoista (2) nopeasti, että tässä tapauksessa $p_n/q_n = F_{n+2}/F_{n+1}$, $n = 0,1,2,\ldots$. Tässä luvut F_n ovat tämän lehden lukijoille tuttuja *Fibonaccin lukuja* (jotka määritellään siten, että $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).

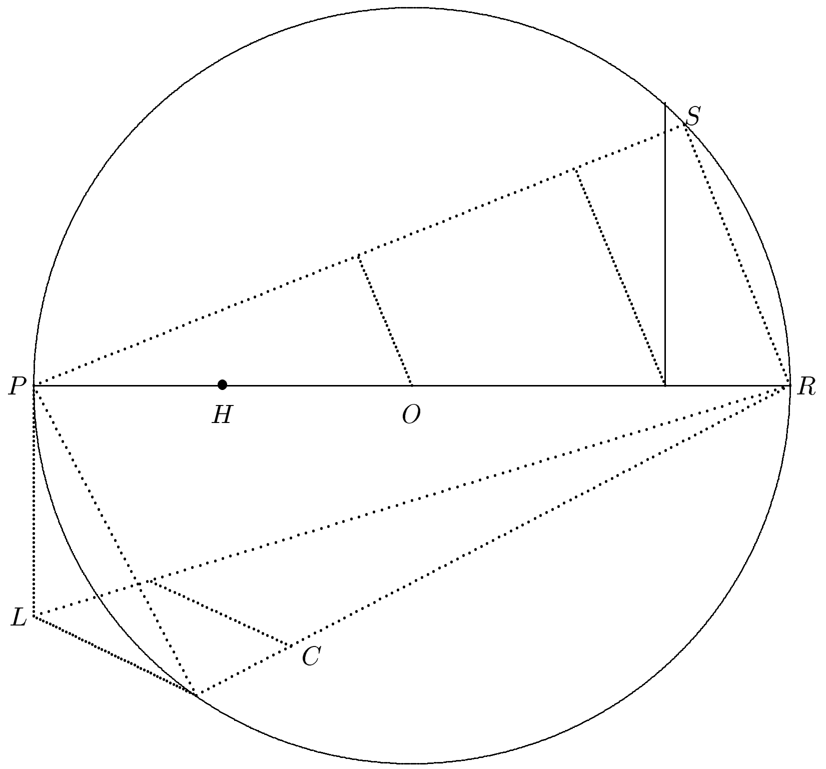
Seuraavana *esimerkkinä* tarkastellaan luonnollisen logaritmijärjestelmän kantalukua, Neperin lukua $e = 2{,}71828\cdots$. Euler (1707-1783) todisti, että luku e voidaan esittää seuraavana äärettömänä ketjumurtolukuna

$$e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,\ldots],$$

jossa siis kahta ykköstä seuraa parillinen luku, joka on kahta suurempi kuin edellinen parillinen luku.

Olkoon nyt ξ irrationaaliluku ja $[a_0, a_1, \ldots]$ siihen liittyvä ketjumurtoluku. Rationaaliluvut $x_n = p_n/q_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$, ketjumurtoluvun $[a_0, a_1, \ldots]$ ns. *konvergentit*, lähenevät ξ:tä siten, että ne ovat vuorotellen pienempiä ja suurempia kuin ξ. Lisäksi ne ovat *parhaita approksimaatioita* siinä mielessä, että jos jollekin rationaaliluvulle $x = r/s$ (r kokonaisluku ja s positiivinen kokonaisluku) pätee $|\xi - x| < |\xi - x_n|$, niin tällöin $s > q_n$.

Esimerkki. Tarkastellaan tunnettua lukua $\pi = 3{,}141459\ldots$. Tämän irrationaaliluvun ääretön ketjumurtolukuesitys alkaa siten, että $a_0 = 3$, $a_1 = 7$, $a_2 = 15$, $a_3 = 1$, $a_4 = 292$. Toisin kuin aikaisemmissa esimerkeissämme minkäänlaista säännönmukaisuutta ei ole voitu tässä tapauksessa havaita. Tarkastellaan konvergenttia $x_3 = p_3/q_3 = 355/113$ π:n likiarvona intialalisen matemaatikon Srinivasa Ramanujanin (1887-1920) konstruoiman "ympyrän neliöimisen" valossa. Ympyrän neliöimisessä on tarkoituksena konstruoida harpin ja viivoittimen avulla neliö, jolla olisi sama ala kuin annetulla ympyrällä. Jos ympyrän sädettä merkitään r:llä, olisi siis konstruoitava jana (neliön sivu), jonka pituus on $r\sqrt{\pi}$. Voidaan kuitenkin osoittaa, että tämä on mahdotonta suorittaa harpin ja viivoittimen avulla. Tarkastellaan seuraavaa kuviota:



Kuvassa on piirrettynä annettu ympyrä, joka on tarkoitus "neliöidä". Sen keskipiste on O. Piste H on säteen PO keskipiste ja piste T säteellä OR sellainen, että jana TR on kolmasosa säteestä OR. Jana TQ on kohtisuorassa halkaisijaa PR vastaan ja jänne RS on piirretty yhtä pitkäksi kuin jana TQ. Yhdistetään pisteet P ja S ja piirretään janat OM ja TN yhdensuuntaisiksi janan RS kanssa. Piirretään jänne PK yhtä pitkäksi kuin PM ja piirretään tangentti $PL = MN$. Piirretään RL, RK ja KL. Piirretään RC yhtä pitkäksi kuin RH. Piirretään CD yhdensuuntaiseksi KL:n kanssa siten, että D sijaitsee janalla RL. Tällöin jana RD sivuna piirretyn neliön ala on *melkein* sama kuin ympyrän ala. Väite perustuu siihen, että kuten lukija voi helposti tarkistaa Pythagoraan lauseen ja yhdenmuotoisten kolmioiden avulla, janan RD pituus on yhtä kuin ympyrän säde kerrottuna luvun $355/113$ neliöjuurella. Ramanujan antaa itse seuraavan esimerkin konstruktion tarkkuudesta: jos ympyrän ala on 140 000 neliömailia, niin konstruoitu jana RD eroaa "oikeasta" neliön sivusta noin yhden tuuman.

Tarkastelemme lopuksi jaksollisia ketjumurtolukuja. Sanomme, että ääretön ketjumurtoluku $[a_0, a_1, \ldots]$ on *jaksollinen*, jos on olemassa sellainen ei-negatiivinen kokonaisluku k ja positiivinen kokonaisluku h, että

$$a_{k+h+n} = a_{k+n},\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Tämä tarkoittaa siis sitä, että jonossa $a_0, a_1, \ldots$ alkiosta a_k lähtien h peräkkäistä alkiota muodostavat jakson $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+h-1}$, joka toistuu yhä uudelleen ja uudelleen. Merkitään jaksoa sen muodostamien alkioiden yli vedetyllä viivalla. Jaksollinen ketjumurtoluku on siis muotoa $[a_0, a_1, \ldots, \overline{a_k, \ldots, a_{k+h-1}}]$. Edellä esitettyä merkintätapaa käyttäen voitaisiin kirjoittaa lyhyesti $(1+\sqrt{5})/2 = [\overline{1}]$.

Sanomme, että irrationaaliluku ξ on *kvadraattinen irrationaaliluku*, jos se on kokonaislukukertoimisen toisen asteen yhtälön juuri. Esimerkiksi luku $\xi = (1+\sqrt{5})/2$ on kvadraattinen irrationaaliluku, koska se toteuttaa yhtälön

$$\xi^2 - \xi + 1 = 0. \tag{9}$$

Ketjumurtolukujen teorian huomattavimpia tuloksia on seuraava lause, jonka Lagrange (1736-1813) todisti vuonna 1770.

Lause. Irrationaaliluvun ξ esitys äärettömänä ketjumurtolukuna $[a_0, a_1, \ldots]$ on jaksollinen silloin ja vain silloin, kun ξ on kvadraattinen irrationaaliluku.

Yksinkertaisimpia kvadraattisia irrationaalilukuja ovat luvut $\sqrt{d}$, missä d on positiivinen kokonaisluku, *joka ei ole neliö.* Lagrangen lauseen mukaan näillä on jaksolliset ketjumurtolukuesitykset. Tässä tapauksessa voidaan vielä sanoa tarkemminkin, minkälainen esitys on muodoltaan. Voidaan nimittäin todistaa, että esitys on muotoa

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_3, a_2, a_1, 2a_0}],$$

missä jakson alkuosa on *symmetrinen* (tai puuttuu kokonaan.) Asiaa valaisemaan annettakoon muutamia *esimerkkejä* (joita lukija tietokoneen tai taskulaskimen avulla helposti voi hankkia lisää).

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= [1, \overline{2}] \quad \text{(symmetrinen osa puuttuu)}\\
\sqrt{3} &= [1, \overline{1, 2}]\\
\sqrt{29} &= [5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]\\
\sqrt{31} &= [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]
\end{aligned}$$

Jukka Pihko

Miksi matematiikkaa opiskellaan?

— Äiti, miks koulussa luetaan hissaa?

— Koska se kuuluu yleissivistykseen, kulta.

— Äiti, miks koulussa luetaan matikkaa?

— Koska sulle on siitä hyötyä opiskelussa ja työelämässä.

* * *

Nämä vastaukset ovat toisaalta sekä täysin oikeassa, että toisaalta täysin väärässä siinä mitä ne vihjaavat mutteivat sano: että historiasta ei ole hyötyä tai matematiikka ei kuulu yleissivistykseen.

Matematiikan ja luonnontieteiden hyödyllisyydestä kyllä puhutaan kaikkialla: edellisessä Solmun numerossa ja yläasteen 9.-luokkalaisille jaetussa "Kuka tarvitsee matematiikkaa?" -lehtisessä yritetään todistella, että ammatista riippumatta matematiikkaa tarvitaan. Mutta miksi ei tule ensimmäiseksi mieleen, että matematiikka kuuluisi yleissivistykseen? Onko todellakin niin, että matematiikalle — jonka kreikkalaiset vielä katsoivat filosofian, viisauden rakastamisen, osaksi — ei enää löydy muuta tehtävää kuin uusien insinöörien tuottaminen Nokialle?

Teknologian, erityisesti tietotekniikan, osaaminen on nykyään muotia, ja samalla lukio on muuttumassa "valinnaisuuden" nimissä yhä enemmän ammattiin valmistavaksi. Samalla on kyllä saatu lisää valinnaisia kursseja, mutta valitettavasti lukiosta pääsee nykyään läpi huolestuttavan pienellä ymmärryksellä luonnontieteiden perusteista.

Esimerkiksi lukiofysiikan yksi pakollinen kurssi kuulostaa lähinnä huonolta vitsiltä. Epäilen, että melkoisella osalla oppilaista ei ole edes kunnollista käsitystä siitä, mitä *tieteellä* tarkoitetaan — mitä sitten kurssi "Fysiikka luonnontieteenä" voi tarjota?

Näin pitkälle valinnaisuudessa ei minusta tulisi mennä: matematiikan ja luonnontieteiden perusasiat kuuluvat kaikkien yleissivistykseen, ei vain tulevien matemaatikkojen ja insinöörien. Kouluopetuksen sisällön tulisikin korostaa nimenomaan näiden aineiden yleissivistävää puolta.

Sana "matematiikka" tarkoittaa vapaasti käännettynä oppimisen taitoa, ei kaavojen ulkoaopettelua. Loogisen ajattelun, tieteen filosofian, tieteellisen metodin ja niiden historian tulisi olla luonnontieteiden opetuksen keskeisiä osia eikä vain jotain joka mainitaan ohimennen jossain valinnaisessa filosofian kurssissa.

Tämän opetuksen tärkeimmäksi tavoitteeksi näkisin "ymmärryksen", en "osaamisen". Luonnontieteiden ei tarvitse olla vain työkaluja, vaan ne voivat tarjota harjoittajalleen samanlaista iloa kuin musiikki tai kuvataiteetkin. Ei musiikkiakaan opiskella jotta sillä ansaitsisi rahaa, joten motivoiko sitten kaukana tulevaisuudessa saavutettava hyöty opiskelemaan juuri nyt mahdollisesti vielä puulta maistuvaa matematiikkaa?

Sen lisäksi, että matematiikan ja luonnontieteiden tuntemus kuuluu yleissivistykseen, siitä on toki myös hyötyä. Työelämässä tarvittavia erikoistaitoja ei mitenkään voi oppia koulussa, mutta juuri luonnontieteet antavat niille lujan perustan — alasta riippumatta. Erikoistaidot vanhenevat entistä nopeammin, joten voikin kysyä palveleeko yhä enemmän ammattiin valmistava lukio kenenkään tarpeita?

* * *

Kiitokset Jouni Seppäselle jota ilman tämä ei olisi koskaan valmistunut.

Luettavaa:

Carl Sagan: Broca's Brain: Reflections on the Romance of Science (1979)
Carl Sagan: The Demon-Haunted World: Science as a Candle in the Dark (1996)
Stewart Richards: Philosophy and Sociology of Science: An Introduction (1987)

Pasi Eronen
<pe@iki.fi>

The difference between science and the fuzzy subjects is that science requires reasoning while those other subjects merely require scholarship.
— Lazarus Long in Robert Heinlein's "Time Enough for Love"

Turistina matematiikassa

Lomakohteen ympäristöön on tapa tehdä tutustumisretkiä. Matematiikkaankin voi tehdä opintomatkoja. Retkellä pysähdytään tarkastelemaan muutamia kohteita. Osa kohteista esitellään, osaan saa tutustua omin päin. Kohteet on numeroitu, ja omin päin tutustumiseen tarkoitetut on merkitty $*$:llä. Retken päätteeksi voi vielä tutustua muutamaan lisäkohteeseen. – Seuraavan retken yhteydessä julkaistaan sitten niiden kohteiden esittelyt, jotka nyt jäävät retkeilijän omatoimisuuden varaan.

Ensimmäinen retki. Induktio – todistamisen työkalu

Retki tehtiin Solmussa 2. Nyt on vielä tehtävä

C Jälkikatsaus

eli tuolloin selityksettä tai ratkaisutta jääneiden kohtien tai tehtävien selittäminen.

3. *Osoita, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n ja kaikilla reaaliluvuilla $x > -1$ pätee*

$$1 + nx \leq (1+x)^n.$$

Aloitetaan induktio arvosta $n = 0$. Selvästikin $1 + 0 \cdot x = 1 = (1+x)^0$. Oletetaan sitten, että $k \geq 0$ ja että $1 + kx \leq (1+x)^k$. Koska $1 + x \geq 0$ ja $x^2 \geq 0$, on myös $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$. Induktioaskel on otettu ja väite todistettu.

5. *Osoita, että*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Vihjeen mukaan osoitetaan ensin, että

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Olkoon $n \geq 1$ ja $0 \leq k < n$. Silloin todellakin

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$
$$= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Binomikaavan induktiotodistuksen aluksi havaitaan, että $(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$. Otetaan sitten induktioaskel, jonka pohjaksi oletetaan, että $n \geq 1$ ja että

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Silloin

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

7. *Tasoon piirretään n suoraa; näistä mitkään kaksi eivät ole yhdensuuntaisia eivätkä mitkään kolme leikkaa toisiaan samassa pisteessä. Moneenko osaan suorat jakavat tason?*

Merkitään n:n suoran synnyttämien jako-osien määrää $f(n)$:llä. Jos suoria on $n+1$, ja näistä yksi, suora ℓ, poistetaan, jako-osia on siis $f(n)$ kappaletta. Suora ℓ leikkaa n muuta suoraa, ja se kulkee $n+1$:n jako-osan läpi jakaen kunkin näistä kahteen osaan. (Tämä perustuu siihen, että jako-osat ovat kuperia monikulmioita; syntyvät uudet jako-osat ovat edelleen tällaisia.) Siten $f(n+1) = f(n) + n + 1$. Väitetään, että $f(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$. Tämä on totta, kun $n = 0$ ($f(0) = 1$). Jos $f(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$, niin $f(n+1) = f(n)+n+1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 2 = (n+1)\left(\dfrac{n}{2} + 1\right) + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$.

8. *Todista: jokainen kokonaisluku $n > 1$ on joko alkuluku tai alkulukujen tulo.*

Todistus. Kokonaisluku 2 on alkuluku. Oletetaan, että jokainen $n \le k$ on joko alkuluku tai alkulukujen tulo. Luku $k+1$ on joko alkuluku tai yhdistetty luku. Jos se on yhdistetty luku, se on tulo $k = ab$, missä a ja b ovat ≥ 2 ja siis $\le \dfrac{k+1}{2} < \dfrac{k+k}{2} = k$. Induktio-oletuksen mukaan a ja b ovat alkulukuja tai alkulukujen tuloja. Siis $k+1$ on alkuluku tai alkulukujen tulo.

9. *Olkoon $n > 1$ ja M positiivinen kokonaisluku. Todista, että on olemassa yksikäsitteisesti määrätyt kokonaisluvut $m \ge 0$ ja a_0, a_1, ... , a_m siten, että $a_m > 0$, $0 \le a_j < n$, kun $j = 0$, 1, ... , m, ja*

$$M = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_0.$$

On olemassa $m = m(M)$ siten, että $n^m \le M < n^{m+1}$. Suoritetaan induktio m:n suhteen. Jos $m = 0$, voidaan valita $a_0 = M$, ja väite pätee. Oletetaan, että väite pätee kaikille M, joille $m(M) \le k$. Olkoon sitten M luku, jolle $m(M) = k+1$. Siis $n^{k+1} \le M < n^{k+2}$. Olkoon vielä $p < n$ suurin kokonaisluku, jolla $pn^{k+1} \le M$. Silloin joko $M = pn^{k+1}$ tai $0 < M - pn^{k+1} < n^{k+1}$. Edellisessä tapauksessa M:llä on vaaditunlainen esitys, ja jälkimmäisessä tapauksessa $m(M - pn^{k+1}) \le k$, joten $M - pn^{k+1}$:llä on haluttua muotoa oleva esitys n:n korkeintaan astetta k olevana polynomina. Kun valitaan $a_{k+1} = p$, saadaan M:lle esitys n:n astetta $k+1$ olevana polynomina.

11. *Määritä x^2:n kerroin polynomissa $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^n$.*

Olkoon $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^n = 1 + a_n x + b_n x^2 + \cdots + x^{n^2}$, $n \ge 2$. Silloin

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1})^{n+1} &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^{n+1} + (n+1)x^{n+1}(1 + x + \cdots + x^n)^n + \cdots \\ &= (1 + a_n x + b_n x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) + \cdots = (1 + (a_n + 1)x + (a_n + b_n + 1)x^2 + \cdots \qquad (1)\end{aligned}$$

Siis $a_{n+1} = a_n + 1$ ja $b_{n+1} = a_n + b_n + 1$. Koska $(1 + x + x^2)^2 = 1 + x^2 + x^4 + 2x + 2x^2 + 2x^3$, $a_2 = 2$ ja $b_2 = 3$. Tästä seuraa, että $a_n = n$ ja $b_{n+1} = b_n + n + 1$ eli b_n on n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa, siis $b_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$.

12. *Montako kaksialkioista osajoukkoa on n-alkioisella joukolla?*

Olkoon kysytty lukumäärä $f(n)$. Silloin $f(1) = 0$ ja $f(2) = 1$. Joukolla $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b\}$ on $f(n)$ kaksialkioista osajoukkoa $\{a_i, a_j\}$ ja n kaksialkioista osajoukkoa $\{a_i, b\}$. Siis $f(n+1) = f(n) + n$. Väitetään, että $f(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$. Tämä on totta, kun $n = 1$ ja $n = 2$. Jos $f(k) = \frac{1}{2}k(k-1)$, niin $f(k+1) = \frac{1}{2}k(k-1) + k = \frac{1}{2}k(k+1)$, niin kuin pitääkin.

13. *Montako lävistäjää on kuperalla n-kulmiolla?*

Monikulmion kärkiä yhdistäviä janoja on yhtä monta kuin n- alkioisella joukolla on 2-alkioisia osajoukkoja, eli edellisen mukaan $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ kappaletta. Näistä janoista n kappaletta, monikulmion sivut siis, ei ole lävistäjiä, joten lävistäjiä on $\dfrac{1}{2}n(n-1) - n = \dfrac{1}{2}n(n-3)$ kappaletta.

14. *Monellako eri tavalla n lukua voidaan kirjoittaa jonoon?*

Todistetaan induktiolla, että kysytty lukumäärä on $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Näin on varmasti, kun $n = 1$. Oletamme, että k lukua $a_1, a_2, \dots, a_k$ voidaan kirjoittaa jonoon $k!$ eri tavalla. Jokainen näistä järjestyksistä tuottaa $k+1$ eri järjestystä luvuille $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, koska a_{k+1} voidaan sijoittaa jo olemassa olevaan k:n luvun jonoon ensimmäiseksi tai minkä hyvänsä luvun a_j, $j = 1, 2, \dots, k$, jälkeen.

15. *Olkoon $f(n)$ luku, joka ilmoittaa, kuinka monella eri tavalla n lukua $a_1, a_2, \dots, a_n$ voidaan kirjoittaa jonoon niin, että jonon k:s luku on aina eri kuin a_k, $k = 1, 2, \dots, n$. Osoita, että $f(n+1) = n(f(n) + f(n-1))$.*

Luvut $a_1, a_2, \dots, a_n$ ja a_{n+1} voidaan sekoittaa tehtävässä ilmoitetuin ehdoin kahdella eri menetelmällä. Voidaan sekoittaa ensin n ensimmäistä lukua niin, että k:s luku on aina eri kuin a_k, ja vaihtaa sitten a_{n+1} ja jokin a_k. Tällaisia sekoituksia on yhteensä $nf(n)$ kappaletta; a_{n+1} ei koskaan ole k:s luku. Toinen tapa on vaihtaa ensin a_k ja a_{n+1} ja sekoittaa sitten loput $n-1$ lukua. Tällaisia sekoituksia on kaikkiaan $nf(n-1)$ kappaletta. Kaikki mahdolliset sekoitukset on tässä tullut otetuksi huomioon, sillä joka tapauksessa $n+1$:lle paikalle tulee joko se luku, jonka a_{n+1} korvaa (jälkimmäinen tapaus) tai jokin muu luku (edellinen tapaus). Siis $f(n+1) = n(f(n) + f(n-1))$.

16. *Todista:* $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! \geq ((n+1)!)^n$.

Koska $2! = (1+1)!^1$, induktio pääsee alkuun. Oletetaan, että $2! \cdot 4! \cdots (2k)! \geq ((k+1)!)^n$. Silloin $2! \cdot 4! \cdots (2k)! \cdot (2(k+1))! \geq ((k+1)!)^k (2k+2)! = ((k+1)!)^{k+1} \cdot (k+2)(k+3) \cdots (2k+2) > ((k+1)!)^{k+1}(k+2)^{k+1} = ((k+2)!)^{k+1}$.

17. *Osoita: jos n on positiivinen kokonaisluku, niin*

$$f(n) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

on kokonaisluku.

Selvästi $f(0) = 0$ ja $f(1) = 1$. Oletetaan, että $f(k)$ on kokonaisluku. Silloin $f(k+1) = \frac{1}{5}(k+1)^5 + \frac{1}{2}(k+1)^4 + \frac{1}{3}(k+1)^3 - \frac{1}{30}(k+1) = f(k) + f(1) + \frac{1}{5}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k) + \frac{1}{2}(4k^3 + 6k^2 + 4k) + \frac{1}{3}(3k^2 + 3k)$; siis $f(k+1)$ on kokonaisluku.

18. *Olkoon $0 \leq x \leq 180°$. Osoita, että $|\sin(nx)| \leq n \sin x$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.*

Selvästi $\sin x > 0$ ja $|\cos y| \leq 1$ kaikilla y. Tehtävän väite on tosi, kun $n = 1$. Oletetaan, että $|\sin(kx)| \leq k \sin x$. Silloin $|\sin((k+1)x)| = |\sin(kx)\cos x + \sin x \cos(kx)| \leq |\sin(kx)||\cos x| + |\sin x||\cos(kx)| \leq |\sin(kx)| + |\sin x| \leq k \sin x + \sin x = (k+1)\sin x$.

19. *Kolmen pylvään A, B ja C ympärille voidaan pinota erikokoisia renkaita. Alkuasetelmassa pylväässä A on n rengasta, suuruusjärjestyksessä pienin päällimmäisenä, ja ne on siirrettävä torniin C samaan järjestykseen. Vain yhtä rengasta kerrallaan saa siirtää, eikä missään pylväässä saa koskaan olla pienempi rengas suuremman alla. Montako siirtoa vähintään tarvitaan?*

Merkitään renkaiden siirtämiseen tarvittavien siirtojen vähimmäismäärää $f(n)$:llä. Silloin $f(1) = 1$. Koska alinta rengasta ei voi liikuttaa, ennen kuin kaikki sen päällä olevat $n-1$ rengasta on siirretty, alin rengas voidaan siirtää paikalleen pylvääseen C aikaisintaan silloin, kun muut renkaat on siirretty pylvääseen B. Tähän tarvitaan vähintään $f(n-1)$ siirtoa. Jotta muut renkaat tämän jälkeen saataisiin siirretyiksi pylvääseen C, tarvitaan taas ainakin $f(n-1)$ siirtoa. Siis $f(n) \geq 2f(n-1) + 1$. Kuvattu menetelmä mahdollistaa siirtojen tekemisen niin, että $f(n) = 2f(n-1) + 1$. Osoitetaan vielä, että $f(n) = 2^n - 1$. Kaava on tosi, kun $n = 1$. Oletetaan, että $f(n-1) = 2^{n-1} - 1$. Silloin $f(n) = 2f(n-1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$.

Toinen retki. Nuo mainiot binomikertoimet

A Kertoimet ja kaava

1. Binomikertoimet liitetään tavallisesti ranskalaiseen Blaise Pascaliin (1623–62). "Pascalin kolmio"

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

oli tuttu jo keskiajan kiinalaisille samoin kuin muutamille Pascalin eurooppalaisille edeltäjille.

Binomikertoimien $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ eli Pascalin kolmion lukujen perusominaisuus on kolmiosta näkyvä yhteenlaskukaava

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad k \neq 0. \tag{1}$$

Lukujen $\binom{n}{k}$ määritelmästä seuraavat heti kaavat

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{2}$$

ja

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}. \tag{3}$$

Induktiolla on helppo todistaa (ks. Retki 1) oikeaksi *binomikaava*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n. \tag{4}$$

Binomikertoimien merkitys todennäköisyyslaskennassa ja kombinaatio- opissa perustuu siihen, että sellaisella joukolla, jolla on tasan n alkiota, on $\binom{n}{k}$ kappaletta k-alkioisia osajoukkoja. Tätä lukumäärää oli aikaisemmin tapana kutsua n:n alkion k:ttain otettujen kombinaatioiden lukumääräksi. — Joskus on tarkoituksenmukaista määritellä, että $\binom{n}{k} = 0$, kun $k < 0$ tai $n < k$.

2*. Todista oikeiksi yhteenlaskukaavat

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k},$$
$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

3. Nämä yhteenlaskukaavat luovat näppärän keinon laskea peräkkäisten kokonaislukujen potenssien summia. Yksinkertaisin tapaus perustuu havaintoon $k = \binom{k}{1}$. Tämän nojalla

$$1 + 2 + \cdots + n = \binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} = \binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Laskeaksemme summan $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ huomaamme ensin, että kun $n \geq 2$, niin $2\binom{n}{2} = n(n-1) = n^2 - n$. Niinpä

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = 1 + 2\left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2}\right) + 2 + 3 + \cdots + n$$
$$= 2\binom{n+1}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4*. Osoita, että $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ voidaan laskea myös käyttämällä hyväksi kaavaa $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Keksitkö vielä muita tapoja summan laskemiseksi?

5*. Laske

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{n} k^4.$$

6*. Tällaisten summien laskeminen oli tärkeää integraalilaskennan syntyvaiheiden aikaan 1600-luvulla. Käyrän $y = x^p$, $0 \leq x \leq 1$, kuvaajan alle jäävä pinta-ala eli

$$\int_0^1 x^p \, dx,$$

on suurilla n:n arvoilla suunnilleen sama kuin

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n}.$$

Määritä edellisten tulosten perusteella

$$\int_0^1 x^p \, dx, \quad p = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

7. Binomikaavan perusteella on selvää, että

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Samalla periaatteella saadaan monia muitakin kaavoja, kuten esimerkiksi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n.$$

Kaavan (2) avulla voidaan laskea

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}. \tag{5}$$

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \tag{6}$$

8. Kaavojen (5) ja (6) tapaiset kaavat voidaan johtaa aivan toisenlaisella menetelmällä, käyttämällä binomikaavaa ja differentiaali- ja integraalilaskentaa. Derivoidaan kaava

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

jolloin saadaan

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1},$$

asetetaan $x = 1$, ja on saatu kaava (5).

9*. Johda kaava (6) integroimalla binomikaava.

10*. Määritä

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

11. Eräs merkitys binomikertoimille $\binom{n}{k}$ samoin kuin koko joukko niiden ominaisuuksia voidaan johtaa seuraavan havainnon nojalla. Tarkastellaan tason niitä koordinaattipisteitä, joiden koordinaatit ovat ei- negatiivisia kokonaislukuja (ruutupaperi on hyvä malli), ja pisteestä $(0,\,0)$ alkavia reittejä, jotka koostuvat vain muotoa $(p,\,q) \to (p+1,\,q)$ ja $(p,\,q) \to (p,\,q+1)$ olevista askeleista. Pisteeseen $(n,\,k)$ päättyvien eri reittien lukumäärä on $\binom{n+k}{k} = \frac{n+k}{n}$. Että näin on, voidaan todistaa induktiolla luvun $n+k$ suhteen. Väite on varmasti tosi, kun $n+k=1$: selvästikin on vain $\binom{1}{0}$ reittiä pisteisiin $(1,\,0)$ ja $(0,\,1)$. Oletetaan sitten, että kaava pitää paikkansa arvolla $n+k-1$ ja jaetaan pisteeseen $(n,\,k)$ johtavat reitit kahteen luokkaan, pisteen $(n-1,\,k)$ kautta kulkeviin ja pisteen $(n,\,k-1)$ kautta kulkeviin. Jos $n=0$ tai $k=0$, niin toinen näistä luokista on tyhjä; muissa tapauksissa näissä luokissa olevien reittien määrä on induktio-oletuksen nojalla $\binom{n+k-1}{k}$ ja $\binom{n+k-1}{k-1}$. Todistuksen viimeistelee peruskaava (1).

12*. Osoita, että

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

13. Toinen menetelmä binomikertoimia koskevien kaavojen löytämiseksi on osajoukkojen lukumäärän laskeminen. Oletetaan, että A on joukko, jossa on $n+k$ alkiota. Olkoon vielä $A = B \cup C$, missä B on n-alkioinen ja C k-alkioinen (niin että $B \cap C$ on tyhjä). Nyt jokainen j-alkioinen $D \subset A$, $(j \le k)$ voidaan jakaa osiksi $D = (B \cap D) \cup (C \cap D)$. Osassa $(B \cap C)$ on, sanokaamme, r alkiota ja osassa $C \cap D)$ $j-r$ alkiota. Toisaalta jokainen yhdiste B:n r-alkioisesta osajoukosta ja C:n $j-r$-alkioisesta osajoukosta on A:n j-alkioinen osajoukko. Kun r saa kaikki arvot 0:sta j:hin, tullaan tällä tavalla läpikäyneeksi kaikki A:n j-alkioiset osajoukot. Osajoukkojen lukumääräksi tulee

$$\binom{n}{0}\binom{k}{j} + \binom{n}{1}\binom{k}{j-1} + \cdots + \binom{n}{j}\binom{k}{0}.$$

Toisaalta A:n j-alkioisten osajoukkojen määrä on $\binom{n+k}{j}$. Olemme saaneet kaavan

$$\binom{n+k}{j} = \sum_{r=0}^{j} \binom{n}{r}\binom{k}{j-r}. \tag{8}$$

14. Binomikaavalla on paljon sovelluksia matemaattisessa analyysissä. Käytämme sitä nyt vakuuttautuaksemme "tunnetusta tosiseikasta", jonka mukaan aina kun $a > 1$ ja k on kiinteä positiivinen kokonaisluku, niin eksponenttifunktio a^n lopulta päihittää potenssifunktion n^k. Asetetaan $a = 1+b$, $b > 0$ ja valitaan $n > 2k+1$ eli $n - k > \frac{n}{2}$. Verrataan nyt a^n:ää vain yhteen binomikaavan summan yhteenlaskettavaan:

$$a^n = (1+b)^n > \binom{n}{k+1} b^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} b^{k+1} > n\left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{b^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Kun nyt valitaan vielä n suuremmaksi kuin $\frac{2^k(k+1)!}{b^{k+1}}$, niin saadaan $a^n > n^k$.

15. Mitä tapahtuu, jos eksponentti kaavassa (4) ei ole positiivinen kokonaisluku? Kokeillaan tapausta $n = \frac{1}{2}$. Jotta olisi

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

olisi oltava

$$\begin{aligned}1+x &= (A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\dots)^2\\ &= A^2+2ABx+(2AC-B^2)x^2+2(AD+BC)x^3+(2AE+2BD+C^2)x^4+\dots\end{aligned}$$

Yhtälö toteutuu varmasti, jos potenssien x^k kertoimet ovat samat yhtälön molemmin puolin. Kokeillaan siis valintoja $A^2 = 1$ eli (voidaan vielä valita) $A = 1$, $2AB = 1$ eli $B = \frac{1}{2}$, $0 = 2AC + B^2 = 2C + \frac{1}{4}$ eli $C = -\frac{1}{8}$, $0 = AD + BC = D - \frac{1}{16}$ eli $D = \frac{1}{16}$, $0 = 2AE + 2BD + C^2 = 2E + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ eli $E = \frac{5}{128}$ jne.

16*. Miten alkaisivat vastaavat kehitelmät funktioiden $(1+x)^{\frac{2}{3}}$ ja $(1+x)^{-2}$ tapauksissa?

17. Kaava (4) pitää muodollisesti paikkansa mille hyvänsä eksponentille:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Tietysti meidän tulisi varmistua, että yhtälön vasen puoli on kunnolla määritelty ja että oikealla puolella esiintyvän päättymättömän sarjan olemus tulee oikein ymmärrettyä. On mahdollista osoittaa, että kaava pätee, kun $|x| < 1$. Mutta se on jo toisen retken aihe.

* * *

B Vielä muutama kerroin

18*. Voitko johtaa kaavan (8) käyttämällä origosta lähtevien reittien lukumääriä?

19*. Laske

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n\binom{n}{n}.$$

20*. Laske

$$1\cdot 2\cdot\binom{n}{2} - 2\cdot 3\cdot\binom{n}{3} + \dots + (-1)^n(n-1)n\binom{n}{n}.$$

21*. Laske

$$\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \dots + (-1)^n\binom{n}{n}.$$

22*. Laske

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}.$$

23*. Laske

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \dots + (-1)^n\binom{n}{n}^2.$$

24*. Laske

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \binom{2m}{5} + \dots + \binom{2n}{2n-1}.$$

25*. Minkälainen olisi binomikaavan vastine tapauksessa $(x+y+z)^n$?

Matti Lehtinen

Malatyn tehtävät

Matematiikan luonteesta

- Todellinen matematiikka ei ole mitään mekaanista laskemista.
- Matematiikka on johdonmukaista päättelyä.
- Päättely vaatii matematiikan rakenteen omaksumista.
- Omaksuminen on ennen kaikkea ymmärtämistä.
- Ymmärtämisessä tärkein kysymys on: "miksi?"

Oppikirjan virheestä saadaan sopiva tehtävä matemaattiselle pohdinnalle

Muutama vuosi sitten eräässä oppikirjassa oli seuraava tehtävä: Laske suorakulmaisen kolmion pinta-ala, kun hypotenuusan pituus on 8 cm ja sitä vastaan piirretyn korkeusjanan pituus on 5 cm. Tehtävä oli oppilaista helppo. Melkein kaikki saivat pinta-alaksi 20cm^2 ja olivat tyytyväisiä. Kuitenkin heidän laskemisensa oli turhaa. **Tiedätkö miksi?**

Osa vastauksesta tarjotaan sinulle valmiiksi ja osa jätetään sinun tehtäväksesi. Valmiiksi tarjotaan, että tällaista kolmiota ei ole olemassa. Toisin sanoen ei ole suorakulmaista kolmiota, jonka hypotenuusan pituus on 8 cm ja sitä vastaavan korkeuden pituus 5 cm.

Tehtäväsi on: Todista, että tällaista kolmiota ei ole olemassa. Monellako tavalla voit todistaa tämän, yhdellä, kahdella, kolmella vai vielä useammalla?

Jos saat kolme tai useampia erilaisia todistuksia, lähetä ne minulle. Todistuksia julkaistaan Solmussa ensi keväänä.

George Malaty
PL 111
80101 Joensuu

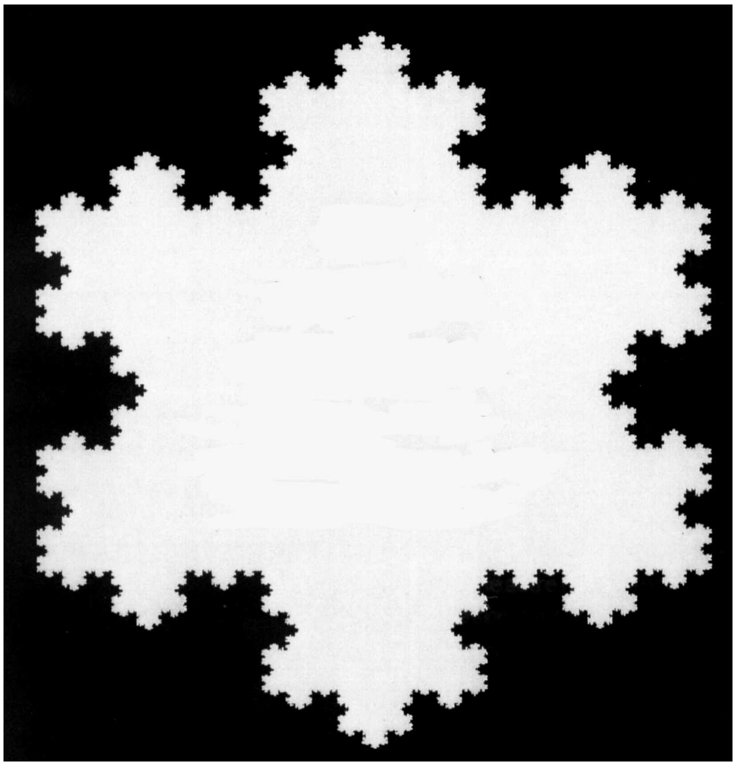
Tavalliset differentiaaliyhtälöt Solmun oheismateriaalina

Toukokuusta 1997 alkaen on Solmun verkkosivuilta löytynyt Tavallisten differentiaaliyhtälöiden kurssi, joka kuuluu Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen laatimaan matematiikan opettajien täydennyskoulutukseen, jonka Opetusminsteriö on rahoittanut. Tiedostoa luetaan Java-ohjelmalla. Tiedoston interaktiivinen osa vaatii toimiakseen uudehkon version Javasta, vanhemmilla versioilla saa näkyviin vain tiedoston tekstiosan.

Kurssi käsittelee 1. kertaluvun lineaarisia ja separoituvia differentiaaliyhtälöitä sekä vakiokertoimisen 2. kertaluvun lineaarisen yhtälön tapauksen. Lineaarista ryhmää ja numeerista ratkaisua käsitellään myös. Kurssin laajuus on noin kolmasosa yliopiston differentiaaliyhtälöiden cum laude-kurssista. Erityisesti painotetaan sovellutusesimerkkejä ja differentiaaliyhtälöiden muodostamista esimerkkitilanteessa eli mallintamista. Osaa esimerkeistä voidaan käyttää lukion erikoiskurssissa. Tiedoston interaktiivinen osa sisältää ohjelman, jolla voidaan ratkaista numeerisesti 1. kertaluvun yhtälön alkuarvotehtävä ja piirtää ratkaisukäyrä. Samaan kuvaan voi piirtää useampia saman yhtälön eri alkuarvoja vastaavia ratkaisukäyriä (ns. yhtälön dynamiikka). Alkuehtopisteet voi yksinkertaisesti "klikata" kuvaan. Käyttöohjeet selviävät tiedostoa lukemalla, siis vain kokeilemaan!

Kurssia koskevaa palautetta voi lähettää sähköpostina osoitteeseen Lars.Lamberg@Helsinki.Fi tai puhelimella 09-1912 2873.

Lars Lamberg
HY matematiikan laitos



Lehdistökeskustelua

Opetushallituksen peruskoulun opetuksen tasoa koskeva arviointi

Vuonna 1995 toteutetun Opetushallituksen raportin mediasuosikiksi nousi maan valtalehden johdolla näyttävästi — ja kritiikittä — julkistettu tulos, että Mikkelin läänin koulujen suoritukset matematiikassa ovat selvästi parempia kuin muiden läänien.

Arkhimedes-lehdessä 3/97 Joensuun yliopiston tilastotieteen professori Juha Alho kirjoittaa aiheesta otsikolla "Tilastollisia ongelmia matematiikan oppimisen arvioinnissa". Professori Alho päätyi Opetushallituksen raportin luettuaan lopputulokseen, ettei selvitys riitä perusteeksi väitteelle Mikkelin läänin paremmuudesta — kuin tietenkin tutkimukseen valittujen kolmen ryhmän osalta. Selvityksessä on käytetty tilastollisia menetelmiä niin puutteellisesti, ettei pienen otoksen tuloksia voida yleistää ja pitää tilastollisesti luotettavina.

Kirjoituksensa alussa Alho esittelee tutkimuksessa käytettyjä menetelmiä ja kertoo yksityiskohtaisesti, mitä virheitä tehtiin. Yhteenvetona hän toteaa: "Opetushallituksen teettämän selvityksen tulokset eivät siis ole päteviä kolmesta syystä: tulosten analyysissä ei ole otettu huomioon ryvästystä eikä monivertailua, ja itse otos on ollut liian pieni. (Myös tutkimusmenetelmien ja aineiston kuvaukset ovat puutteellisia). Samassa julkaisussa on useita muitakin selvityksiä, joiden tilastollisissa analyyseissä on analogisia ongelmia. Edelleen matematiikkaa koskevasta selvityksestä käy ilmi, että vastaava, virheellinen analyysi oli tehty vuoden 1990 aineistosta. — Valitettavasti näistä kokemuksista tulee mieleen epäily, onko Suomessa viime vuosikymmeninä tehty yhtään koululaitosta koskevaa, otantaan perustuvaa arviota, jossa ei esiintyisi ainakin joitakin edellä mainituista puutteista." Alaviitteessä Alho jatkaa: "Tätä epäilystä ruokkii mm. se, että omassa yliopistossani kasvatustieteen kandidaatin tutkintoon sisältyy vajaan puolen approbaturin verran tilastotiedettä, eikä kasvatustieteilijöitä esimerkiksi aineopintokursseilla näy". Alho päättää pohdintansa: "Julkisuudessa tulokset otettiin lähes kritiikittä vastaan ja ‘tieto’ Mikkelin läänin matematiikan tasosta levisi nopeasti. Kuten edellä on nähty, selvitys on kuitenkin amatöörimäinen, ja sen tulokset eivät ole luotettavia. Onkin vaikea nähdä, miten peruskoulun kehittämistä edistää tällaisten pikaraporttien teettäminen."

Alhon selkeän, objektiivisen ja perustellun kirjoituksen luettuaan tulee oudon ontto olo. Millaisella asiantuntemuksella maamme koululaitoksen tuloksia seurataan? Yhteiskunnassamme koulutuksen merkitystä korostetaan liturgian omaisesti joka taholta. Olisikohan korkea aika lopettaa tyhjät puheet, myöntää menetelmätieteiden hallinnan arvo "tietoyhteiskunnassamme" ja teettää maan koululaitoksen kehittämistä ohjaavat tutkimukset henkilöillä, joilla on hyvä — tai edes amatöörien virheiltä suojaamaan riittävä — tilastollinen koulutus?

Lahjakkuus ja ansiotaso

Roope Uusitalon lisensiaattityössä (Helsingin yliopisto, talouden rakenteiden ja kasvun tutkimusyksikkö) tutkittiin lahjakkuuden vaikutusta (miesten) ansiotasoon. Tuloksena oli, että suurin merkitys on matemaattisella lahjakkuudella. Tutkimuksessa käytettiin aineistona varusmiesten lahjakkuustestien tuloksia, joten aineisto kattoi lähes koko miesikäluokan.

Verkkoriippuvuus

Jo vuoden 1996 kesällä saksalainen Focus-lehti kertoi, että tutkijat ovat vahvistaneet Internet-riippuvuusoireyhtymän olemassaolon. Oireisiin kuuluu ajantajun kadottaminen verkon parissa ja toistuvat unet siitä.

Geometriaa

"Vaikka omaa muotoaan toistavat fraktaalit ovat puhtaasti matemaattinen käsite, ne muistuttavat todella hätkähdyttävästi monia luonnon muotoja. Syksyisen vierailun koivujen äärelle tehnyt matematiikan professori Mats Gyllenberg Turun yliopistosta sanoi löytävänsä myös koivunlehdestä fraktaalisia kuvioita. Luonnossa on paljon kuvioita ja muotoja, joita klassinen matematiikka ei pysty kuvaamaan. Siksi fraktaalin kaltaiset uudet käsitteet ovat hyviä. Näin me pääsemme kuvaamaan koivunkin geometriaa aivan uudella tavalla."
Yliopisto 17/97

Marjatta Näätänen