

## Tehtävät 1988 -97

- 1988** a) Osoita, että lausekkeiden  $x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2}$  ja  $x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 2x^2}$  arvot ovat toistensa käänteislukuja kaikilla  $x$ :n arvoilla.
- b) Auton jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden 2. potenssiin. Jos nopeus on 100 km/h, on jarrutusmatka 60 m. Mikä on jarrutusmatka, jos nopeus on 60 km/h? [K2, laaja]
- 1989** Osoita, että polynomilla  $P: P(x) = x^2 - (a^2 + 2)x + a^2 = 0$  ( $a \neq 0$ ) on nollakohta välillä  $]0, 2[$ . [S4, laaja]
- 1990** a) Erään liikkeen myymistä CD-levyistä on 99 prosenttia virheettömiä. Ostaja tarkastaa 21 levyn erän ja löytää kaksi virheellistä levyä. Mikä on tämän tapahtuman todennäköisyys?
- b) Tasasivuisen kolmion kärjet ovat ympyrän kehällä. Kolmiota kierretään  $60^\circ$  ympyrän keskipisteen ympäri. Määritä kolmion uuden ja alkuperäisen asennon muodostaman tähden pinta-alan suhde kolmion alaan. [K8, yleinen]
- 1991** Ratkaise yhtälö  $\cos x = \sqrt{3} \sin x$ . [S4, laaja]
- 1992** Osoita, että käyrät  $x^4 + y^4 = 1$  ja  $2xy = 1$  leikkaavat toisensa, ja määritä leikkauspisteiden etäisyydet origosta. Tarkat arvot ja likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella. [K8, laaja]
- 1993** Tehtävissä 3, 4, 5, 7 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).
- a) Millä vakion  $p$  arvoilla polynomi  $2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$  on koko  $R$ :ssä aidosti kasvava?
- b) Laske  $\int_0^1 (1 - x^2)^r x dx$ , kun  $r$  on positiivinen vakio. [S5, laaja]
- 1994** Lasista valmistettu maljakko on muodoltaan pyörähdyskappale, joka syntyy suorien  $y = 4$  ja  $y = -4$ , paraabelin  $x = 1 + y^2$  sekä  $y$ -akselin rajoittaman alueen pyörähtäessä  $x$ -akselin ympäri. Maljakon pohjan halkaisija on 8,0 cm. Kuinka paljon maljakko painaa, kun lasin tiheys on  $3600 \text{ kg/m}^3$ ? [K8, laaja]
- 1995** Tehtävissä 2,3,5,7 ja 10 on kussakin kolme vaihtoehtoa, joista saa suorittaa vain yhden. Vaihtoehto c) on tarkoitettu lähinnä kokeilukursseja opiskelleille, mutta sen saa valita kuka tahansa.
- a) Pisteestä  $A = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$  lähtevät vektorit  $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j}$  ja  $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j}$  ovat suunnikkaan sivuina. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste olkoon  $B$ . Määrä pisteen  $B$  koordinaatit ja vektori  $\vec{AB}$ .

- b) Harjoittelija Alku postittaa kirje-erän 30 minuutissa. Kun hän tekee saman työn yhdessä ammattitaitoisen Kelpon kanssa, aikaa kuluu tasan 5 minuuttia. Missä ajassa Kelpo tekisi saman työn yksin?
- c) 10-järjestelmän luku  $234_{10}$  tarkoittaa summaa  $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$ . Eräessä toisessa lukujärjestelmässä on

$$234_k + 56_k = 312_k .$$

Mikä on tämän lukujärjestelmän kantaluku  $k$ ? [S5, yleinen]

**1996** Funktio  $f: R \rightarrow R$  toteuttaa epäyhtälön (1)  $f(x) - f(y) \geq x - y$  kaikilla arvopareilla  $(x, y)$ , joissa  $x > y$ . Osoita, että  $f$  on kasvava. Osoita edelleen: Jos  $f$  on derivoituva,  $f'(x) \geq 1$  kaikilla  $x \in R$ . Muodosta esimerkki funktiosta, joka täyttää ehdon (1) ja on epäjatkuva  $R$ :ssä. [K8, pitkä]

**1997** Henkilön on päästävä suoran joen toisella puolella olevaan pisteeseen E, jonne on henkilöä lähinnä olevasta vastarannan kohdasta matkaa 5,2 km myötävirtaan. Henkilön veneen nopeus veteen nähden on 3,2 km/h, joen virtausnopeus 2,3 km/h ja henkilön kävelynopeus 5,9 km/h. Joen leveys on 600 m. Mikä on nopein reitti, kun joki ylitetään suoraviivaisesti, ja kuinka kauan matka pisteeseen E kestää? [S10, pitkä]