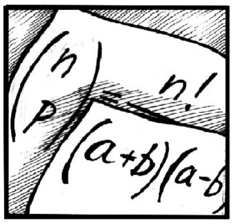


Solmun ongelmapalsta

Solmun ensimmäisen ongelmapalstan jalkapallokenttätehtävään tuli äärimmäisen elegantti ratkaisu Jaska Poraselta. Ilahduttavasti tehtävä oli poikinut muutaman jatkokysymyksen, jotka löytyvät tämänkertaiselta palstalta.

Jalkapallokenttätehtävä on kiero. Tehtävä on nimittäin suoraviivainen ja nopea ratkaista, kun tajuaa käyttää kehäkulmalausetta. Jos taas ryhtyy ratkaisemaan yhtälöitä rakennellen ja funktioita maksimoiden, voi ratkaisusta tulla melkoisen pitkä.

Jätetään vielä loput ensimmäisen ongelmapalstan tehtävät odottamaan ratkaisuehdotuksia lukijoilta. Niihin sekä näihin uusiin tehtäviin kaivattaisiin ratkaisuja 20.4.2017 mennessä osoitteeseen aernvall@abo.fi.

Tehtävät

Tehtävä 1. (Ehdottanut Jaska Poranen) Kuvassa 1 on piste P sivun AB keskipiste. Marcello juoksee pitkin janaa PD. Mihin kohtaan X tällä janalla Ronaldo syöttää pallon, kun kulman FXE pitää olla mahdollisimman suuri eli maaliviivan EF pitää näkyä pisteestä X mahdollisimman suuressa kulmassa? (Näistä taitureista kun on kyse, niin tietysti myös Marcello on tuossa pisteessä X oikealla hetkellä.)

Tehtävä 2. (Ehdottanut Jaska Poranen) Määritä janalta PD piste M siten, että janojen summa $EM+MF$ on mahdollisimman pieni. Määritä edelleen maaliviivajanan EF keskinormaalin ja janan PD leikkauspiste (merkitään N). Osoita, että $\angle FME = \angle FNE$.

Tehtävä 3. (Ehdottanut Aki Halme) Kuinka voit mitään mittaamatta taitella A4-paperista tasasivuisen kolmion?

Tehtävä 4. (Ehdottanut Aki Halme) Tasan keskipäivällä kellon tunti-, minuutti- ja sekuntiosoittimet ovat täsmälleen päällekkäin. Hieman yli kello yksi iltapäivällä tunti- ja minuuttiosoittimet ovat jälleen täsmälleen päällekkäin. Minne sekuntiosoitin silloin osoittaa?

Tehtävä 5. (Ehdottanut Esa Vesalainen) Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 7, ja sen sisältä on valittu 13 eri pistettä. Osoita, että jotkin kaksi niistä ovat enintään etäisyydellä 2 toisistaan.

Tehtävä 6. (Lukijan ehdottama muunnelma romanialaisesta koulutehtävästä) Olkoon

$$S_k = k + kk + kkk + \ldots + \underbrace{kk\ldots k}_{n\,\mathrm{kpl}},$$

kun $k = 1, 2, \ldots, 9$. Laske summa

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_9.$$

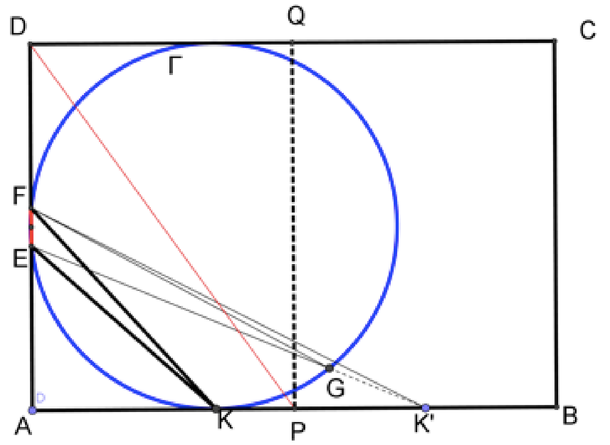
Tehtävä 7. (Tehtävän 6 jatko-osa) Osoita, että

$$10^n \equiv 9n + 1 \pmod{81}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Ratkaisut

Tehtävä 1, Solmu 3/2016. (Ehdottanut Aki Halme) Jalkapallokentällä on pituutta noin 100 metriä ja leveyttä noin 70 metriä. Jalkapallomaalin leveys on 7,32 metriä. Maali sijaitsee lyhyemmän sivun keskellä. Mistä kohtaa jalkapallokentän sivurajaa maali näkyy suurimmassa kulmassa? Mistä kentän pisteistä maali näkyy samassa kulmassa kuin kyseisestä kohdasta sivurajaa?



Kuva 1: Mallikuva tehtävästä 1 ja sen eräästä ratkaisusta.

Ratkaisu (Jaska Poranen) Tarkastellaan tehtävää 1 ensin hieman yleisemmin oheisen kuvan kautta (Kuva 1). Olkoon nelikulmio $ABCD$ suorakulmio ja mallittakoon se tehtävässä mainittua jalkapallokentän piiriä. Erotetaan sen sivulta AD maaliviivajana EF siten, että $EA = FD$. Piirretään ympyrä Γ, joka kulkee pisteiden E ja F kautta ja joka sivuaa janaa AB. Olkoon tämä sivuamispiste K.

Jana EF näkyy sivulta AB pisteestä K mahdollisimman suuressa kulmassa. Olkoon nimittäin K' jokin toinen piste sivulla AB. Piirretään puolisuora EK' ja merkitään sen ja ympyrän Γ leikkauspistettä kirjaimella G. Kulma $\angle FGE$ on kolmion $FK'G$ kulman $K'GF$ vieruskulmana suurempi kuin kulma $FK'G$ ($= \angle FK'E$), ts. $\angle FK'E < \angle FGE$. Ympyrän Γ samaa kaarta (tai jännettä EF) vastaavina kehäkulmina ovat kulmat $\angle FGE$ ja $\angle FKE$ yhtä suuria. Siis $\angle FK'E < \angle FKE$.

Ympyrän sekanttilausetta soveltaen saadaan piste K selville. Sekanttilauseen nojalla $AE \cdot AF = (AK)^2$. Merkitään vielä $EF = a$ ja $AE = b$. Silloin $(AK)^2 = b \cdot (b + a)$ eli $AK = \sqrt{b^2 + ab}$. Sijoittamalla $a = 7{,}32$ m, $b = \frac{70 \text{ m} - 7{,}32 \text{ m}}{2} = 31{,}34$ m saadaan $AK \approx 34{,}81$ m. Itse kulman $\angle FKE$ suuruus (n. 6°) olisi nyt helppo määrittää perustrigonometrialla, mutta sitä ei tehtävässä kysytty. Pythagoraan lauseen avulla voisi selvittää esimerkiksi etäisyyden pisteestä K janan EF keskipisteeseen, jne. Maaliviiva EF näkyy kulman $\angle FKE$ suuruisena kaikista kentällä $ABCD$ olevista ympyrän Γ pisteistä (lukuun ottamatta pisteitä E ja F).

Laaja-alainen projektiosaaminen matematiikan opetuksessa

Matematiikkadiplomi-sivulla

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

on tulostettavissa matematiikkadiplomien tehtävistä kerättyjä tehtäväpaketteja, joita voi käyttää laaja-alaisen osaamisen opetuksessa. Käytettävissä on 10 tehtäväpakettia:

Maapallo

Suomen historia

Terveys ja ravinto

Talous

Todennäköisyys

Matematiikka ja taide (2 tasoa)

Mittaaminen (2 tasoa)

Koodauksen (tai ohjelmoinnin) pohjustus

Alaluokille sopivia tehtäviä on kolmen viimeisen aiheen paketeissa.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteeseen

juha piste ruokolainen at yahoo piste com