

## TEHTÄVIÄ VUOSILTA 1998 – 2007

**1998** Ratkaise yhtälö  $\frac{x^2 - 3x}{2x + 3} = x - 3$ . (S1, pitkä)

**1999** Kukansiemeniä sisältävän säkin kyljessä kerrotaan, että siementen itämistodennäköisyys on 95 % ja että 5 % säkin sisällöstä on samannäköisiä rikkaruohon siemeniä. Säkin siemenet jaetaan kahdenkymmenen siemenen pusseihin. Millä todennäköisyydellä puutarhuri, joka kylvää tällaisen pussillisen siemeniä, saa vähintään 19 haluamaansa kukantainta? Millä todennäköisyydellä hän kylvää vähintään yhden rikkaruohonsiemen? (S7, pitkä)

**2000** Astia on kärjellään seisova avonainen ympyräkartio. Kartion pohjan säde on 6,6 cm ja sivujana 11,0 cm. Astia on täynnä vettä. Astiaan asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa. Määritä pallon säde siten, että astiasta valuva vesimäärä on mahdollisimman suuri. (K11, pitkä)

**2001** Eräessä yhteiskunnassa elintason kasvu on kääntäen verrannollinen jo saavutettuun elintasoon, ts. mitä korkeampi elintaso on, sitä vähemmän on halukkuutta sen edelleen nostamiseen. Muodosta elintasoa kuvaava differentiaaliyhtälömalli ja ratkaise se. Onko kyseessä jatkuva elintason kasvu? Onko muutos kiihtyvää vai hidastuvaa? Lähestyykö elintaso jotakin vakiotasoa? (S15, pitkä)

**2002** Muropakettia suurennettiin siten, että siihen mahtui 10 % enemmän muroja kuin aikaisemmin, Samalla hintaa korotettiin 12 %. Muutoksen seurauksena paketteja myytiin 10 % aikaisempaa vähemmän. Lisääntyikö vai vähentyikö murojen myynti mitattuna a) murojen painona, b) rahana? Kuinka monta prosenttia muutos oli? (K5, lyhyt)

**2003** Kolmion kulmille  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  pätee  $\sin \alpha \sin \beta = \cos \gamma$ . Osoita, että kolmio on suorakulmainen. (K6, pitkä)

**2004** Esitä Fermat'n pieni lause ja osoita sen avulla, että  $n^{2003} \equiv n \pmod{2003}$  kaikilla luonnollisilla luvuilla  $n$ . (S15, pitkä)

**2005** Olkoon  $\overrightarrow{OA} = 7\vec{i} + 9\vec{j}$  tason vektori. Määritä kaikki sellaiset vektorit  $\overrightarrow{OB}$ , että kulma  $OAB$  on suora ja vektorin  $\overrightarrow{AB}$  pituus on puolet vektorin  $\overrightarrow{OA}$  pituudesta. (K4, pitkä)

**2006** Jonot  $(x_n)$  ja  $(y_n)$  olkoot geometrisia lukujonoja. Näytä, että myös tulojono  $(z_n) = (x_n y_n)$  on geometrinen jono. Jos geometrinen jono  $(x_n)$  suppenee ja

geometrinen jono  $(y_n)$  hajaantuu, niin onko jono  $(z_n)$  aina hajaantuva?  
(S12, pitkä)

**2007** a) Laske integraali  $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + 2x^2) dx$ .

b) Määritä funktion  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  derivaatta  $f'(1)$ .

c) Sievennä lauseke  $e^{2 \ln x} - 2x^2$ . (K2, pitkä)