

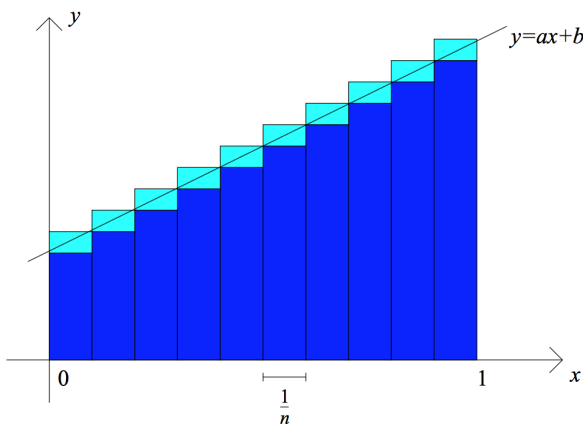
## TEHTÄVÄT 2008–2017

- 2008** a) Laske paraabelien  $y = x^2 - 3$  ja  $y = x^2 + 2x + 1$  leikkauspisteiden koordinaatit.  
 b) Laske sen rajoitetun alueen pinta-ala, joka jää paraabelien väliin.  
 [K7, pitkä]
- 2009** Neljännen asteen polynomilla  $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 7$  ja sen derivaatalla on yhteinen nollakohta. Määritä tämä yhteinen nollakohta. [K4, pitkä]
- 2010** Monivalintatestissä on 25 väitettä ja kussakin kaksi vastausvaihtoehtoa. Opiskelija tietää oikean vastauksen 10 väitteeseen, mutta joutuu arvaamaan loput. Millä todennäköisyydellä hän läpäisee testin, kun läpikäymiseen vaaditaan 15 oikeaa vastausta? [S6, pitkä]
- 2011** Olkoon  $f(x) = ax + b$ .
- a) Laske  $\int_0^1 f(x)dx$ . (2p.)  
 b) Johda lausekkeet summille

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{ja} \quad s_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right),$$

kun  $n = 1, 2, 3, \dots$  (4p.)

- c) Laske raja-arvot  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n)$ . (3p.)



[S14, jokeritehtävä, pitkä]

- 2012** Määritä raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(4x + 3) - \ln(3x + 4))$ . [S13, pitkä]
- 2013** Ratkaise yhtälö  $\cos(2x) + \cos(3x) = 0$ . [K9, opitkä]
- 2014** a) Osoita, että  $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  kaikille reaaliluvuille  $x$  ja  $y$ . (2p.)

- b) Olkoot  $a_1, \dots, a_n$  ja  $b_1, \dots, b_n$  reaalityyviä. Oletetaan, että  $A = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} > 0$ ,  $B = \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} > 0$ , ja merkitään lisäksi  $x_k = \frac{a_k}{A}$  ja  $y_k = \frac{b_k}{B}$ , kun  $k = 1, \dots, n$ . Osoita a-kohdan avulla, että  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n \leq 1$ . (4p.)
- c) Johda b-kohdan avulla *Cauchyn epäyhtälö*

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}. \quad (3p.)$$

[S15, jokeritehtävä, pitkä]

**2015** Tasokäyrä kulkee pisteen  $(3, 4)$  kautta. Määritä käyrän yhtälö, kun kyseessä on

- origon kautta kulkeva suora
- origokeskinen ympyrä
- ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa.

[S2, pitkä]

**2016** Lauseke  $2016^{2016}$  esitetään kymmenjärjestelmän lukuna.

- Mikä on luvun viimeinen numero?
- Mitkä ovat luvun kaksi ensimmäistä numeroa?
- Kuinka monta numeroa luvussa on?

[K10, pitkä]

**2017** Neliöiden  $N_1$ ,  $N_2$  ja  $N_3$  pinta-alojen suhde on  $9 : 2 : 11$ . Kolmion  $K$  yhtenä sivuna on neliön  $N_1$  sivu, toisena sivuna neliön  $N_2$  sivu ja kolmantena sivuna neliön  $N_3$  sivu. Laske kolmion  $K$  ja neliön  $N_2$  pinta-alojen suhteen tarkka arvo. [K12, pitkä]