Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset kilpailijoiden silmin

Pinja Pessi ja Essi Vilhonen

Lähdimme kohti Zürichiä torstai-iltapäivällä 6.4. Paikallisella lentokentällä meitä odotti oppaamme, joka oli myös Ukrainan joukkueen opas. Matkustimme oppaan kanssa junalla hostellille, missä jaoimme huoneen luxemburgilaisten kanssa.

Perjantaina ohjelmassa oli vanhassa kaupungissa kiertelyä pieniä tehtäviä ratkoen ja muihin kilpailijoihin tutustuen. Illalla ETH-yliopistolla pidettiin avajaisseremonia, jossa saimme kuulla muun muassa perinteistä sveitsiläistä musiikkia ja innostavia puheita.

Neljä ja puoli tuntia kestäneet kokeet pidettiin kahtena päivänä, ja niiden jälkeen järjestettiin mukavaa ja liikunnallistakin ohjelmaa. Lauantaina tarjolla oli erilaisia sisä- ja ulkopelejä. Sunnuntaina vaelsimme Zürichin ylle kohoavalle Uetlibergille nauttien lämpimästä säästä ja hienoista maisemista, minkä jälkeen saimme valita tanssituntien ja IMOsta kertovan elokuvan välillä.

Kokeiden jälkeen oli aikaa tutustua kaupunkiin lisää. Maanantaina kävimme veneretkellä Zürich-järvellä sekä paikallisessa eläintarhassa ihmettelemässä muiden muassa intiannorsuja ja kameleontteja. Illalla majapaikassamme järjestettiin paneelikeskustelu, jossa matematiikan parissa uraa tehneet naiset kertoivat kokemuksistaan.

Tiistaina matkasimme Rigi-vuorelle, jonka menimme ylös vanhalla ratasjunalla. Maisemien katselun kannalta epäonnekasta oli tosin hyvin sumuinen ja koleahko sää. Iltapäivällä vuorossa oli vielä arvokas päättäjäisseremonia ja illallinen Zürichin yliopistolla. Haastava matematiikka, mukavat ihmiset ja hienot tapahtumat tekivät EGMO-matkastamme unohtumattoman viikon.

Tehtävät

Tehtävien käännökset englannista on laatinut joukkueenjohtaja Neea Palojärvi.

Tehtävä 1. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio, jolle $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ ja $\angle ABC > \angle CDA$. Olkoot Q ja R janojen BC ja CD pisteitä, tässä järjestyksessä, niin, että suora QR leikkaa suorat AB ja AD pisteissä P ja S, tässä järjestyksessä. Lisäksi $PQ = RS$. Olkoon janan BD keskipiste M ja janan QR keskipiste N. Osoita, että pisteet M, N, A ja C ovat samalla ympyrällä.

Tehtävä 2. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku k, jota kohti on olemassa positiivisten kokonaislukujen $\mathbb{Z}_{>0}$ k-värin väritys ja funktio $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$, joka toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

(i) Kaikille positiivisille kokonaisluvuille m, n, jotka ovat samanväriset, pätee $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) On olemassa positiiviset kokonaisluvut m, n, joille $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Joukon $\mathbb{Z}_{>0}$ k-värin värityksessä jokainen kokonaisluku väritetään täsmälleen yhdellä k:sta väristä. Positiiviset kokonaisluvut m, n eivät ole välttämättä erisuuret kummassakaan ehdoista (i) tai (ii).

Tehtävä 3. Tasossa on 2017 suoraa, joista mitkään kolme eivät leikkaa samassa pisteessä. Turbo-etana istuu täsmälleen yhdellä näistä suorista ja alkaa liukua suoraa pitkin seuraavalla tavalla: se liikkuu annetulla suoralla, kunnes se saavuttaa kahden suoran leikkauspisteen. Leikkauspisteessä se päättää jatkaa matkaa toiselle suoralle kääntymällä oikealle tai vasemmalle ja vaihtaa kääntösuuntaansa jokaisessa leikkauspisteessä. Se voi vaihtaa suuntaansa vain leikkauspisteissä. Voiko olla olemassa jana, jonka se kulkee molempiin suuntiin matkansa aikana?

Tehtävä 4. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku, ja olkoot $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ positiivisia kokonaislukuja. $t_n + 1$ ihmisen ryhmässä pelataan jokin määrä shakkipelejä. Kaksi henkilöä voivat pelata toisiaan vastaan enintään kerran. Osoita, että seuraavat kaksi ehtoa voivat olla voimassa samanaikaisesti:

(i) Jokainen on pelannut jonkin luvuista $t_1, t_2, \ldots, t_n$ määrän pelejä.

(ii) Jokaista indeksiä i, $1 \leq i \leq n$, kohti joku on pelannut täsmälleen t_i shakkipeliä.

Tehtävä 5. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Ei välttämättä erisuurten positiivisten kokonaislukujen n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ on *kallis*, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku k, jolla

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Etsi kaikki kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla on olemassa kallis n-tupla.

b) Osoita, että jokaista paritonta positiivista kokonaislukua m kohti on olemassa kokonaisluku $n \geq 2$, jolla m kuuluu kalliiseen n-tuplaan.

Yhtälön vasemmalla puolella on täsmälleen n tekijää.

Tehtävä 6. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka mitkään kaksi sivua eivät ole yhtä pitkät. Kolmion ABC painopisteen G ja ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen O peilaukset sivujen BC, CA, AB suhteen ovat G_1, G_2, G_3 ja O_1, O_2, O_3, vastaavasti. Osoita, että kolmioiden G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A ja ABC ympäri piirretyillä ympyröillä on yhteinen piste.

Kolmion painopiste on sen kolmen mediaanin leikkauspiste. Mediaani on jana, joka yhdistää kolmion kärjen vastakkaisen sivun keskipisteeseen.

Laaja-alainen projektiosaaminen matematiikan opetuksessa

Matematiikkadiplomi-sivulla

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

on tulostettavissa matematiikkadiplomien tehtävistä kerättyjä tehtäväpaketteja, joita voi käyttää laaja-alaisen osaamisen opetuksessa. Käytettävissä on 10 tehtäväpakettia:

Maapallo

Suomen historia

Terveys ja ravinto

Talous

Todennäköisyys

Matematiikka ja taide (2 tasoa)

Mittaaminen (2 tasoa)

Koodauksen (tai ohjelmoinnin) pohjustus

Alaluokille sopivia tehtäviä on kolmen viimeisen aiheen paketeissa.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteeseen

juha piste ruokolainen at yahoo piste com