
Tehtäviä vuosilta 1978 – 1987

Kaikki tehtävät ovat pitkän matematiikan kokeista. Eräissä tehtävissä on kaksi alakohtaa; ne olivat kokelaalle vaihtoehtoisia.

1978 Osoita, ettei mikään käyrän

$$y^2 = \frac{x^3 - 1}{3x}$$

piste (x, y) ole ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ sisällä. [Syksy 10.]

1979 Suunnikkaassa $ABCD$ on $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \bar{b}$. Sivulta CD valitaan piste E siten, että $CE : ED = 1 : 3$. AE ja BD leikkaavat toisensa pisteessä F . Esitä \overrightarrow{AF} vektorien \bar{a} ja \bar{b} avulla. [Kevät 7.]

1980 Ratkaise yhtälö $2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} = 0$. [Kevät 5.]

1981 Osoita, että yhtälöllä $x - \ln x = 0$ ei ole reaalijuuria. [Kevät 5.]

1982 a) Suoran ympyräkartion pohjan säde on R ja korkeus $H = 3R$. Kartion sisään on asetettu ympyrälieriö, jonka akseli on kartion akselin osa. Määritä lieriön pohjan säde x siten, että lieriön vaipan ja pohjien alojen summa on mahdollisimman suuri.

b) Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow A$ sellaisia kuvauksia, että $(g \circ f)(x) = x$ kaikilla A :n pisteillä x . Osoita, että f on injektio (so. $f(x) = f(y) \implies x = y$) ja g on surjektio (so. $g(B) = A$). [Kevät 7.]

1983 a) Jaa vektori $\bar{a} = 2\bar{i} - 5\bar{j}$ kahteen keskenään kohtisuoraan komponenttiin, joista toinen on suoran $3x - y + 2 = 0$ suuntainen.

b) Tasasivuisen kolmion, jonka sivut ovat $= s$, sisään on piirretty kolme r -säteistä ympyrää, jotka sivuavat toisiaan pareittain. Lisäksi kukin ympyröistä sivuaa kahta kolmion sivua. Määritä suhde $r : s$. [Kevät 4.]

1984 Määritä ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ ja paraabelin $y = x^2 + 1$ yhteiset tangentit. [Syksy 9.]

1985 a) Määritä yhtälöiden

$$(1 - x)^7 = -10^{-14}, \quad (1 - x)^{14} = 10^{-14}, \quad (1 - x)^{21} = 1$$

reaalijuuret.

b) Missä suhteessa on sekoitettava vettä ja 5-prosenttista suolaliuosta, jotta saataisiin 3-prosenttista liuosta? [Syksy 1.]

1986 a) Määritä käyrien $y = e^{2x}$ ja $y = e^{-x}$ sekä suoran $y = e$ rajoittaman alueen ala.

b) Määritä vektorien \bar{a} ja \bar{b} välinen kulma, kun

$$|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}| \quad \text{ja} \quad \bar{a} \neq \bar{0} \neq \bar{b}.$$

[Syksy 4.]

1987 Lentokone lähti Helsingistä klo 7.00 paikkaan X, jossa kello tällöin oli 5.00, ja palasi Helsinkiin samana päivänä klo 21.30. Paluumatkaan kului puoli tuntia enemmän kuin menomatkaan, ja perillä kone viipyi 2 tuntia. Kuinka paljon kello oli X:ssä koneen lähtiessä paluumatkalle? [Syksy 2.]